

Zur numerischen Behandlung großer elasto-viskoplastischer Deformationen bei isochor-volumetrisch entkoppeltem Stoffverhalten

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

DOKTOR-INGENIEURS

von der Fakultät für

Bauingenieur- und Vermessungswesen
der Universität Fridericiana zu Karlsruhe (TH)

genehmigte

DISSERTATION

von

Dipl.-Ing. Stefan Doll
aus Rülzheim

Tag der mündlichen Prüfung : 14. Juli 1998
Hauptreferent : Prof. Dr.-Ing. K. Schweizerhof
Korreferent : Prof. Dr.techn. Ph.D. H. Mang

Karlsruhe 1998

Kurzfassung

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit der Aufarbeitung nichtlinearer isochor-volumetrisch entkoppelter Stoffgesetze für Finite Element Formulierungen für große Deformationen. Es werden die Werkstoffklassen Elastizität, Elastoplastizität und Elastoviskoplastizität behandelt. Dabei erfolgt die Beschränkung auf den isothermen isotropen Fall. Die verwendeten Finiten Elemente sind entweder Volumenelemente oder sogenannte „Solid-Shell“ Schalenelemente niedriger Ansatzordnung.

Im Vordergrund steht die Anwendung der entwickelten Stoffgesetze bei Elementen mit selektiv reduzierter Integration der volumetrischen Anteile. Bei fast inkompressiblem Stoffverhalten zeichnen sich diese Elemente durch eine deutliche Verringerung der volumetrischen Versteifung in Kombination mit einfacher und effizienter Implementierung aus. Allerdings ist die additive Aufspaltung des Spannungs- und des Stoffensors in deviatorische und volumetrische Anteile erforderlich. Ausgangspunkt hierfür ist die additive Entkopplung der Energiefunktion in isochore und volumetrische Anteile sowie eine deviatorische Fließbedingung.

Beispielberechnungen zeigen die Äquivalenz der numerischen Ergebnisse der selektiv reduzierten Integration mit Formulierungen, die entweder auf einer Modifikation des volumetrischen Anteils des Deformationsgradienten beruhen oder elementinterne Freiheitsgrade für Dilatation und Druck verwenden. Alle genannten Formulierungen können zu Kinematiken führen, die jedoch im Fall der selektiv reduziert integrierten Elemente mittels einer einfachen Modifikation behoben werden können.

Das Hauptanwendungsgebiet der beschriebenen Methode liegt in der numerischen Berechnung großer plastischer Deformationen bei Metallen (z.B. Metallumformung). Für Werkstoffe mit druckabhängiger Fließbedingung (z.B. Geomaterialien) ist die Methode nicht geeignet.

Abstract

The topic of the present thesis is the implementation of nonlinear isochoric-volumetric decoupled material laws into large deformation finite elements. With restriction to the isothermal isotropic case the material behaviour is described for elasticity, elastoplasticity and elastoviscoplasticity. The finite elements considered are three-dimensional solids and so-called 'solid-shell' elements of low order.

The focus is on the application of the derived material laws to elements with selective reduced integration of the volumetric terms. In the case of nearly incompressible materials these elements lead to a significant reduction of the volumetric locking behaviour in combination with a simple and efficient implementation. The kernel of the method is the additive split of the stress tensor and the tangent moduli tensor in deviatoric and volumetric parts. Starting point of the split is an isochoric-volumetric decoupled energy function and a yield condition of the deviatoric type.

By means of examples the selectively reduced integrated element is compared with alternative formulations including a modified volumetric part of the deformation gradient or independent internal dilatation and pressure variables. The numerical results are nearly identical. However, all of the described elements can lead to hour-glassing, which can be easily removed by modification of the selective reduced integration rule.

The method developed in this work can be used for the numerical treatment of large plastic deformations of metals (e.g. metalforming). The method is not suitable to materials with pressure-dependent yield condition (e.g. geomaterials).

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Angestellter am Institut für Mechanik der Universität Karlsruhe.

Meinem geschätzten Lehrer Herrn Prof. Dr.-Ing. K. Schweizerhof danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit, seine kompetente wissenschaftliche Betreuung und die Übernahme des Hauptreferates.

Herrn Prof. Dr.techn. Ph.D. H. Mang bin ich für die sorgfältige Durchsicht der Arbeit, die wertvollen Anregungen und die Übernahme des Korreferates dankbar.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr.-Ing. P. Vielsack für die stete Diskussionsbereitschaft und für das von ihm maßgeblich geprägte Arbeitsklima.

Schließlich möchte ich allen Kolleginnen und Kollegen des Instituts für Mechanik für die gute Zusammenarbeit, die große Hilfsbereitschaft und die angenehme Arbeitsatmosphäre danken. Hervorheben möchte ich insbesondere meine beiden ehemaligen Zimmerkollegen Dr.-Ing. H. Wei und Dipl.-Ing. Th. Rottner. Außerdem möchte ich Herrn Dr.-Ing. R. Hauptmann und Herrn Dipl.-Phys. Ch. Freischläger für die wertvollen Fachdiskussionen danken.

Karlsruhe, im Juli 1998

Stefan Doll

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Kontinuumsmechanische Grundlagen	5
2.1	Kinematik der Deformation	5
2.1.1	Deformationsabbildung	5
2.1.2	Deformationsgradient	7
2.1.3	Verzerrungstensoren	9
2.1.4	Verzerrungsraten	11
2.1.5	Spektraldarstellungen	12
2.2	Spannungen	14
2.2.1	Spannungstensoren	14
2.2.2	Spannungsraten	16
2.3	Stofftensoren	16
2.3.1	Kontinuierliche Stofftensoren	17
2.3.2	Inkrementelle Stofftensoren	17
3	Bilanzgleichungen und Thermodynamik	19
3.1	Energieformen und Prozesse	19
3.2	Bilanzgleichungen	21
3.2.1	Massenerhaltung	21
3.2.2	Impulserhaltung	21
3.2.3	Drehimpulserhaltung	22
3.2.4	Energieerhaltung	22
3.2.5	Entropieungleichung	23
3.3	Freie Helmholtz Energie	24
3.4	Dissipationsleistung	26

4	Elastizität	27
4.1	Verzerrungsenergiefunktion	29
4.1.1	Darstellungen der Verzerrungsenergiefunktion	29
4.1.2	Eigenschaften der Verzerrungsenergiefunktion	32
4.1.3	Diskussion ausgewählter Verzerrungsenergiefunktionen	38
4.2	Volumetrische Verzerrungsenergiefunktion	41
4.2.1	Bekannte Funktionen aus dem Schrifttum	42
4.2.2	Neu vorgeschlagene Funktionen	44
4.3	Spannungsberechnung	50
4.3.1	Herleitung der allgemeinen Gleichungen	50
4.3.2	Spektraldarstellungen	51
4.3.3	Deviatorisch-volumetrische Zerlegung	52
4.4	Elastische Stofftensoren	53
4.4.1	Herleitung der allgemeinen Gleichungen	53
4.4.2	Spektraldarstellungen	54
4.4.3	Deviatorisch-volumetrische Zerlegung	56
4.5	Algorithmus für elastische Werkstoffe	57
5	Elastoplastizität	59
5.1	Kinematik multiplikativer Elastoplastizität	61
5.2	Beschreibung des Werkstoffverhaltens	64
5.2.1	Energiedichtefunktion	64
5.2.2	Spannungsberechnung und Dissipationsleistung	66
5.2.3	Fließbedingung	67
5.2.4	Prinzip der maximalen plastischen Dissipation	69
5.3	Integration der Evolutionsgleichungen	71
5.3.1	Anfangswertproblem und Integrationsalgorithmus	71
5.3.2	Elastischer Prädiktor und plastischer Korrektor	73
5.4	Elastoplastische Stofftensoren	77
5.5	Deviatorisch-volumetrische Zerlegung	80
5.6	Algorithmus für elastoplastische Werkstoffe	84
6	Elastoviskoplastizität	86
6.1	Prinzip der maximalen plastischen Dissipation	87

6.2	Integration der Evolutionsgleichungen	89
6.2.1	Anfangswertproblem und Integrationsalgorithmus	89
6.2.2	Elastischer Prädiktor und viskoplastischer Korrektor	90
6.3	Elastoviskoplastische Stofftensoren	91
6.4	Deviatorisch-volumetrische Zerlegung	91
6.5	Algorithmus für elastoviskoplastische Werkstoffe	91
6.6	Diskussion der Viskosität	92
6.6.1	Grenzfall ohne Viskosität ($\eta = 0$)	92
6.6.2	Allgemeiner Fall mit Viskosität ($\eta > 0$)	93
6.7	Abschließende Bemerkungen	95
7	Finite Elemente Formulierungen	97
7.1	Volumenelemente	97
7.1.1	FEM am Beispiel des Verschiebungselementes	98
7.1.2	Standardverschiebungselement Q1	105
7.1.3	Selektiv reduziert integriertes Verschiebungselement Q1/d8v1	107
7.1.4	Gemischt integriertes Element Q1/d8v1- ϑ	108
7.1.5	Elemente mit modifizierten Deformationsgradienten $\overline{\mathbf{F}}$	109
7.1.6	Element Q1/P0 mit konstanter Dilatation	111
7.1.7	Diskussion der Volumenelemente	113
7.2	Schalenelemente	115
7.2.1	Element ANS3D	116
7.2.2	Element ANS3Dq	119
7.2.3	Element ANS3Dq/d4v1	120
8	Numerische Beispiele	122
8.1	Stauchung eines Quaders	122
8.2	Einschnürung eines runden Zugstabes	126
8.2.1	Zugstab mit grober Diskretisierung (120 Elemente)	127
8.2.2	Zugstab mit feiner Diskretisierung (960 Elemente)	129
8.3	Dehnung eines Latex Streifens	133
8.4	Biegung einer dünnen quadratischen Platte	139
8.5	Beidseitig gedrückter Zylinder	141

9 Zusammenfassung	144
Schrifttum	147
A Mathematische Grundlagen	159
A.1 Rechenregeln für Tensoren	159
A.1.1 Tensoralgebra	159
A.1.2 Tensoranalysis	166
A.2 Optimierungsproblem mit Nebenbedingungen	170
A.2.1 Kuhn-Tucker Bedingungen	170
A.2.2 Penalty Verfahren	170

Kapitel 1

Einleitung

Klassifizierung: Bei der Klassifizierung von Problemstellungen aus dem Bereich der Strukturmechanik muß zwischen geometrischem Strukturverhalten und Werkstoffverhalten unterschieden werden.

Geometrie: In der *Theorie kleiner Verzerrungen* wird vorausgesetzt, daß die Terme der Verschiebungsableitungen nach den Ortskoordinaten klein sind, so daß quadratische Anteile vernachlässigt werden können. Da die so erhaltenen Verzerrungen nicht invariant gegenüber Starrkörperdrehungen sind, werden dann auch nur kleine Werte für Verdrehungen und Verschiebungen zugelassen. Deshalb muß bei den Ableitungen nach den Ortskoordinaten nicht zwischen den Konfigurationen unterschieden werden. Wird die Beschränkung auf kleine Verschiebungsableitungen aufgehoben, d.h. deren quadratische Anteile werden in den Verzerrungen berücksichtigt, und werden die Verzerrungen weiterhin als klein vorausgesetzt, gelangt man zur *geometrisch nichtlinearen Theorie*. Die nun erhaltenen Verzerrungen sind invariant gegenüber Starrkörperdrehungen. Da große Verdrehungen und Verschiebungen auftreten können, muß unterschieden werden, ob nach den Ortskoordinaten der Referenz- oder Momentan-konfiguration abgeleitet wird. Werden zusätzlich große Werte für die Verzerrungen zugelassen, gelangt man zur *Theorie großer Verzerrungen* bzw. zur *Theorie großer Deformationen*.

Werkstoff: Existiert ein linearer Zusammenhang zwischen den Spannungen und den Verzerrungen, so handelt es sich um eine *physikalisch lineare Theorie*. In Kombination mit der Theorie kleiner Verzerrungen spricht man dabei vom Hookeschen Gesetz und es liegt eine vollständig lineare Theorie vor. In Kombination mit der geometrisch nichtlinearen Formulierung in der Referenzkonfiguration spricht man von elastischem Werkstoffverhalten nach St.-Venant-Kirchhoff. Ein nichtlinearer Zusammenhang zwischen Spannungen und Verzerrungen führt auf die *physikalisch nichtlineare Theorie*. Hierunter fallen beispielsweise nichtlineare Elastizität (Gummi), Plastizität (Metallumformung), Viskoelastizität (Polymere) und Viskoplastizität (Umformprozesse bei höheren Temperaturen).

In der vorliegenden Arbeit werden ausschließlich Problemstellungen mit großen Verzerrungen und physikalischen Nichtlinearitäten behandelt (ausgenommen Viskoelastizität). Damit ist die größtmögliche Allgemeingültigkeit der Theorie bezüglich

der obigen Klassifizierung gewährleistet. Alle oben angeführten Fälle sind, da sie sich aus Beschränkungen der allgemeinen Theorie ergeben, in der allgemeinen Theorie enthalten. Beispielsweise ergibt sich durch alleinige Betrachtung der Anfangstangente des Falles große Verzerrungen/nichtlineare Elastizität direkt die Theorie kleiner Verzerrungen mit linear elastischem Werkstoffgesetz.

Bezüglich des Werkstoffverhaltens erfolgt jedoch die Beschränkung auf isotherme Problemstellungen, d.h. die Temperatur ist an jedem Ort der Struktur und zu jeder Zeit gleich. Es wird damit implizit vorausgesetzt, daß die durch dissipative Effekte (Plastizität, Viskosität) in Wärme umgewandelte mechanische Energie nicht rückwirkend über das Temperaturfeld die Werkstoffeigenschaften beeinflusst. Für „langsam“ ablaufende dissipative Prozesse kann eine konstante homogene Temperaturverteilung angenommen werden. „Schnell“ ablaufende dissipative Prozesse, bei denen lokal starke Temperaturänderungen auftreten können, sind somit ausgeschlossen (siehe auch Schlußbemerkungen in Abschnitt 3.1). Als weitere Einschränkung bezüglich des Werkstoffverhaltens erfolgt die Voraussetzung von Isotropie auch während der Deformation. Aufgrund der Richtungsunabhängigkeit kann deshalb das Stoffverhalten konsequent in einer Eigenwertformulierung beschrieben werden.

Übersicht: In den Kapiteln 2 und 3 werden zunächst die kontinuumsmechanischen und thermodynamischen Grundlagen bereitgestellt, die zur Beschreibung von Problemstellungen aus dem Bereich der Strukturmechanik erforderlich sind. Schwerpunktmäßig erfolgt in Kapitel 2 die Beschreibung des geometrischen Strukturverhaltens, während in Kapitel 3 die Basis zur Formulierung der Stoffgesetze gelegt wird.

In den Kapiteln 4, 5 und 6 wird ausschließlich das Werkstoffverhalten beschrieben. Es werden die Werkstoffklassen Elastizität, Elastoplastizität und Elastoviskoplastizität ausführlich behandelt. Im Fall der Elastizität erfolgt eine Begründung der Formulierung in Eigenwerten (Hauptstreckungen). Im Fall des plastischen bzw. viskoplastischen Teilwerkstoffgesetzes ist die Eigenwertformulierung eine direkte Folge des verwendeten exponentiellen Integrationsoperators. Insbesondere im Hinblick auf eine spätere Finite Element Implementierung werden für alle Werkstoffklassen die Berechnungsvorschriften der Spannungs- und Stofftensoren hergeleitet. Auf den Sonderfall des isochor-volumetrisch entkoppelten Stoffverhaltens, das die additive deviatorisch-volumetrische Entkopplung der Spannungs- und der Stofftensoren zur Folge hat, wird dabei gesondert eingegangen. Um die quadratische Konvergenz des globalen Newton-Raphson Lösungsschemas zu gewährleisten, müssen im elastoplastischen und elastoviskoplastischen Fall die konsistenten algorithmischen Stofftensoren additiv entkoppelt werden. Im Gegensatz zum elastischen Fall liegt dabei keine explizite Berechnungsvorschrift vor. Für alle behandelten Werkstoffklassen wird am Ende des jeweiligen Kapitels ein Algorithmus angegeben, der wahlweise die Berechnung der räumlichen oder materiellen Spannungs- und Stofftensoren erlaubt.

In Kapitel 7 werden die verwendeten Finite Element Formulierungen besprochen. Dabei erfolgt zunächst die Beschränkung auf dreidimensionale Volumenelemente mit linearen Ansatzfunktionen. Die Grundkonzepte der Finiten Element Methode werden am Standardverschiebungselement erläutert. Als werkstoffabhängige Größen gehen

dabei der Spannungs- und der Stofftensor ein. Auf der Basis des isochor-volumetrisch entkoppelten Stoffverhaltens wird das selektiv reduziert integrierte Verschiebungselement beschrieben. Der deviatorische Anteil wird dabei vollständig integriert, während der volumetrische Anteil reduziert integriert wird. Dann wird ein gemischt integriertes Element eingeführt, das mittels eines volumetrischen Wichtungsfaktors das Standardverschiebungselement mit dem selektiv reduziert integrierten Element kombiniert. Zum Vergleich werden alternative Formulierungen behandelt, die auf einem Deformationsgradienten mit modifiziertem volumetrischem Anteil basieren. Außerdem wird ein Element mit unabhängiger Dilatation und unabhängigem Druck diskutiert. Abschließend wird als Schalelement ein sogenanntes Solid-Shell Element vorgestellt. Dieses auf linearen Ansatzfunktionen aufgebaute Element besitzt eine quadratische Interpolation der Verschiebungen in Dickenrichtung und beinhaltet das Konzept der angenommenen Querschubverzerrungen.

In Kapitel 8 werden anhand repräsentativer Beispiele die Auswirkungen bei Verwendung der unterschiedlichen Algorithmen aufgezeigt. Der Schwerpunkt liegt dabei auf den numerischen Berechnungen, die ein isochor-volumetrisch entkoppeltes Stoffverhalten zugrunde legen. Insbesondere werden das selektiv reduziert integrierte und das gemischt integrierte Verschiebungselement eingesetzt und mit den alternativen Elementformulierungen verglichen. Alle behandelten Probleme sind dreidimensional, auch wenn sie verbal als Volumen- oder als Schalenprobleme bezeichnet werden.

In Kapitel 9 werden die wesentlichen Ergebnisse dieser Arbeit zusammengefaßt und bewertet. Abschließend werden einige technische Anwendungsmöglichkeiten diskutiert.

Die vorliegende Arbeit wird durch einen Anhang ergänzt, der die mathematischen Grundlagen enthält und das Verständnis der theoretischen Betrachtungen erleichtern soll.

Schreibweise: In der vorliegenden Arbeit treten eine Vielzahl von zusammengesetzten Fachwörtern auf. Um eine Anhäufung von Binde-Strich-Wörtern zu vermeiden, werden die Bindestriche in den meisten Fällen bewußt weggelassen (vgl. englischsprachiges Schrifttum). Beispiele hierfür sind: Almansi Verzerrungstensor, Cauchy Spannungstensor, Finite Elemente Methode, Green-Lagrange Tensor, Kirchhoff Spannungstensor, Penalty Funktion, Push-Forward Transformation, Q1 Element, Rechter Cauchy-Green Tensor. Da die meisten wissenschaftlichen Veröffentlichungen in englischer Sprache verfaßt sind, haben sich einige ursprünglich englische Fachbegriffe auch in der deutschen Fachsprache etabliert. Die Neuregelungen zur deutschen Rechtschreibung, die zum Stichtag 1. August 1998 eingeführt werden, sind nicht berücksichtigt.

Da bezüglich der geometrischen Beschreibung zwischen *materieller* und *räumlicher* Formulierung unterschieden wird, werden in dieser Arbeit ausschließlich Begriffe wie „Stoff“ oder „Werkstoff“ zur Beschreibung des Werkstoffverhaltens verwendet. Begriffe wie „Materialverhalten“ oder „*materielles* Verhalten“ werden vermieden.

Zur Unterscheidung von Skalaren, Vektoren, Tensoren und Matrizen wird folgende Konvention getroffen. Skalare sind in Normalschrift (*italic*) bezeichnet. Vektoren und 2-stufige Tensoren sind in Fettschrift gegeben. Die Symbole für 4-stufige Tensoren enthalten einen zusätzlichen vertikalen Strich (z.B. \mathfrak{C}). Matrizen werden in Normalschrift geschrieben und unterstrichen. Es gilt die Einsteinsche Summationskonvention.

Gleichungen, die mehrfach benötigt werden, sind an der Stelle ihres erstmaligen Auftretens mit einer in runden Klammern gesetzten Gleichungsnummer versehen. Einige Gleichungssätze, bestehend aus mehreren Einzelgleichungen, sind mit einer einzigen Gleichungsnummer gekennzeichnet. Bei Bezug auf eine darin enthaltene Einzelgleichung wird die eingeklammerte Gleichungsnummer indiziert. Der Index gibt dann die Nummer der Einzelgleichung innerhalb des Gleichungssatzes an, beginnend von oben links nach unten rechts (siehe beispielsweise \mathbf{F}^{-1} in (2.8)₃).

Der Einfachheit wegen wird bei der Darstellung nicht explizit zwischen dem Funktionswert und der Funktion selbst unterschieden. Auch bei Funktionen mit verschiedenen Möglichkeiten der Wahl der Argumente wird keine Unterscheidung getroffen. Als Beispiel kann die Darstellung (4.4) dienen. Mit dem Symbol W werden sowohl der Funktionswert, die Funktion in Abhängigkeit der Invarianten als auch die Funktion in Abhängigkeit der Wurzeln der Eigenwerte bezeichnet.

Mit dem partiellen Differentiationszeichen ∂ werden partielle Ableitungen bezeichnet. Der angehängte hochgestellte Index gibt die Ordnung der Ableitung an und der angehängte tiefgestellte Index gibt die Größe an, nach der abgeleitet wird, d.h.

$$\partial_a(\dots) = \partial_a^1(\dots) = \frac{\partial(\dots)}{\partial a} \quad , \quad \partial_{ab}^2(\dots) = \frac{\partial^2(\dots)}{\partial a \partial b} \quad \text{usw.}$$

Kapitel 2

Kontinuumsmechanische Grundlagen

In diesem Kapitel werden die Grundlagen zur Verfügung gestellt, um das Deformationsverhalten eines Körpers oder einer Struktur geometrisch beschreiben zu können. Die hierfür benötigten Deformationsmaße, deren Spektraldarstellungen sowie deren Raten werden angegeben. Ohne Beschränkung auf eine spezielle Werkstoffklasse werden die Spannungstensoren, die Spannungsraten und die Stofftensoren eingeführt. Die ausführliche Behandlung des Themas erfolgt in zahlreichen Lehrbüchern wie z.B. TRUESDELL & NOLL [1965], MALVERN [1969], BECKER & BÜRGER [1975], SPENCER [1980], BACKHAUS [1983], MARSDEN & HUGHES [1983], OGDEN [1984], STEIN & BARTHOLD [1994]. Im weiteren Verlauf dieses Kapitels wird auf weitere Angaben zum Schrifttum verzichtet.

2.1 Kinematik der Deformation

2.1.1 Deformationsabbildung

In der Kontinuumsmechanik wird die Materie durch materielle Punkte im dreidimensionalen Euklidischen Punktraum E^3 beschrieben. Ein Körper ist eine zusammenhängende Menge materieller Punkte und besetzt ein Gebiet $\mathcal{B} \subset E^3$ mit dem Rand $\partial\mathcal{B}$. Zur Beschreibung zeitlicher Vorgänge wird der Parameter Zeit t eingeführt. Die zeitliche Bewegung des Körpers wird als Deformationsabbildung φ_t verstanden, die jedem materiellen Punkt einen Ort im Raum zuordnet.

Nach Festlegung eines räumlichen Nullpunktes und eines Basissystems können die Orte der materiellen Punkte durch die Ortsvektoren $\boldsymbol{x} \in V^3$ des dreidimensionalen Vektorraumes beschrieben werden. Zu einer beliebigen Referenzzeit $t = t_0$ seien die Orte der materiellen Punkte des Körpers durch die Referenzortsvektoren \boldsymbol{X} gegeben. Jedem materiellen Punkt ist somit eindeutig ein Referenzortsvektor zugeordnet. Der

aktuelle Ortsvektor eines materiellen Punktes wird nun als Funktion des Referenzvektors

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t) = \boldsymbol{\varphi}_t(\mathbf{X}) \quad (2.1)$$

aufgefaßt. Zur Referenzzeit muß die Bedingung $\mathbf{X} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t_0)$ erfüllt sein. Die materiellen Punkte zur Referenzzeit t_0 an den Orten \mathbf{X} besetzen das Gebiet \mathcal{B}_0 mit dem Rand $\partial\mathcal{B}_0$ und definieren eine zeitlich unveränderliche Referenzkonfiguration. Die materiellen Punkte zu einer beliebigen Zeit t an den Orten \mathbf{x} besetzen das Gebiet \mathcal{B}_t mit dem Rand $\partial\mathcal{B}_t$. Sie definieren eine zeitlich veränderliche Momentankonfiguration und beschreiben somit die Bewegung des Körpers. Aus der Differenz der Ortsvektoren der Momentan- und Referenzkonfiguration ergibt sich der Verschiebungsvektor

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} \quad (2.2)$$

eines materiellen Punktes.

Es wird vorausgesetzt, daß die Abbildung $\boldsymbol{\varphi}_t$ stetig und eineindeutig ist, d.h. benachbarte materielle Punkte bleiben immer benachbart und ein materieller Punkt kann nicht gleichzeitig an mehreren Orten bzw. mehrere materielle Punkte können nicht gleichzeitig an einem Ort sein. Somit ist die Umkehrung

$$\mathbf{X} = \boldsymbol{\varphi}_t^{-1}(\mathbf{x})$$

von (2.1) möglich. Weitergehend wird vorausgesetzt, daß $\boldsymbol{\varphi}_t$ in allen Variablen beliebig oft stetig differenzierbar ist.

Wegen der Einführung zweier verschiedener Konfigurationen muß zwischen zwei entsprechenden Beschreibungsweisen unterschieden werden: der materiellen Lagrangeschen Beschreibungsweise, bezogen auf die Referenzkonfiguration, und der räumlichen Eulerschen Beschreibungsweise, bezogen auf die Momentankonfiguration. Bei der Lagrangeschen Beschreibungsweise erfolgt die Parametrisierung durch \mathbf{X} und bei der Eulerschen Beschreibungsweise durch \mathbf{x} . Eine einem materiellen Punkt zugeordnete (skalar-, vektor- oder) tensorwertige Größe kann also dargestellt werden mittels:

$$\underbrace{\mathbf{A}(\mathbf{X}, t)}_{\text{Lagrange}} = \mathbf{a}(\boldsymbol{\varphi}_t(\mathbf{X}), t) = \underbrace{\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)}_{\text{Euler}}|_{\mathbf{x}=\boldsymbol{\varphi}_t(\mathbf{X})} \quad (2.3)$$

Hierin bezeichnen die beiden Platzhalter \mathbf{A} und \mathbf{a} dieselbe Größe desselben materiellen Punktes. Der Übergang von räumlichen Koordinaten $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}_t(\mathbf{X})$ auf materielle Koordinaten \mathbf{X} und umgekehrt erfolgt analog zu (2.3) und wird unter Ausnutzung der Deformationsabbildung mittels

$$\mathbf{A} = \mathbf{a} \circ \boldsymbol{\varphi}_t \quad \text{und} \quad \mathbf{a} = \mathbf{A} \circ \boldsymbol{\varphi}_t^{-1} \quad (2.4)$$

abgekürzt. Bei der Integration von Größen über das Gebiet des Körpers, z.B. bei der schwachen Formulierung des Gleichgewichts, muß unterschieden werden, ob über das Referenzgebiet \mathcal{B}_0 oder das momentane Gebiet \mathcal{B}_t integriert wird. Im ersten Fall müssen alle zu integrierenden Größen in materiellen Koordinaten und im zweiten

Fall in räumlichen Koordinaten vorliegen. Im weiteren Verlauf dieser Arbeit wird zur Vereinfachung der Schreibweise implizit vorausgesetzt, daß alle Größen durch die jeweils geeigneten Koordinaten, d.h. durch materielle oder räumliche Koordinaten, parametrisiert sind. In den nachfolgenden Gleichungen treten deshalb explizit keine Ausdrücke (2.4) mehr auf.

Bei zeitlichen Ableitungen wird zwischen der materiellen und der lokalen Zeitableitung unterschieden. Die materielle Zeitableitung einer (skalar-, vektor- oder) tensorwertigen Größe \mathbf{A} ist definiert durch

$$\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{X}, t) = \frac{d}{dt} \mathbf{A}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(\mathbf{X}, t)$$

und gibt die zeitliche Änderung der betrachteten Größe eines materiellen Punktes an, d.h. \mathbf{X} wird bei der Ableitung festgehalten. Sie ist wesentlich bei der Beschreibung von Festkörpern (z.B. Geschwindigkeit $\dot{\mathbf{x}}$, Beschleunigung $\ddot{\mathbf{x}}$ eines materiellen Punktes als vektorielle Größen). Die lokale Zeitableitung, die überwiegend in der Fluidmechanik verwendet wird, ist die partielle Ableitung derselben Größe $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$ bei festgehaltenem Ort \mathbf{x} .

Um an späterer Stelle Verzerrungsmaße einführen zu können, die auf Abständen zwischen materiellen Punkten basieren, wird bereits an dieser Stelle eine Metrik eingeführt. Auf der Grundlage konvektiver Koordinaten $\theta_i = \theta^i$ sind die kovarianten Metrikensoren gegeben durch $\mathbf{G} = G_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j$ bezüglich der Referenzkonfiguration und $\mathbf{g} = g_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j$ bezüglich der Momentankonfiguration. Die zugehörigen konvektiven kovarianten Basisvektoren $\mathbf{G}_i = \partial_{\theta_i} \mathbf{X}$ und $\mathbf{g}_i = \partial_{\theta_i} \mathbf{x}$ besitzen die dualen kontravarianten Basisvektoren $\mathbf{G}^j = \partial_{\mathbf{X}} \theta^j$ und $\mathbf{g}^j = \partial_{\mathbf{x}} \theta^j$ mit den Orthogonalitätseigenschaften $\mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}^j = \delta_i^j$ und $\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}^j = \delta_i^j$. Die Metrikkoeffizienten berechnen sich zu $G_{ij} = \mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}_j$ und $g_{ij} = \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j$.

2.1.2 Deformationsgradient

Die Linearisierung der Deformation $\varphi_t(\mathbf{X})$ des materiellen Punktes \mathbf{X} in Richtung von $\Delta \mathbf{X}$ lautet:

$$\begin{aligned} \text{Lin}[\varphi_t(\mathbf{X})]_{\mathbf{X}, \Delta \mathbf{X}} &= \varphi_t(\mathbf{X}) + \frac{d}{d\varepsilon} [\varphi_t(\mathbf{X} + \varepsilon \Delta \mathbf{X})]_{\varepsilon=0} \\ &= \varphi_t(\mathbf{X}) + [\partial_{(\mathbf{X} + \varepsilon \Delta \mathbf{X})} \varphi_t(\mathbf{X} + \varepsilon \Delta \mathbf{X}) \cdot \partial_\varepsilon (\mathbf{X} + \varepsilon \Delta \mathbf{X})]_{\varepsilon=0} \\ &= \varphi_t(\mathbf{X}) + \partial_{\mathbf{X}} \varphi_t(\mathbf{X}) \cdot \Delta \mathbf{X} \\ &= \mathbf{x} + \Delta \mathbf{x} \quad . \end{aligned} \tag{2.5}$$

Hierin gibt der zweite Term die Änderung der Deformation in der Nachbarschaft des materiellen Punktes \mathbf{X} an. Es ist sinnvoll, den materiellen Deformationsgradienten

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_t(\mathbf{X}) = \partial_{\mathbf{X}} \varphi_t(\mathbf{X}) \tag{2.6}$$

als lineare Tangentenabbildung zu definieren, der die Tangentenvektoren $\Delta \mathbf{X}$ an der Referenzkonfiguration auf die Tangentenvektoren $\Delta \mathbf{x}$ an der Momentankonfiguration

abbildet. Beim Übergang auf infinitesimal kleine Tangentenvektoren $\Delta \mathbf{X} \rightarrow d\mathbf{X}$ in (2.5) wird die Linearisierung exakt und

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X} \quad (2.7)$$

beschreibt, wie ein infinitesimales Linienelement $d\mathbf{X}$ am Ort \mathbf{X} der Referenzkonfiguration in ein infinitesimales Linienelement $d\mathbf{x}$ am Ort \mathbf{x} der Momentankonfiguration transformiert wird. Der Deformationsgradient ist ein Zweifeldtensor, da er materielle Linienelemente auf räumliche Linienelemente abbildet.

Für den Deformationsgradienten können basierend auf den konvektiven Basisvektoren die Darstellungen

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}^i, & \mathbf{F}^T &= \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{g}_i, \\ \mathbf{F}^{-1} &= \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{g}^i, & \mathbf{F}^{-T} &= \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{G}_i \end{aligned} \quad (2.8)$$

angegeben werden. Mit deren Hilfe ist es dann später möglich, zu entscheiden, ob ein Verzerrungs- oder Spannungstensor ko- oder kontravariant ist. Die Darstellungen sind wesentlich, um das Transformationsverhalten von Tensoren bei sogenannten „Push-Forward“ und „Pull-Back“ Operationen zu beurteilen. Außerdem wird deutlich, daß der Deformationsgradient ein Zweifeldtensor ist.

Die Wahl des materiellen Linienelementes als kontravarianten Vektor $d\mathbf{X} = d\theta^i \partial_{\theta^i} \mathbf{X} = d\theta^i \mathbf{G}_i$ führt mit (2.8)₁ und (2.7) direkt auf das räumliche kontravariante Linienelement $d\mathbf{x} = d\theta^i \mathbf{g}_i$. Da die Komponenten $d\theta^i$ erhalten bleiben und nur die Basis wechselt, kann (2.7) als Push-Forward Transformation

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X} = \varphi_{t*}[d\mathbf{X}] \quad (2.9)$$

kontravarianter Vektoren aufgefaßt werden (siehe auch Anhang A.1.2).

Der Deformationsgradient ist im allgemeinen nicht symmetrisch und kann mittels der polaren Zerlegung

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{R} \quad (2.10)$$

in den eigentlich orthogonalen Rotationstensor \mathbf{R} und den Rechtsstrecktensor \mathbf{U} bzw. Linksstrecktensor \mathbf{v} multiplikativ zerlegt werden. Die beiden Strecktensoren sind symmetrisch und positiv definit. Aufgrund der Beziehung (2.7) kann die Deformation des infinitesimalen Linienelementes $d\mathbf{X}$ nach $d\mathbf{x}$ als Folge von Streckung und Drehung bzw. Drehung und Streckung aufgefaßt werden.

Basierend auf dem Deformationsgradienten lassen sich Regeln zur Abbildung infinitesimaler Flächen- und Volumenelemente von der Referenz- auf die Momentankonfiguration angeben:

$$\begin{aligned} d\mathbf{a} &= J\mathbf{F}^{-T} \cdot d\mathbf{A}, \\ dv &= JdV \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\text{mit } J = \det \mathbf{F} > 0.$$

Die Beschränkung auf positive Determinanten des Deformationsgradienten sichert dessen Invertierbarkeit und hat im Fall (2.11)₂ die anschauliche Interpretation, daß

negative Volumenelemente ausgeschlossen sind und sich der Körper nicht selbst durchdringen kann. Die skalare Größe J wird auch als Volumenverhältnis oder Dilatation bezeichnet. Die Umkehrung von (2.7) und (2.9)

$$d\mathbf{X} = \mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}_t^*[d\mathbf{x}] \quad (2.12)$$

ist somit möglich. Hierin ist $\boldsymbol{\varphi}_t^*[d\mathbf{x}]$ die Pull-Back Transformation kontravarianter Vektoren.

Zur Behandlung inkompressibler Werkstoffe wird der Deformationsgradient häufig multiplikativ in einen volumetrischen und isochoren (volumenerhaltenden) Anteil

$$\mathbf{F} = J^{\frac{1}{3}} \widehat{\mathbf{F}} \quad \text{mit} \quad \widehat{\mathbf{F}} = J^{-\frac{1}{3}} \mathbf{F} \quad (2.13)$$

aufgespalten. Diese Aufspaltung geht auf FLORY [1961] zurück und ermöglicht es, das volumetrische und das isochore Stoffverhalten entkoppelt voneinander zu beschreiben. Unter Beachtung von (2.11)₂ zeigt die Determinante $\det \mathbf{F} = J \det \widehat{\mathbf{F}} = J$ mit $\det \widehat{\mathbf{F}} = 1$, daß die gesamte Volumenänderung im Anteil $J^{1/3}$ enthalten und der Anteil $\widehat{\mathbf{F}}$ volumenerhaltend ist.

2.1.3 Verzerrungstensoren

Der in (2.6) eingeführte Deformationsgradient beinhaltet die gesamte Deformation des Körpers inklusive der Starrkörperbewegungen. Deshalb kann der Deformationsgradient nicht direkt als Verzerrungstensor verwendet werden, sondern es müssen Verzerrungstensoren, die frei von Starrkörperbewegungen sind, gefunden werden.

Als quantitatives Maß für die Verzerrung wird die Differenz

$$\delta = \frac{1}{2} (d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X})$$

der Längenquadrate eines infinitesimalen Linienelementes der Momentan- und Referenzkonfiguration eingeführt. Bei einer reinen Starrkörperbewegung ändert sich die Länge des Linienelementes nicht und es gilt $\delta = 0$. Mit Hilfe der Beziehung (2.9) und deren Umkehrung (2.12) ergibt sich das Verzerrungsmaß zu

$$\delta = d\mathbf{X} \cdot \mathbf{E} \cdot d\mathbf{X} = d\mathbf{x} \cdot \mathbf{e} \cdot d\mathbf{x} \quad (2.14)$$

Hierin sind der kovariante materielle Green-Lagrangesche Verzerrungstensor durch

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{g} \cdot \mathbf{F} - \mathbf{G}) \quad (2.15)$$

und der kovariante räumliche Almansische Verzerrungstensor durch

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2} (\mathbf{g} - \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{F}^{-1}) \quad (2.16)$$

definiert. Bei einer reinen Starrkörperbewegung mit $\delta = 0$ und der Voraussetzung nicht verschwindender Linienelemente werden die Tensoren \mathbf{E} und \mathbf{e} zu null und sind

somit als Verzerrungstensen geeignet. In Gleichung (2.14) kann die Orthogonalitätseigenschaft der dualen Basen ausgenutzt werden, da die Linienelemente als kontravariante Vektoren und die Verzerrungen als kontravariante Tensoren definiert sind.

Durch Vergleich der Definitionen des Green-Lagrangeschen Verzerrungstensors in (2.15) und des Almansischen Verzerrungstensors in (2.16) läßt sich sofort auf die Transformationen

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{F}^{-1} = \varphi_{t*}[\mathbf{E}] = \varphi_{t*}[\varphi_t^*[e]] , \\ \mathbf{E} &= \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{e} \cdot \mathbf{F} = \varphi_t^*[e] = \varphi_t^*[\varphi_{t*}[\mathbf{E}]] \end{aligned} \quad (2.17)$$

schließen. In Anlehnung an das englischsprachige Schrifttum bezeichnet man die Transformation (2.17)₁ als Push-Forward und die Transformation (2.17)₂ als Pull-Back eines kovarianten Tensors (siehe auch Anhang A.1.2).

Zur weiteren Verwendung in dieser Arbeit werden der kovariante materielle Rechte Cauchy-Green Tensor

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{g} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} = \mathbf{U}^2 \quad (2.18)$$

und der kontravariante räumliche Linke Cauchy-Green Tensor

$$\mathbf{b} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{G}^{-1} \cdot \mathbf{F}^T = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T = \mathbf{v}^2 \quad (2.19)$$

eingeführt. Beide Tensoren sind symmetrisch und positiv definit. Mit deren Hilfe ergeben sich für den Green-Lagrangeschen und den Almansischen Verzerrungstensor die einfachen Darstellungen

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{G}) \quad \text{und} \quad \mathbf{e} = \frac{1}{2} (\mathbf{g} - \mathbf{b}^{-1}) . \quad (2.20)$$

Aus den Push-Forward und Pull-Back Beziehungen (2.17) und den Darstellungen (2.20) lassen sich sofort die Push-Forward und Pull-Back Beziehungen der kovarianten Tensoren

$$\mathbf{g} = \varphi_{t*}[\mathbf{C}] , \quad \mathbf{C} = \varphi_t^*[\mathbf{g}] , \quad \mathbf{b}^{-1} = \varphi_{t*}[\mathbf{G}] , \quad \mathbf{G} = \varphi_t^*[\mathbf{b}^{-1}] \quad (2.21)$$

angeben. Die Inverse \mathbf{b}^{-1} des Linken Cauchy-Green Tensors heißt Finger Tensor.

Verwendet man in den Definitionen (2.18) und (2.19) die in (2.13) eingeführte volumetrisch-isochore Aufspaltung des Deformationsgradienten, so werden die Aufspaltungen

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= J^{\frac{2}{3}} \widehat{\mathbf{C}} \quad \text{mit} \quad \widehat{\mathbf{C}} = \widehat{\mathbf{F}}^T \cdot \mathbf{g} \cdot \widehat{\mathbf{F}} = \widehat{\mathbf{F}}^T \cdot \widehat{\mathbf{F}} = \widehat{\mathbf{U}}^2 , \\ \mathbf{b} &= J^{\frac{2}{3}} \widehat{\mathbf{b}} \quad \text{mit} \quad \widehat{\mathbf{b}} = \widehat{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{G}^{-1} \cdot \widehat{\mathbf{F}}^T = \widehat{\mathbf{F}} \cdot \widehat{\mathbf{F}}^T = \widehat{\mathbf{v}}^2 \end{aligned} \quad (2.22)$$

des Rechten und Linken Cauchy-Green Tensors in volumetrische und isochore Anteile mit $\det \widehat{\mathbf{C}} = \det \widehat{\mathbf{b}} = 1$ ermöglicht. Diese Aufspaltungen spielen eine wichtige Rolle bei der additiven Entkopplung der Verzerrungsenergiefunktion in volumetrische und isochore Terme (siehe (4.12) und (4.14)).

2.1.4 Verzerrungsraten

Neben den im vorangegangenen Abschnitt eingeführten Verzerrungstensoren sind deren zeitliche Änderungen wesentliche Größen in der nichtlinearen Kontinuumsmechanik. Die materielle Zeitableitung des Verzerrungsmaßes δ liefert für den materiellen Term in (2.14) unmittelbar

$$\dot{\delta} = d\mathbf{X} \cdot \dot{\mathbf{E}} \cdot d\mathbf{X} \quad \text{mit} \quad \dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{C}} \quad . \quad (2.23)$$

Bei der Ableitung ist zu beachten, daß das infinitesimale Linienelement $d\mathbf{X}$ und die Metrik \mathbf{G} in der Referenzkonfiguration zeitlich unveränderlich sind. Die kovariante materielle Verzerrungsrate $\dot{\mathbf{E}}$ ist die materielle zeitliche Ableitung des Green-Lagrangischen Verzerrungstensors.

Mit Hilfe der Beziehung $d\mathbf{X} = \mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{x} = d\mathbf{x} \cdot \mathbf{F}^{-T}$ ergibt sich aus (2.23) die räumliche Formulierung

$$\dot{\delta} = d\mathbf{x} \cdot \overset{\circ}{\mathbf{e}} \cdot d\mathbf{x} \quad \text{mit} \quad \overset{\circ}{\mathbf{e}} = \varphi_{t*}[\dot{\mathbf{E}}] = \varphi_{t*}\left[\frac{d}{dt} \varphi_t^*[\mathbf{e}]\right] \quad . \quad (2.24)$$

Hierin ist die kovariante räumliche Verzerrungsrate $\overset{\circ}{\mathbf{e}}$ die Oldroydsche Rate des Almansischen Tensors. Nähere Hinweise dazu finden sich unter „Lie-Ableitung“ im Anhang A.1.2. Die oben eingeführte materielle Verzerrungsrate kann auch als Pull-Back der räumlichen Verzerrungsrate geschrieben werden:

$$\dot{\mathbf{E}} = \varphi_t^*[\overset{\circ}{\mathbf{e}}] \quad . \quad (2.25)$$

Einen alternativen Zugang zur räumlichen Formulierung findet man durch Einführung des materiellen Geschwindigkeitsgradienten

$$\mathbf{L} = \partial_{\mathbf{X}} \dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{F}} \quad .$$

Daraus läßt sich der räumliche Geschwindigkeitsgradient

$$\mathbf{l} = \partial_{\mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = \varphi_{t*}[\mathbf{L}] = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1}$$

durch eine Push-Forward Transformation bestimmen (siehe auch Anhang A.1.2). Die Aufspaltung von \mathbf{l} in einen symmetrischen Anteil und einen antisymmetrischen Anteil

$$\mathbf{l} = \underbrace{\text{sym}[\mathbf{l}]}_{=\mathbf{d}} + \underbrace{\text{ant}[\mathbf{l}]}_{=\mathbf{w}}$$

liefert im Vergleich zur oben eingeführten räumlichen Verzerrungsrate die Identität

$$\overset{\circ}{\mathbf{e}} = \mathbf{d} = \text{sym}[\partial_{\mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}}] \quad (2.26)$$

der Oldroydschen Rate des Almansischen Verzerrungstensors mit dem symmetrischen Anteil des räumlichen Geschwindigkeitsgradienten. Der antisymmetrische Anteil \mathbf{w} heißt Spintensor und beschreibt die momentane Starrkörperrotation der infinitesimalen Umgebung eines materiellen Punktes.

2.1.5 Spektraldarstellungen

In diesem Abschnitt wird die Einsteinsche Summationskonvention nicht verwendet. Alle Summen sind explizit ausgeschrieben. Da bei orthonormalen Basissystemen nicht zwischen ko- und kontravarianten Komponenten und Basisvektoren unterschieden wird, erfolgt in diesem Abschnitt aus Gründen der Übersichtlichkeit die Beschränkung auf unten indizierte Größen. Diese Vereinbarungen gelten nachfolgend für alle Abschnitte, in denen Spektraldarstellungen auftreten.

Der Rechtsstrecktensor \mathbf{U} ist symmetrisch und positiv definit. Aufgrund dieser Eigenschaften besitzt er drei reelle positive Eigenwerte λ_i und drei zugeordnete reelle Eigenvektoren \mathbf{N}_i . Legt man die orthonormalen Eigenvektoren mit $\mathbf{N}_i \cdot \mathbf{N}_j = \delta_{ij}$ als Tensorbasis zugrunde, ergibt sich die eindeutige Spektralzerlegung

$$\mathbf{U} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i$$

des Rechtsstrecktensors. Bezüglich seiner Eigenvektorbasis besitzt er Diagonalgestalt. Die Eigenwerte λ_i werden Hauptstreckungen genannt und ergeben sich aus dem Verhältnis der deformierten zu den undeformierten Längen in den Hauptrichtungen. Aus der Definition des Rechten Cauchy-Greenschen Tensors (2.18) folgt

$$\mathbf{C} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i^2 \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i . \quad (2.27)$$

Der Linke und Rechte Cauchy-Green Tensor besitzen identische Grundinvarianten und somit identische Eigenwerte. Die orthonormalen Eigenvektorbasis sind jedoch verschieden. Für den Linksstrecktensor und den Linken Cauchy-Green Tensor ergeben sich deshalb die Spektraldarstellungen

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i \quad \text{und} \quad \mathbf{b} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i^2 \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i . \quad (2.28)$$

Die materiellen Tensoren \mathbf{U} , \mathbf{C} und die zugehörigen räumlichen Tensoren \mathbf{v} , \mathbf{b} unterscheiden sich in ihren Spektraldarstellungen lediglich in den Basen \mathbf{N}_i und \mathbf{n}_i nicht jedoch in den Eigenwerten λ_i bzw. λ_i^2 .

Der Deformationsgradient \mathbf{F} ist im allgemeinen nicht symmetrisch. Seine Spektraldarstellung enthält deshalb komplexe Eigenwerte und komplexe Eigenvektoren. Für den Deformationsgradienten kann aber eine reelle Singulärwertzerlegung

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{N}_i \quad \text{mit} \quad \mathbf{F}^{-1} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i^{-1} \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{n}_i \quad (2.29)$$

angegeben werden. Für den eigentlich orthogonalen Rotationstensor ergibt sich

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}^{-T} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{N}_i \quad \text{mit} \quad \mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T = \sum_{i=1}^3 \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{n}_i . \quad (2.30)$$

Die beiden Singulärwertzerlegungen (2.29) und (2.30) erfüllen die Beziehungen (2.10), (2.18) und (2.19). Wegen $\lambda_i > 0$ ist außerdem (2.11)₃ mit $J = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 > 0$ ohne zusätzliche Bedingungen gewährleistet.

Die Transformationen (2.21)₄ und (2.21)₁ der Metriktensoren der Referenz- und Momentankonfiguration liefern erwartungsgemäß die Einheitstensoren

$$\mathbf{G} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i \quad \text{und} \quad \mathbf{g} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i \quad (2.31)$$

bezüglich der materiellen und räumlichen Eigenvektorbasisen.

Aus den Definitionen (2.20) lassen sich mit Hilfe von (2.27), (2.28)₂ und (2.31) die Spektraldarstellungen des Green-Lagrangeschen und des Almansischen Verzerrungstensors

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \sum_{i=1}^3 E_i \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i \quad \text{mit} \quad E_i = \frac{1}{2}(\lambda_i^2 - 1) = \lambda_i^2 e_i \quad , \\ \mathbf{e} &= \sum_{i=1}^3 e_i \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i \quad \text{mit} \quad e_i = \frac{1}{2}(1 - \lambda_i^{-2}) = \lambda_i^{-2} E_i \end{aligned} \quad (2.32)$$

bestimmen. Es zeigt sich, daß \mathbf{E} und \mathbf{e} symmetrisch sind. Da negative Eigenwerte E_i und e_i auftreten können, sind diese Tensoren im allgemeinen nicht positiv definit. Alternativ können die Spektraldarstellung von \mathbf{E} als Pull-Back von \mathbf{e} und die Spektraldarstellung von \mathbf{e} als Push-Forward von \mathbf{E} hergeleitet werden. Bezüglich der konvektiven Basen haben Pull-Back und Push-Forward Transformationen die Eigenschaft, daß die Tensorkomponenten erhalten bleiben, während die Basis wechselt. Die Eigenschaft gleichbleibender Komponenten bei wechselnder Basis wird nach Anwendung der Transformationen (2.17) mit Hilfe von (2.29) und (2.32) deutlich:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \varphi_{t^*}^*[\mathbf{e}] = \sum_{i=1}^3 e_i (\lambda_i \mathbf{N}_i) \otimes (\lambda_i \mathbf{N}_i) \quad \text{mit} \quad \lambda_i \mathbf{N}_i = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{n}_i \quad , \\ \mathbf{e} &= \varphi_{t*}[\mathbf{E}] = \sum_{i=1}^3 E_i (\lambda_i^{-1} \mathbf{n}_i) \otimes (\lambda_i^{-1} \mathbf{n}_i) \quad \text{mit} \quad \lambda_i^{-1} \mathbf{n}_i = \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{N}_i \quad . \end{aligned} \quad (2.33)$$

Anmerkung: Aus (2.30) und (2.33) lassen sich die Beziehungen

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_i &= \mathbf{R}^{-1} \cdot \mathbf{n}_i = \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{n}_i = \lambda_i^{-1} \mathbf{F}^T \mathbf{n}_i \quad \text{und} \\ \mathbf{n}_i &= \mathbf{R} \cdot \mathbf{N}_i = \mathbf{R}^{-T} \cdot \mathbf{N}_i = \lambda_i \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{N}_i \end{aligned} \quad (2.34)$$

zwischen den materiellen und räumlichen Eigenvektoren angeben. Es ist zu beachten, daß die Eigenvektoren mit $\mathbf{N}_i = \mathbf{N}_i(\mathbf{X}, t)$ und $\mathbf{n}_i = \mathbf{n}_i(\mathbf{x}, t)$ Funktionen der Zeit sind.

Zur Herleitung der Spektraldarstellungen der materiellen Stofftensoren ist die Darstellung der materiellen Verzerrungsrate $\dot{\mathbf{E}}$ bezüglich der Eigenvektorbasis von

Interesse. Zunächst wird die materielle Zeitableitung von (2.32)₁

$$\dot{\mathbf{E}} = \sum_{i=1}^3 \dot{E}_i \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i + \sum_{i=1}^3 E_i (\dot{\mathbf{N}}_i \otimes \mathbf{N}_i + \mathbf{N}_i \otimes \dot{\mathbf{N}}_i)$$

mittels der Produktregel durchgeführt. Die materiellen Eigenvektoren $\mathbf{N}_i = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{e}_i$ ergeben sich punktweise durch die eigentlich orthogonale Drehung der kartesischen Basis \mathbf{e}_i mit $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{X}, t) \in SO(3)$. Die materielle Zeitableitung der Eigenvektoren liefert $\dot{\mathbf{N}}_i = \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{N}_i = \sum_{j=1}^3 \Omega_{ji} \mathbf{N}_j$ mit dem schiefsymmetrischen Tensor $\mathbf{\Omega} = \dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q}^T = \sum_{i,j=1}^3 \Omega_{ij} \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_j$. Schließlich erhält man

$$\dot{\mathbf{E}} = \sum_{i=1}^3 \dot{E}_i \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i + \sum_{i,j=1, i \neq j}^3 \Omega_{ij} (E_j - E_i) \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_j \quad (2.35)$$

als Darstellung der materiellen Verzerrungsrate bezogen auf die materielle Eigenvektorbasis. Die erste Summe besetzt die Diagonale und die zweite Summe die Nebendiagonalen von $\dot{\mathbf{E}}$. Die Kenntnis der Werte Ω_{ij} wird für alle folgenden Operationen nicht benötigt. Um die räumliche Oldroydsche Rate $\overset{\circ}{\mathbf{e}}$ des Almansischen Verzerrungstensors zu berechnen, muß die Push-Forward Transformation (2.24)₂ mittels (2.29) ausgeführt werden.

2.2 Spannungen

Bei nichtlinearem Werkstoffverhalten ist es im allgemeinen nicht möglich, die Spannungen als geschlossene Funktion der Verzerrungen zu berechnen. Deshalb werden in diesem Abschnitt die Spannungsmaße allgemeingültig ohne Beschränkung der Stoffeigenschaften eingeführt. Die genauere Spezifizierung der Spannungstensoren für bestimmte Werkstoffklassen wird erst in den Kapiteln 4, 5 und 6 durchgeführt. Dort werden auch deren Spektraldarstellungen angegeben.

2.2.1 Spannungstensoren

Der räumliche Spannungsvektor

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{f}_a}{da} \quad (2.36)$$

ist der auf die infinitesimale Fläche da bezogene räumliche Schnittkraftvektor $d\mathbf{f}_a$. Die Orientierung der Fläche wird durch ihre räumliche Flächennormale \mathbf{n} festgelegt. Das Cauchy Theorem

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \quad , \quad (2.37)$$

das aus der Gleichgewichtsbetrachtung am infinitesimalen räumlichen Tetraederelement folgt, ordnet über die lineare Abbildung mittels des räumlichen (wahren) Cauchyschen Spannungstensors $\boldsymbol{\sigma}$ jeder Flächennormale einen Spannungsvektor zu.

Der Cauchysche Spannungstensor ist im allgemeinen eine Funktion des Ortes \mathbf{x} und der Zeit t . Aufgrund des Cauchy Theorems ist der Spannungsvektor zusätzlich eine Funktion der Normalen \mathbf{n} und das Cauchysche Fundamentallemma — Spannungsvektoren auf Schnittflächen mit entgegengesetzten Normalen sind entgegengesetzt gleich groß — ist implizit erfüllt. Aus (2.36) und (2.37) folgt mit $d\mathbf{a} = \mathbf{n}da$ unmittelbar

$$d\mathbf{f}_a = \boldsymbol{\sigma} \cdot d\mathbf{a} \quad . \quad (2.38)$$

Der kontravariante Cauchysche Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ bildet das räumliche Flächenelement $d\mathbf{a}$ auf den kontravarianten räumlichen Schnittkraftvektor $d\mathbf{f}_a$ ab.

Unter Ausnutzung der Transformation (2.11)₁ kann (2.38) in die Darstellung

$$d\mathbf{f}_a = \mathbf{P} \cdot d\mathbf{A} \quad \text{mit} \quad \mathbf{P} = J\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T} \quad (2.39)$$

überführt werden. Der 1. Piola-Kirchhoff Spannungstensor \mathbf{P} ergibt sich aus der Analogie der Darstellungen (2.38) und (2.39)₁. Er bildet das materielle Flächenelement $d\mathbf{A} = \mathbf{N}dA$ auf den räumlichen Schnittkraftvektor $d\mathbf{f}_a$ ab und ist somit ein Zweifeldtensor. In Analogie zu den Beziehungen (2.36) und (2.37) existiert ein Spannungsvektor $\mathbf{T} = d\mathbf{f}_a/dA = \mathbf{P} \cdot \mathbf{N}$.

Um auf eine ausschließlich materielle Darstellung zu gelangen, wird der fiktive materielle Schnittkraftvektor $d\mathbf{F}_a = \mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{f}_a = \boldsymbol{\varphi}_t^*[d\mathbf{f}_a]$ eingeführt. Hierbei wird für die kontravarianten Schnittkräfte dasselbe Transformationsverhalten wie für die kontravarianten Linienelemente (2.12) zugrunde gelegt. Man erhält schließlich

$$d\mathbf{F}_a = \mathbf{S} \cdot d\mathbf{A} \quad \text{mit} \quad \mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{P} = J\mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T} \quad . \quad (2.40)$$

Der 2. Piola-Kirchhoff Spannungstensor \mathbf{S} ergibt sich aus der Analogie der Darstellungen (2.38), (2.39)₁ und (2.40)₁. Er bildet das materielle Flächenelement $d\mathbf{A}$ auf den materiellen Schnittkraftvektor $d\mathbf{F}_a$ ab. Um die Orthogonalitätseigenschaft der Basisvektoren bei der Transformation (2.40)₂ ausnutzen zu können, müssen die Spannungstensoren als kontravariante Tensoren definiert werden.

Die im Abschnitt 2.1.3 eingeführten materiellen und räumlichen kovarianten Verzerrungstensoren können durch Push-Forward und Pull-Back Transformationen ineinander überführt werden. Mit der Definition des räumlichen Kirchhoff Spannungstensors

$$\boldsymbol{\tau} = J\boldsymbol{\sigma} \quad (2.41)$$

liefert (2.40) sofort die Push-Forward und Pull-Back Transformationen

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T &= \boldsymbol{\varphi}_{t*}[\mathbf{S}] &= \boldsymbol{\varphi}_{t*}[\boldsymbol{\varphi}_t^*[\boldsymbol{\tau}]] \quad , \\ \mathbf{S} &= \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{F}^{-T} &= \boldsymbol{\varphi}_t^*[\boldsymbol{\tau}] &= \boldsymbol{\varphi}_t^*[\boldsymbol{\varphi}_{t*}[\mathbf{S}]] \end{aligned} \quad (2.42)$$

der kontravarianten Spannungstensoren.

Im Vorgriff auf Abschnitt 3.2.3 sei bereits hier auf die Symmetrieeigenschaft der Spannungstensoren

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T \quad , \quad \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}^T \quad , \quad \mathbf{S} = \mathbf{S}^T$$

hingewiesen. Der 1. Piola-Kirchhoff Spannungstensor

$$\mathbf{P} \neq \mathbf{P}^T .$$

ist hingegen nicht symmetrisch

Für den Cauchyschen Spannungstensor (und analog für den Kirchhoffschen Spannungstensor) kann die additive Aufspaltung

$$\boldsymbol{\sigma} = \text{dev}\boldsymbol{\sigma} + p \mathbf{g}^{-1} \quad \text{mit} \quad p = \frac{1}{3} \text{tr}\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{3} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{g} \quad \text{und} \quad \text{dev}\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma} - p \mathbf{g}^{-1} \quad (2.43)$$

in einen deviatorischen Anteil und einen hydrostatischen Anteil angegeben werden. Die volumetrische Spannung p entspricht dem arithmetischen Mittel der Normalspannungen. Bei Voraussetzung hyperelastischen Stoffverhaltens mit additiv entkoppelter Verzerrungsenergiefunktion in isochore und volumetrische Anteile ergibt sich diese Aufspaltung direkt durch Auswertung der Standardberechnungsvorschrift (vgl. (4.33) in Abschnitt 4.1.2). Bei der Formulierung von Fließbedingungen für druckunabhängiges plastisches Werkstoffverhalten ist die Aufspaltung (2.43) ebenfalls grundlegend.

2.2.2 Spannungsraten

Der 2. Piola-Kirchhoff Spannungstensor ist ein materieller Tensor bezogen auf die Referenzkonfiguration. Bei Verwendung einer zeitlich unveränderlichen Basis (z.B. $\mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j$) ergibt sich die materielle Zeitableitung $\dot{\mathbf{S}}$ durch alleinige Anwendung der materiellen Zeitableitung auf die Tensorkomponenten. Analog zur Anwendung der Lie-Ableitung auf die räumliche Verzerrungsrate (2.24)₁ wird hier der räumliche Oldroydsche Spannungsfluß

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}} = \varphi_{t*}[\dot{\mathbf{S}}] = \varphi_{t*}\left[\frac{d}{dt} \varphi_t^*[\boldsymbol{\tau}]\right] \quad (2.44)$$

eingeführt. Umgekehrt gilt

$$\dot{\mathbf{S}} = \varphi_t^*[\overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}] . \quad (2.45)$$

Oldroydsche Verzerrungs- und Spannungsraten sind bei der räumlichen Formulierung von vierstufigen Stofftensoren erforderlich.

2.3 Stofftensoren

An dieser Stelle werden der materielle und der räumliche Stofftensor allgemeingültig eingeführt. Hierbei wird unterschieden zwischen den kontinuierlichen Stofftensoren, die Spannungs- mit Verzerrungsraten verknüpfen, und den inkrementellen Stofftensoren, die als Folge der Linearisierung des Stoffgesetzes Spannungs- mit Verzerrungsinkrementen verknüpfen. Die Stofftensoren sind kontravariant. Es erfolgt keine Beschränkung auf eine bestimmte Werkstoffklasse.

2.3.1 Kontinuierliche Stofftensoren

Der vierstufige kontinuierliche materielle Stofftensor \mathbb{C} bezüglich der Referenzkonfiguration wird durch

$$\dot{\mathbf{S}} = \mathbb{C} : \frac{1}{2} \dot{\mathbf{C}} = \mathbb{C} : \dot{\mathbf{E}} \quad \text{mit} \quad \mathbb{C} = 2\partial_{\mathbf{C}}\mathbf{S} = \partial_{\mathbf{E}}\mathbf{S} \quad (2.46)$$

definiert. Er verknüpft die materielle Verzerrungsrate $\dot{\mathbf{E}}$ aus Abschnitt 2.1.4 mit der materiellen Zeitableitung $\dot{\mathbf{S}}$ des 2. Piola-Kirchhoff Spannungstensors aus Abschnitt 2.2.2. Der Übergang auf die räumliche Formulierung erfolgt durch Einsetzen der Transformationen (2.25) und (2.45) in (2.46). Die Auflösung nach $\overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}$ und Umformung der rechten Seite ergibt

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}} = \boldsymbol{\epsilon} : \overset{\circ}{\mathbf{e}} \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{\epsilon} = \varphi_{t*}[\mathbb{C}] \quad . \quad (2.47)$$

Der vierstufige kontinuierliche räumliche Stofftensor $\boldsymbol{\epsilon}$ bezüglich der Momentanconfiguration geht durch eine Push-Forward Transformation aus dem kontinuierlichen materiellen Stofftensor \mathbb{C} hervor. Umgekehrt gilt die Pull-Back Transformation $\mathbb{C} = \varphi_t^*[\boldsymbol{\epsilon}]$ (siehe auch Anhang A.1.2).

2.3.2 Inkrementelle Stofftensoren

Im Rahmen einer numerischen Behandlung nichtlinearer Problemstellungen (z.B. mittels der Methode der Finiten Elemente) ist ein linearisiertes inkrementelles Vorgehen mit endlicher Zeitschrittweite Δt_{n+1} notwendig. Anstelle der Raten $\dot{\mathbf{E}}$, $\dot{\mathbf{S}}$ des kontinuierlichen Falls aus Abschnitt 2.3.1 treten dann Inkremente $\Delta\mathbf{E}_{n+1}$, $\Delta\mathbf{S}_{n+1}$ auf. Der inkrementelle materielle Stofftensor \mathbb{C}_{n+1} ist durch

$$\Delta\mathbf{S}_{n+1} = \mathbb{C}_{n+1} : \frac{1}{2} \Delta\mathbf{C}_{n+1} = \mathbb{C}_{n+1} : \Delta\mathbf{E}_{n+1} \quad (2.48)$$

gegeben. Mit den Definitionen

$$\Delta\mathbf{E}_{n+1} = \varphi_{n+1}^*[\Delta\mathbf{e}_{n+1}] \quad \text{und} \quad \Delta\mathbf{S}_{n+1} = \varphi_{n+1}^*[\Delta\boldsymbol{\tau}_{n+1}]$$

(vergleiche (2.25) und (2.45)) ergibt sich

$$\Delta\boldsymbol{\tau}_{n+1} = \boldsymbol{\epsilon}_{n+1} : \Delta\mathbf{e}_{n+1} \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{\epsilon}_{n+1} = \varphi_{n+1*}[\mathbb{C}_{n+1}] \quad . \quad (2.49)$$

Der inkrementelle räumliche Stofftensor $\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}$ folgt aus der Push-Forward Transformation des inkrementellen materiellen Stofftensors \mathbb{C}_{n+1} . Umgekehrt gilt $\mathbb{C}_{n+1} = \varphi_{n+1}^*[\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}]$. Die inkrementellen Stofftensoren ergeben sich aus der Linearisierung des Stoffgesetzes. Das Inkrement des Almansischen Verzerrungstensors

$$\Delta\mathbf{e} = \text{sym}[\partial_{\mathbf{x}}\Delta\mathbf{x}]$$

wird bei der räumlichen Finite Element Formulierung benötigt und berechnet sich in Analogie zur Oldroydschen Rate (2.26).

Bei der Linearisierung der räumlichen Form des Gleichgewichtes, wie sie in Abschnitt 7.1.1 durchgeführt wird, ist die Verwendung der Definition

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^* : \Delta\boldsymbol{e}_{n+1} \quad \text{mit} \quad \Delta\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = J_{n+1}^{-1}\Delta\boldsymbol{\tau}_{n+1} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}^* = J_{n+1}^{-1}\boldsymbol{\epsilon}_{n+1} \quad (2.50)$$

vorteilhaft. Hierbei ist zu beachten, daß die Beziehung (2.50)₂ zwischen den Inkrementen $\Delta\boldsymbol{\sigma}$ und $\Delta\boldsymbol{\tau}$ des Cauchyschen und Kirchhoffschen Spannungstensors nicht aus (2.41) folgt, sondern per Definition eingeführt wird. Das heißt, die hier verwendete Beziehung zwischen den Spannungsinkrementen folgt nicht aus $\Delta\boldsymbol{\tau} = \Delta(J\boldsymbol{\sigma}) = \Delta J\boldsymbol{\sigma} + J\Delta\boldsymbol{\sigma}$.

Kapitel 3

Bilanzgleichungen und Thermodynamik

In diesem Kapitel werden die Grundlagen behandelt, die zur Formulierung der Gleichgewichtsbedingungen und der thermodynamisch konsistenten Werkstoffgesetze benötigt werden. Nach einer kurzen Einführung werden die Bilanzgleichungen angegeben. Bei der Formulierung des 1. und des 2. Hauptsatzes der Thermodynamik werden die Existenz der inneren Energie und der Entropie als thermodynamische Zustandsfunktionen vorausgesetzt. Auf der Basis dieser Zustandsfunktionen wird die Definition der Energiedichtefunktion motiviert. Zur Beschreibung dissipativer Prozesse, wie sie in der Plastizitätstheorie auftreten, wird die Dissipationsleistung eingeführt. Als grundlegende Lehrbücher zu diesem Thema seien TRUESDELL & NOLL [1965], MALVERN [1969], FALK & RUPPEL [1976] und TRUESDELL [1984] zitiert.

3.1 Energieformen und Prozesse

Bei der Beschreibung von Energieformen kann die Regel

$$dE = \mathbf{q} \cdot d\xi \tag{3.1}$$

angegeben werden (siehe FALK & RUPPEL [1976]). Die Änderung einer extensiven Größe ξ bewirkt in Verknüpfung mit einer zugeordneten intensiven Größe \mathbf{q} den Austausch von Energie E einer bestimmten Form. Die Größe hinter dem Differentialzeichen heißt dabei extensive Größe. Die Größe, die als Faktor vor das Differentialzeichen tritt, heißt intensive Größe. Da zur Charakterisierung einer bestimmten Energieform eine intensive und eine extensive Größe einander zugeordnet sind, heißen diese beiden Größen energetisch konjugiert. Die intensive Größe und die extensive Größe sind nicht vertauschbar. Konjugierte extensive und intensive Größen können tensor-, vektor- oder skalarwertigen Charakter haben. Es gilt folgende Vorzeichenkonvention: zugeführte Energien sind positiv und abgeführte Energien sind negativ. Die Regel (3.1) ist allgemeingültig und besitzt axiomatischen Charakter.

Beispiele für (3.1) aus dem Bereich der klassischen Mechanik sind: die Verschiebungsenergie $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ mit Kraft mal Weginkrement, die Verdrehungsenergie $\mathbf{M} \cdot d\boldsymbol{\varphi}$ mit Moment mal Winkelinkrement, die Kompressionsenergie $-p dV$ mit Druck mal Volumenänderung oder die translatorische Bewegungsenergie $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{P}$ mit Geschwindigkeit mal Impulsänderung.

Die Energieform Wärme als Grundvoraussetzung zur Formulierung des 2. Hauptsatzes der Thermodynamik soll an dieser Stelle kurz erläutert werden. Der Austausch von Wärmeenergie $dE_{\text{Wärme}} = T dS$ ist durch die absolute Temperatur $T > 0$ als intensive Größe und die Entropie S als extensive Größe gegeben. Historisch gesehen wurde die Entropie von Rudolf Clausius basierend auf dem allgemeingültigen Axiom (3.1) als energetisch konjugierte Größe zur bereits bekannten thermischen Größe „Temperatur“ eingeführt. Die Temperatur tritt dabei als intensive Größe auf, da sie keinen mengenartigen Charakter hat, d.h. zwei Systeme gleicher Temperatur besitzen zusammengesetzt wieder die gleiche Temperatur und nicht die doppelte.

Ein Gleichgewichtszustand eines Systems ist dadurch charakterisiert, daß er bei festen äußeren Systemparametern seinen Zustand nicht ändert (siehe z.B. LUBLINER [1990]). Die klassische Thermodynamik beschäftigt sich mit der Untersuchung von Gleichgewichtszuständen (Gleichgewichtsthermodynamik). Bei einem Prozeß werden dabei nur Anfangs- und Endzustand betrachtet und sichergestellt, daß der Prozeß den beiden Hauptsätzen genügt. Die beiden Hauptsätze sind dabei in der zeitfreien Gibbsschen Fundamentalform angegeben, d.h. alle ein System beschreibenden Energieformen besitzen die zeitfreie Form (3.1). Überführt man mittels $(\cdot)' = d(\cdot)/dt$ die beiden Hauptsätze in eine Formulierung in Raten bzw. Energieströmen, was analog zu (3.1) der Darstellung

$$\dot{E} = \mathbf{q} \cdot \dot{\boldsymbol{\xi}} \quad (3.2)$$

entspricht, so wird der thermodynamische Prozeß in seinem Zeitablauf erfaßt. Man postuliert somit, daß nicht nur der Anfangs- und Endzustand Gleichgewichtszustände sind, sondern der ganze Prozeß, jetzt in Abhängigkeit der Zeit, aus einer Abfolge von Gleichgewichtszuständen besteht. Geht ein System nach Änderung der äußeren Parameter von einem Gleichgewichtszustand in einen anderen Gleichgewichtszustand über, so müssen jedoch alle Zwischenzustände Nichtgleichgewichtszustände sein, da sonst der Prozeß nicht bis zum Ende ablaufen würde. Die Anwendung der Gesetze der Gleichgewichtsthermodynamik (1. und 2. Hauptsatz) auf die Nichtgleichgewichtsthermodynamik ist eine Idealisierung. Diese Idealisierung ist für „nicht zu schnell“ ablaufende Prozesse gerechtfertigt, d.h. die Nichtgleichgewichtszustände befinden sich in der „Nachbarschaft“ zu Gleichgewichtszuständen (MAUGIN [1992], S. 278). Setzt man das Prinzip des lokalen Zustandes voraus, d.h. die thermodynamischen Gesetze gelten lokal für jeden infinitesimal kleinen materiellen Punkt, so gelangt man zur rationalen Thermodynamik oder zur irreversiblen Thermodynamik. Die rationale Thermodynamik basiert im wesentlichen auf der Arbeit von COLEMAN & NOLL [1963] (siehe auch TRUESDELL [1984], LUBLINER [1990], S. 62). Hierbei wirkt die Clausius-Duhem Ungleichung als Restriktion auf die Werkstoffgesetze. Die irreversible Thermodynamik geht auf ONSAGER [1931a,b] zurück (siehe auch KAMMER & SCHWABE [1985]). Hier wird ein Term für die Entropieproduktion explizit angenommen. Die Unterschiede

zwischen der rationalen und der irreversiblen Thermodynamik werden beispielsweise in PERZYNA [1971] oder MIEHE [1988] diskutiert. Eine Abhandlung über die lokale Anwendbarkeit der Gesetze der Gleichgewichtsthermodynamik ist in KESTIN [1992] zu finden.

3.2 Bilanzgleichungen

3.2.1 Massenerhaltung

Bei den Standardproblemstellungen der Festkörpermechanik bleibt die Gesamtmasse eines Körpers erhalten. Mit der Dichte $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$ bezogen auf ein räumliches Volumenelement dv und der Dichte $\rho_0 = \rho_0(\mathbf{X})$ bezogen auf ein materielles Volumenelement dV gilt für die Gesamtmasse

$$m = \int_{\mathcal{B}_t} \rho dv = \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 dV = \text{konst} \quad \text{mit} \quad \rho_0 = J\rho \quad .$$

Die Bildung der materiellen Zeitableitung $\dot{m} = 0$ der Gesamtmasse und die Betrachtung beliebiger Teilbereiche des Körpers führt mit der Beziehung $\dot{J} = J \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}}$ auf die lokale räumliche und materielle Form

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}} = 0 \quad \text{und} \quad \dot{\rho}_0 = 0$$

der Massenerhaltung.

3.2.2 Impulserhaltung

Die Anwendung des Newtonschen Axioms „Trägheitskraft gleich Summe aller angreifenden Kräfte“ ist äquivalent zu der Aussage, daß für einen Körper die materielle Zeitableitung des Impulses gleich der Summe aller angreifenden (Volumen- und Oberflächen-) Kräfte ist:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}_t} \rho \dot{\mathbf{x}} dv = \int_{\mathcal{B}_t} \rho \mathbf{b}_0 dv + \int_{\partial \mathcal{B}_t} \mathbf{t} da \quad . \quad (3.3)$$

Hierin ist \mathbf{b}_0 eine massenspezifische Kraft (z.B. massenbezogene Gewichtskraft). Die Anwendung des Divergenztheorems auf das hintere Integral und die Betrachtung beliebiger Teilbereiche des Körpers führt auf die lokalen Formen

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b}_0 = \rho \ddot{\mathbf{x}} \quad \text{und} \quad \operatorname{Div} \mathbf{P} + \rho_0 \mathbf{b}_0 = \rho_0 \ddot{\mathbf{x}} \quad (3.4)$$

der Impulserhaltung. Die beiden lokalen Formen werden auch räumliche und materielle Form der 1. Cauchyschen Bewegungsgleichung genannt.

Anmerkung: Hier und im folgenden sind für die globalen, d.h. für den gesamten Körper aufgestellten Gleichungen immer die räumlichen Formulierungen angegeben. Die lokalen Gleichungen werden sowohl in räumlicher als auch in materieller Formulierung angeschrieben.

3.2.3 Drehimpulserhaltung

Analog zur Impulserhaltung ist die Erhaltung des Drehimpulses zu fordern. Dies entspricht dem Axiom „Trägheitsmoment gleich Summe aller angreifenden Momente“. Wichtet man die in der Impulserhaltung (3.3) auftretenden Kräfte mittels ihres Hebelarmes bezüglich eines beliebig wählbaren Momentenbezugs punktes (hier Koordinatenursprung gewählt), so ergibt sich die räumliche Bilanzgleichung

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}_t} \rho \mathbf{x} \times \dot{\mathbf{x}} dv = \int_{\mathcal{B}_t} \rho \mathbf{x} \times \mathbf{b}_0 dv + \int_{\partial \mathcal{B}_t} \mathbf{x} \times \mathbf{t} da$$

der Drehimpulserhaltung. Die Anwendung des Divergenztheorems und die Betrachtung beliebiger Teilbereiche des Körpers führt auf die lokalen Formen

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \boldsymbol{\sigma} \quad \text{und} \quad \mathbf{P} \cdot \mathbf{F}^T = \mathbf{F} \cdot \mathbf{P}^T, \quad (3.5)$$

die auch als räumliche und materielle Form der 2. Cauchy'schen Bewegungsgleichung bezeichnet werden.

In der vorliegenden Arbeit werden ausschließlich klassische Kontinua betrachtet, d.h. die Existenz von Volumenmomenten, Oberflächenmomenten und einer Eigendrehung der materiellen Punkte wird — im Gegensatz zum Cosserat-Kontinuum — nicht berücksichtigt.

3.2.4 Energieerhaltung

Die Gesamtenergie eines Systems ist im Sinne der Newtonschen Mechanik additiv in zwei entkoppelte Anteile zerlegbar: die innere Energie und die kinetische Energie. Die Energiebilanzgleichung

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}_t} \rho \left(e + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} \right) dv = \int_{\mathcal{B}_t} \rho (\mathbf{b}_0 \cdot \dot{\mathbf{x}} + r) dv + \int_{\partial \mathcal{B}_t} (\mathbf{t} \cdot \dot{\mathbf{x}} - \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}) da \quad (3.6)$$

für den gesamten Körper besagt, daß die zeitliche Änderung der Gesamtenergie gleich der Summe der gesamten am Körper erbrachten Leistung ist. In der rechten Seite von (3.6) sind einschränken derweise nur mechanische und thermische Leistungsanteile aufgeführt. Es sind e die massenspezifische innere Energie, r die massenspezifische Wärmezufuhr und \mathbf{q} der räumliche Wärmezufußvektor. Da \mathbf{n} die äußere Flächennormale ist, entspricht $-\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}$ der nach innen gerichteten Wärmefußdichte und bewirkt somit eine Zufuhr an Wärme. Die Energieerhaltung (3.6) ist äquivalent zum 1. Hauptsatz der Thermodynamik. Durch den 1. Hauptsatz wird die innere Energie als thermodynamische Zustandsfunktion eingeführt.

Die lokale räumliche Formulierung

$$\rho \dot{e} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} + \rho r - \operatorname{div} \mathbf{q} \quad (3.7)$$

erhält man durch Anwendung des Divergenztheorems, der lokalen räumlichen Impulsbilanz (3.4)₁ und der Betrachtung beliebiger Teilbereiche des Körpers. Die lokale materielle Form der Energieerhaltung lautet

$$\rho_0 \dot{e} = \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} + \rho_0 r - \text{Div} \mathbf{Q} . \quad (3.8)$$

Hierin ist \mathbf{Q} der materielle Wärmezuflußvektor mit $\mathbf{Q} = J \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{q}$ aus $\mathbf{q} \cdot d\mathbf{a} = \mathbf{Q} \cdot d\mathbf{A}$ und (2.11)₁.

In den lokalen Formen (3.7) und (3.8) der Energieerhaltung treten die Terme $\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d}$ und $\mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}}$ als spezifische Spannungsleistungen bezogen auf das räumliche und materielle Volumen auf. Formuliert man die spezifische Spannungsleistung bezüglich des Referenzvolumens, so können folgende äquivalente Leistungsausdrücke hergeleitet werden:

$$\mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} = \boldsymbol{\tau} : \mathbf{d} = \boldsymbol{\tau} : \mathbf{l} = \boldsymbol{\sigma} : (J\mathbf{d}) = \boldsymbol{\sigma} : (J\mathbf{l}) = \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} . \quad (3.9)$$

Im Sinne von (3.2) sind also die 2. Piola-Kirchhoff Spannungen mit den Green-Lagrangeschen Verzerrungen und die 1. Piola-Kirchhoff Spannungen mit dem Deformationsgradienten energetisch konjugiert. Dabei sind die Spannungen die intensiven Größen. Die kinematischen Größen sind die extensiven Größen. Es sei darauf hingewiesen, daß nicht in jedem Fall einem Spannungstensor ein energetisch konjugierter Verzerrungstensor zugeordnet werden kann (siehe z.B. Cauchy oder Kirchhoff Spannungen). Auf die Angabe weiterer energetisch konjugierter Spannungs- und Verzerrungsmaße wird an dieser Stelle verzichtet (siehe z.B. MACVEAN [1968], OGDEN [1984], Abschnitt 3.5.2).

3.2.5 Entropieungleichung

Im Gegensatz zu den Größen Masse, Impuls, Drehimpuls und Energie ist die Entropie keine Erhaltungsgröße. Dieser Sachverhalt soll zunächst an einem einfachen Beispiel verdeutlicht werden (siehe FALK & RUPPEL [1976]):

Betrachtet wird ausschließlich die Energieform Wärme als stationärer Wärmestrom $\dot{E} = T\dot{S}$ durch eine Wand mit den konstanten Oberflächentemperaturen $T_1 > T_2$. Wegen des Energieerhaltungssatzes ist der Wärmestrom in der gesamten Wand konstant, d.h. $T\dot{S} = T_1\dot{S}_1 = T_2\dot{S}_2$, und wegen $T_1 > T_2$ gilt $\dot{S}_1 < \dot{S}_2$. Da der Entropiestrom \dot{S}_2 aus der Wand größer ist als der Entropiestrom \dot{S}_1 in die Wand, muß in der Wand Entropie erzeugt werden. Die Entropie ist folglich keine Erhaltungsgröße.

Das Postulat

$$\dot{S}_{\text{erzeugt}} \geq 0 \quad (3.10)$$

nach positiver Entropieerzeugung (vergleiche obiges Beispiel) legt die Prozeßrichtung fest: „Wärme fließt immer von einem höheren Temperaturniveau in Richtung eines niedrigeren Temperaturniveaus“. Die Möglichkeit der Entropievernichtung muß ausgeschlossen werden, da sonst Wärme umgekehrt vom kälteren zum wärmeren Temperaturniveau fließen könnte, was aufgrund der physikalischen Erfahrung nicht möglich

ist. Das Postulat (3.10) ist wesentlich bei der Beschreibung nicht umkehrbarer irreversibler Prozesse.

Formal kann die Änderung der Entropie

$$\dot{S} = \dot{S}_{\text{ausgetauscht}} + \dot{S}_{\text{erzeugt}}$$

in zwei Anteile, welche den Entropieaustausch mit der Umgebung und die Entropieerzeugung beinhalten, aufgespalten werden. Die Ausnutzung der Prozeßrichtung (3.10) führt auf die Ungleichung

$$\dot{S} \geq \dot{S}_{\text{ausgetauscht}} \quad .$$

Diese Ungleichung wird auch als 2. Hauptsatz der Thermodynamik bezeichnet. Für reversible Prozesse gilt das Gleichzeichen (=) und für irreversible Prozesse das Größerzeichen (>). Durch den 2. Hauptsatz wird die Entropie als thermodynamische Zustandsfunktion eingeführt. Mit Hilfe der massenspezifischen Entropie s erhält man für den gesamten Körper die globale Entropieungleichung (integrale Form der Clausius-Duhem Ungleichung):

$$\dot{S} = \frac{d}{dt} S = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}_t} s \rho \, dv \geq \int_{\mathcal{B}_t} T^{-1} r \rho \, dv - \int_{\partial \mathcal{B}_t} T^{-1} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \, da \quad .$$

Die Integrale auf der rechten Seite der Ungleichung ergeben sich wegen $\dot{E} = T\dot{S}$ direkt aus den thermischen Austauschtermen der Energiebilanzgleichung (3.6) dividiert durch die absolute Temperatur $T > 0$. Die Anwendung des Divergenztheorems und die Betrachtung beliebiger Teilbereiche des Körpers führt auf die lokale räumliche und materielle Formulierung

$$\dot{s} \geq T^{-1} r - \rho^{-1} \operatorname{div}(T^{-1} \mathbf{q}) \quad \text{und} \quad \dot{s} \geq T^{-1} r - \rho_0^{-1} \operatorname{Div}(T^{-1} \mathbf{Q}) \quad (3.11)$$

der Clausius-Duhem Ungleichung. Die lokalen Formulierungen implizieren die im Vergleich zu (3.10) schärfere Forderung $\dot{s}_{\text{erzeugt}} \geq 0$. Die Entropieproduktion muß also in jedem materiellen Punkt eines Körpers positiv sein und nicht nur für den gesamten Körper.

3.3 Freie Helmholtz Energie

Durch den 1. und 2. Hauptsatz der Thermodynamik (siehe Abschnitte 3.2.4 und 3.2.5) sind die spezifische innere Energie e und die spezifische Entropie s als thermodynamische Zustandsfunktionen eingeführt worden. Diese Zustandsfunktionen sind Funktionen von Zustandsgrößen. Die Zustandsgrößen müssen voneinander unabhängig sein und derart gewählt werden, daß das „innere“ Systemverhalten vollständig beschreibbar ist. Beschränkt man sich auf Probleme aus dem Bereich der Festkörpermechanik, so wird durch die Zustandsfunktionen und Zustandsgrößen das Werkstoffverhalten beschrieben.

Es ist zweckmäßig, extensive Größen als Zustandsgrößen zu wählen, da dann die innere Energie ein totales Differential der Form (3.1) besitzt. Als thermische Zustandsgröße wird die Entropie s verwendet, die gleichzeitig Zustandsfunktion ist. Weitere, zunächst nicht näher spezifizierte, extensive Größen werden in einem Vektor $\boldsymbol{\xi}$ angeordnet. Man erhält somit

$$e = e(s, \boldsymbol{\xi}) \quad \text{und} \quad de(s, \boldsymbol{\xi}) = \partial_s e(s, \boldsymbol{\xi}) ds + \partial_{\boldsymbol{\xi}} e(s, \boldsymbol{\xi}) \cdot d\boldsymbol{\xi} .$$

Zwischen der absoluten Temperatur und der inneren Energie besteht die Beziehung $T = \partial_s e(s, \boldsymbol{\xi})$ (siehe COLEMAN & NOLL [1963], (5.2)). Die Durchführung einer Legendreschen Transformation liefert mit Hilfe der Definition der freien spezifischen Helmholtz Energie

$$\psi = e - sT \tag{3.12}$$

die differentielle Beziehung

$$d\psi = -s dT + \partial_{\boldsymbol{\xi}} e(s, \boldsymbol{\xi}) \cdot d\boldsymbol{\xi} . \tag{3.13}$$

Hieraus ist zunächst ersichtlich, daß die Helmholtz Energie ein totales Differential besitzt und eine Funktion von T und $\boldsymbol{\xi}$ ist. Bildet man das totale Differential

$$d\psi(T, \boldsymbol{\xi}) = \partial_T \psi(T, \boldsymbol{\xi}) dT + \partial_{\boldsymbol{\xi}} \psi(T, \boldsymbol{\xi}) \cdot d\boldsymbol{\xi}$$

erhält man durch Vergleich mit (3.13) die Beziehungen

$$s(T, \boldsymbol{\xi}) = -\partial_T \psi(T, \boldsymbol{\xi}) \quad \text{und} \quad \partial_{\boldsymbol{\xi}} \psi(T, \boldsymbol{\xi}) = \partial_{\boldsymbol{\xi}} e(s, \boldsymbol{\xi}) \tag{3.14}$$

(siehe auch COLEMAN & GURTIN [1967], (5.12)). Die Helmholtz Energie (3.12) ersetzt die innere Energie als Zustandsfunktion. Die Verwendung der Helmholtz Energie hat den entscheidenden Vorteil, daß die Entropie s als Zustandsfunktion direkt durch Ableitung der Helmholtz Energie ψ nach der Temperatur folgt. Es genügt somit die Vorgabe einer einzelnen Zustandsfunktion $\psi(T, \boldsymbol{\xi})$ anstatt zweier Zustandsfunktionen für e und s . Außerdem ist die Größe „Temperatur“ anschaulicher und leichter meßbar als die Größe „Entropie“.

Die Helmholtz Energie ist eine massenspezifische Zustandsfunktion. Da in der Festkörpermechanik die volumenspezifische Spannungsleistung (siehe Abschnitt 3.2.4) eine wesentliche Rolle spielt, ist es üblich die Energiedichtefunktion

$$W = \rho_0 \psi \tag{3.15}$$

als spezifische, auf das Referenzvolumen bezogene Zustandsfunktion einzuführen. Es sei angemerkt, daß ρ_0 aufgrund der Massenerhaltung unveränderlich ist. Durch die Energiedichtefunktion W wird das Werkstoffverhalten beschrieben.

Die innere Energie e als Funktion der extensiven Variablen $\boldsymbol{\xi}$ ist Gibbsfunktion des Systems „Festkörper“. Die energetisch konjugierten intensiven Größen erhält man durch partielle Ableitung der Gibbsfunktion nach den zugehörigen extensiven Variablen (FALK & RUPPEL [1976]). Aufgrund der Beziehung (3.14)₂ können die

intensiven Größen ebenso durch Ableitung der Helmholtz Energie ψ nach den extensiven Variablen gewonnen werden. Mit (3.15) erhält man

$$\mathbf{q} = \partial_{\boldsymbol{\xi}} W(T, \boldsymbol{\xi}) \quad (3.16)$$

als Berechnungsvorschrift der intensiven Größen \mathbf{q} . Hierbei ist zu beachten, daß $\mathbf{q} \cdot d\boldsymbol{\xi}$ einen volumenspezifischen Energieausdruck ergibt. Die kinetische Energie spielt, da sie additiv von der inneren Energie entkoppelt ist, für die Überlegungen dieses Absatzes keine Rolle. Korrekterweise wäre die Gesamtenergie bestehend aus innerer und kinetischer Energie Gibbsfunktion des Systems.

3.4 Dissipationsleistung

Bei irreversiblen Vorgängen wird Entropie erzeugt. Die Menge der erzeugten Entropie ist ein Maß für die dissipierte Energie. Der Regel (3.1) folgend kann man die dissipierte Energiemenge allgemein definieren zu $dE_{\text{diss}} = T dS_{\text{erzeugt}}$. Die während eines irreversiblen Prozesses insgesamt in einem Körper dissipierte Energie ergibt sich damit zu

$$E_{\text{diss,gesamt}} = \int_t \int_{\mathcal{B}_t} \rho T \dot{s}_{\text{erzeugt}} dv dt = \int_t \int_{\mathcal{B}_0} \rho_0 T \dot{s}_{\text{erzeugt}} dV dt .$$

Der Integrand des Integrals über das Referenzvolumen

$$\mathcal{D} = \rho_0 T \dot{s}_{\text{erzeugt}} \quad (3.17)$$

wird als volumenspezifische Dissipationsleistung bezeichnet.

Unter Berücksichtigung der Herleitung der lokalen Form der Clausius-Duhem Ungleichung (3.11)₁ kann

$$\dot{s}_{\text{erzeugt}} = \dot{s} - T^{-1}r + \rho^{-1} \text{div}(T^{-1}\mathbf{q}) \geq 0$$

als Rate der spezifische Entropieerzeugung identifiziert werden (siehe auch COLEMAN & NOLL [1963], COLEMAN & GURTIN [1967]). Eingesetzt in (3.17) und unter Verwendung der Energiebilanzgleichung (3.7) erhält man die Form

$$\mathcal{D} = \boldsymbol{\tau} : \mathbf{d} - \rho_0 (\dot{\psi} + s\dot{T}) - \rho_0 (\rho T)^{-1} \mathbf{q} \cdot \text{grad}T \geq 0 .$$

Beschränkt man sich auf isotherme Problemstellungen mit $T(\mathbf{x}, t) = \text{konstant}$, ergibt sich mit der Energiedichtefunktion (3.15) die spezifische Dissipationsleistung

$$\mathcal{D}_{\text{isotherm}} = \boldsymbol{\tau} : \mathbf{d} - \dot{W} = \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} - \dot{W} \geq 0 . \quad (3.18)$$

Hierin ist die Gleichheit $\boldsymbol{\tau} : \mathbf{d} = \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}}$ der spezifischen Spannungsleistung berücksichtigt (siehe (3.9) in Abschnitt 3.2.4). Die Dissipationsleistung (3.18) kann mechanisch interpretiert werden als Differenz aus gesamter Spannungsleistung und zeitlicher Änderung der Energiedichte. Sie wurde für isotherme Problemstellungen ohne weitere Spezifizierung auf der Basis der Bilanzgleichungen und der Existenz einer Energiedichtefunktion hergeleitet. Die spezifische Dissipationsleistung (3.18) ist deshalb uneingeschränkt gültig für alle in dieser Arbeit behandelten Werkstoffklassen (isotherme Elastizität, Elastoplastizität, Elastoviskoplastizität).

Kapitel 4

Elastizität

Elastische Deformationen zeichnen sich durch vollkommene Reversibilität aus. Man spricht deshalb auch von konservativem Werkstoffverhalten. Jedem Deformationszustand ist eine elastische Verzerrungsenergie (Formänderungsenergie) zugeordnet, die nur vom Deformationszustand selbst abhängt und unabhängig von der Deformationsgeschichte ist. Kreisprozesse, bei denen die Enddeformation identisch mit der Anfangsdeformation ist, führen immer auf dieselbe Verzerrungsenergie. Elastische Werkstoffe, die auf einer Verzerrungsenergiefunktion basieren, heißen hyperelastische oder Green-elastische Werkstoffe. Zur korrekten Beschreibung großer elastischer Deformationen muß hyperelastisches Werkstoffverhalten vorausgesetzt werden.

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels wird unter Voraussetzung von materieller Objektivität und Isotropie hergeleitet, von welchen Deformationsgrößen die Verzerrungsenergiefunktion W abhängen darf. Insbesondere wird auf die Darstellung in den Hauptstreckungen eingegangen. Im wesentlichen wird unterschieden zwischen kompressiblen, inkompressiblen, nahezu inkompressiblen und isochor-volumetrisch entkoppelten kompressiblen Werkstoffen. Für diese Werkstoffgruppen werden einschränkende Bedingungen angegeben, denen die Verzerrungsenergiefunktion genügen muß. Abschließend werden einige ausgewählte Verzerrungsenergiefunktionen diskutiert. Der Schwerpunkt des zweiten Abschnitts liegt auf der Entwicklung volumetrischer Verzerrungsenergiefunktionen. Der dritte Abschnitt behandelt dann die Spannungsberechnung. Ausgehend von den allgemeinen materiellen und räumlichen Darstellungen der Spannungstensoren wird auf deren Spektraldarstellungen übergegangen. Basierend auf der isochor-volumetrisch entkoppelten kompressiblen Verzerrungsenergiefunktion erfolgt die deviatorisch-volumetrische Zerlegung der Spannungstensoren. Im Hinblick auf die Linearisierung des nichtlinearen Werkstoffverhaltens werden im vierten Abschnitt die elastischen Stofftensoren hergeleitet. Deren Spektraldarstellungen werden bezüglich der materiellen und räumlichen Formulierung angegeben. In Analogie zu den Spannungstensoren wird für die Stofftensoren ebenfalls die deviatorisch-volumetrische Zerlegung durchgeführt. Im fünften Abschnitt wird ein

Algorithmus vorgestellt, der es auf einfache Weise erlaubt, den Spannungs- und Stofftensor entweder für die materielle oder für die räumliche Formulierung zu berechnen. Dadurch können dieselben Werkstoffalgorithmen (d.h. Unterprogramme) unabhängig von der gewählten Formulierung verwendet werden.

Um einen Einblick in den Themenbereich der Numerik isotroper Elastizität bei großen Deformationen zu geben, sind nachfolgend einige Hinweise zum aktuellen Schrifttum aufgeführt. In der Arbeit von SIMO & TAYLOR [1991] wird eine geschlossene Darstellung für eine Formulierung in Eigenwerten angegeben und deren Implementierung in ein gemischtes Finites Element beschrieben. Der Bericht von SCHELLEKENS & PARISCH [1994a] basiert im wesentlichen auf dieser Arbeit. Von den Autoren VAN DEN BOGERT, DE BORST, LUITEN & ZEILMAKER [1991] wird eine alternative gemischte Finite Element Formulierung verwendet. In SALEEB, CHANG & ARNOLD [1992] werden für den materiellen Spannungs- und Stofftensor geschlossene Darstellungen in einer Eigenwertformulierung vorgestellt. Die Arbeiten von LIU, HOFSTETTER & MANG [1992,1994] behandeln für isochor-volumetrisch entkoppeltes Stoffverhalten neben einer gemischten Finiten Element Formulierung die Anwendung der selektiv reduzierten Integration der volumetrischen Anteile. Die Vorgehensweise von REESE [1994] erfordert im Gegensatz zu den geschlossenen Darstellungen von SIMO & TAYLOR [1991] und SALEEB, CHANG & ARNOLD [1992] eine explizite Berechnung der Eigenvektorbasis (vgl. Abschnitte 4.3.2 und 4.4.2). In der Veröffentlichung von MIEHE [1994] wird konsequent eine räumliche Darstellung hergeleitet und in Eigenwerten formuliert. Der Schwerpunkt der Veröffentlichung liegt auf der isochor-volumetrischen Entkopplung des Spannungs- und des Stofftensors. Die Autoren KALISKE & ROTHERT [1997] leiten unter der Voraussetzung isochor-volumetrisch entkoppelten Stoffverhaltens effiziente Berechnungsvorschriften für den räumlichen Spannungs- und Stofftensor her. Dabei wird eine Darstellung in Invarianten zugrunde gelegt. Abschließend sei das aktuelle Lehrbuch von CRISFIELD [1997] genannt, welches der numerischen Behandlung der Hyperelastizität ein gesondertes Kapitel widmet.

In der vorliegenden Arbeit werden ausschließlich Stoffgesetze für den dreidimensionalen Fall behandelt. Deshalb wird an dieser Stelle auf Hinweise zur Implementierung hyperelastischer Stoffgesetze in sogenannte degenerierte Schalenelemente verzichtet. Vielmehr wird auf die Referenzen in den oben genannten Arbeiten verwiesen. Dort sind ebenfalls Hinweise zum Schrifttum vorangegangener Jahre enthalten.

Es sei angemerkt, daß der bei der zeitunabhängigen Formulierung der Elastizität auftretende Parameter t die Rolle eines Kurvenparameters übernimmt. Er dient lediglich zur Steuerung der Lastgeschichte und darf nicht mit der tatsächlichen Zeit, wie sie bei der Formulierung zeitabhängiger Werkstoffgesetze auftritt, verwechselt werden.

4.1 Verzerrungsenergiefunktion

4.1.1 Darstellungen der Verzerrungsenergiefunktion

Es wird angenommen, daß die Energiedichtefunktion (3.15) eine Funktion des Deformationsgradienten

$$W = W(\mathbf{F}) \quad (4.1)$$

ist. Das Prinzip der materiellen Objektivität fordert, daß alle Beobachter unabhängig vom eigenen Bewegungszustand dieselbe Energiedichte messen. Diese Forderung lautet in der mathematischen Formulierung

$$W(\mathbf{F}) = W(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{F}) \quad \text{mit } \mathbf{Q} \in SO(3)$$

und erzwingt die Abhängigkeit

$$W = W(\mathbf{C}) = W(\mathbf{U}) \quad (4.2)$$

Beschränkt man sich auf isotropes Werkstoffverhalten mit identischem Werkstoffverhalten in allen Richtungen, so muß

$$W(\mathbf{C}) = W(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{Q}^T) \quad \text{mit } \mathbf{Q} \in SO(3)$$

erfüllt sein. Die Energiedichte muß also unabhängig von einer beliebigen eigentlich orthogonalen Drehung des Rechten Cauchy-Green Tensors sein. Dies ist nur gewährleistet, wenn W von den drei Grundinvarianten von \mathbf{C} abhängt. Da die drei Grundinvarianten

$$\begin{aligned} I_{\mathbf{C}} &= \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \quad , \\ II_{\mathbf{C}} &= \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2 \quad , \\ III_{\mathbf{C}} &= \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 = J^2 \end{aligned} \quad (4.3)$$

eindeutig durch die drei Eigenwerte darstellbar sind, kann die Energiedichte ebenfalls als Funktion der Eigenwerte λ_i^2 von \mathbf{C} geschrieben werden. Unter Ausnutzung der Tatsache, daß sowohl die Grundinvarianten als auch die Eigenwerte des Rechten und Linken Cauchy-Green Tensors identisch sind, ergibt sich schließlich:

$$W = W(I_{\mathbf{C}}, II_{\mathbf{C}}, III_{\mathbf{C}}) = W(I_{\mathbf{b}}, II_{\mathbf{b}}, III_{\mathbf{b}}) = W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \quad (4.4)$$

Analog zu (4.2) kann unter Voraussetzung isotropen Stoffverhaltens die Energiedichte als Funktion

$$W = W(\mathbf{b}) = W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \quad \text{bzw.} \quad W = W(\mathbf{b}) = W(I_{\mathbf{b}}, II_{\mathbf{b}}, III_{\mathbf{b}}) \quad (4.5)$$

aufgefaßt werden, wobei $W(\mathbf{b})$ im folgenden ausschließlich eine Abhängigkeit von den Hauptstreckungen λ_i bzw. eine Abhängigkeit von den Invarianten impliziert. Im Fall der Elastizität, wo die Energiedichte eine Funktion von Verzerrungsmaßen ist, hat sich für W der Begriff Verzerrungsenergiefunktion bzw. Verzerrungsenergiedichtefunktion etabliert.

Die Vorteile der Formulierung $(4.5)_1$ in Hauptstreckungen sind:

- Die Verzerrungsenergiefunktion von Ogden (siehe (4.38)), die aufgrund ihrer exzellenten Anpassungsmöglichkeiten an experimentelle Daten eine herausragende Stellung einnimmt, ist in Hauptstreckungen formuliert.
- Die Valanis-Landel Hypothese (siehe VALANIS & LANDEL [1967]) postuliert für inkompressible Werkstoffe die Separation

$$W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = w(\lambda_1) + w(\lambda_2) + w(\lambda_3) \quad . \quad (4.6)$$

Sie ist für Hauptstreckungen bis $\lambda \approx 2.5$ experimentell bestätigt (siehe OBA-TA, KAWABATA & KAWAI [1970] und OGDEN [1982] mit dort angegebenen Referenzen). Theoretisch wird (4.6) durch die Feststellung untermauert, daß für inkompressible Werkstoffe die Taylorentwicklung von W um den natürlichen Zustand $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ bis zur fünften Ordnung in den Hauptstreckungen separierbar ist (siehe OGDEN [1974]).

- Alle in Abhängigkeit von Invarianten gegebenen Verzerrungsenergiefunktionen können einfach mittels (4.3) in die Darstellung in Hauptstreckungen überführt werden. Der umgekehrte Weg, Verzerrungsenergiefunktionen formuliert in Hauptstreckungen in die Invariantendarstellung umzurechnen, liefert im allgemeinen unhandliche Ausdrücke. In RIVLIN & SAWYERS [1976] und MORMAN [1986] ist der funktionale Zusammenhang $\lambda_i = \lambda_i(I_b, II_b, III_b)$ beispielhaft gegeben.
- Zur Berechnung der Komponenten in den Spektraldarstellungen der Spannungs- und Stofftensoren (siehe Abschnitte 4.3.2 und 4.4.2) ist lediglich die Differentiation von W nach den skalaren Hauptstreckungen λ_i durchzuführen. Die mathematisch schwierigere Differentiation nach Tensoren (siehe Abschnitte 4.3.1 und 4.4.1) entfällt.
- Die Hauptstreckungen λ_i sind anschauliche Größen. Auf der Grundlage von $(4.5)_1$ können die in Abschnitt 4.1.2 aufgestellten Bedingungen einfach überprüft werden.

Als Hauptnachteil der Formulierung in Hauptstreckungen soll jedoch nicht verschwiegen werden, daß das Verfahren wegen der erforderlichen Spektralzerlegung in der numerischen Umsetzung (z.B. Methode der Finiten Elemente) bezüglich der Zahl der Operationen aufwendig wird.

Um die Verzerrungsenergiefunktion weiter zu spezifizieren, werden im folgenden verschiedene Darstellungen diskutiert.

Kompressible Werkstoffe: Die Verzerrungsenergiefunktion

$$W_{\text{komp}} = W(I_b, II_b, III_b) \quad (4.7)$$

ist von allen drei Invarianten des Linken Cauchy-Green Tensors abhängig. Die drei Invarianten sind unabhängig voneinander. Äquivalent dazu ist die Darstellung

$$W_{\text{komp}} = W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \quad (4.8)$$

in den drei unabhängigen Hauptstreckungen.

Inkompressible Werkstoffe: Bei der Beschränkung auf Volumenerhaltung entfällt wegen (2.11)₂ und $III_b = J^2 = 1$ die Abhängigkeit von der dritten Invariante:

$$W_{\text{inkomp}} = W(I_b, II_b) \quad (4.9)$$

Mit der Beziehung $\lambda_3 = \lambda_1^{-1} \lambda_2^{-1}$ (bzw. deren Permutationen) ist die Abhängigkeit der Verzerrungsenergiefunktion von zwei der drei Hauptstreckungen ausreichend (siehe z.B. OGDEN [1982]):

$$W_{\text{inkomp}} = W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 = \lambda_1^{-1} \lambda_2^{-1}) \quad (4.10)$$

Nahezu inkompressible Werkstoffe: Wenn man in (4.9), (4.10) nachträglich additiv den volumetrischen Anteil ψ , (J) einführt, gelangt man zu den Darstellungen

$$\begin{aligned} W_{\sim\text{inkomp}} &= W_{\text{inkomp}}(I_b, II_b) + \psi(J) \quad \text{und} \\ W_{\sim\text{inkomp}} &= W_{\text{inkomp}}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) + \psi(J) \end{aligned} \quad (4.11)$$

für nahezu inkompressibles Werkstoffverhalten ($J \approx 1$). Dabei wird angenommen, daß sich das Stoffverhalten nur unwesentlich vom inkompressiblen Fall unterscheidet und deshalb die Verzerrungsenergiefunktion des inkompressiblen Falls übernommen werden kann. Die Erweiterung ψ , (J) kann als Penalty Term angesehen werden, der einen Penalty Parameter multipliziert mit einer Penalty Funktion enthält und somit die Inkompressibilitätsbedingung näherungsweise erzwingt, sofern große Werte für den Penalty Parameter gewählt werden (siehe auch Anhang A.2.2). Die Darstellung (4.11) kann auch als Sonderfall der allgemeinen Darstellungen (4.7) und (4.8) interpretiert werden, welcher auf der Annahme beruht, daß der von der dritten Invarianten $III_b = J^2$ abhängige Anteil additiv entkoppelt werden darf. Prinzipiell ist (4.11) nicht auf den nahezu inkompressiblen Fall beschränkt, wird aber in der vorliegenden Arbeit unter diesem Fall referiert.

Kompressible Werkstoffe mit isochor-volumetrisch entkoppelten Anteilen:

In Anlehnung an (4.11) wird die vollständige Entkopplung der Verzerrungsenergiefunktion in einen isochoren Anteil \widehat{W} und einen volumetrischen Anteil U angenommen. Die isochore Energiefunktion \widehat{W} beschreibt den Anteil des Stoffverhaltens, der

ausschließlich volumenerhaltend ist, während der Anteil U ausschließlich das volumetrische Stoffverhalten beschreibt. Die Grundlage der entkoppelten Energiefunktion bildet die Aufspaltung des Linken Cauchy-Green Tensors (2.22)₃ in einen isochoren Anteil $\widehat{\mathbf{b}}$ und in einen volumetrischen Anteil $J^{2/3}$. Da materielle Objektivität und Isotropie vorausgesetzt sind, ist der isochore Anteil \widehat{W} damit eine Funktion der Grundinvarianten des isochoren Tensors $\widehat{\mathbf{b}}$. Der volumetrische Anteil U ist abhängig von der Dilatation J . Die Verzerrungsenergiefunktion erhält schließlich die entkoppelte Gestalt

$$W_{\text{entk}} = \widehat{W}(I_{\widehat{\mathbf{b}}}, II_{\widehat{\mathbf{b}}}) + U(J) \quad (4.12)$$

mit

$$\begin{aligned} I_{\widehat{\mathbf{b}}} &= \widehat{\lambda}_1^2 + \widehat{\lambda}_2^2 + \widehat{\lambda}_3^2 &= J^{-\frac{2}{3}} I_{\mathbf{b}} &, \\ II_{\widehat{\mathbf{b}}} &= \widehat{\lambda}_1^2 \widehat{\lambda}_2^2 + \widehat{\lambda}_2^2 \widehat{\lambda}_3^2 + \widehat{\lambda}_3^2 \widehat{\lambda}_1^2 &= J^{-\frac{4}{3}} II_{\mathbf{b}} &, \\ III_{\widehat{\mathbf{b}}} &= \widehat{\lambda}_1^2 \widehat{\lambda}_2^2 \widehat{\lambda}_3^2 &= J^{-2} III_{\mathbf{b}} \equiv 1 &. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Hierin sind $\widehat{\lambda}_i = J^{-1/3} \lambda_i > 0$ die isochoren Hauptstreckungen, die direkt aus (2.22)₃ und der Spektralzerlegung (2.28)₂ folgen. Aus der Beziehung (4.13)₃ ist direkt ersichtlich, daß die isochoren Hauptstreckungen keinen volumetrischen Deformationsanteil beinhalten. Die Darstellung der Energiefunktion in Hauptstreckungen lautet

$$W_{\text{entk}} = \widehat{W}(\widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2, \widehat{\lambda}_3 = \widehat{\lambda}_1^{-1} \widehat{\lambda}_2^{-1}) + U(J) . \quad (4.14)$$

Setzt man für \widehat{W} die inkompressible Verzerrungsenergiefunktion W_{inkomp} , so kann mit $U(J)$ als Penalty Term der inkompressible Grenzfall angenähert werden. Abschließend sei angemerkt, daß (4.12) und (4.14) natürlich Sonderfälle von (4.7) und (4.8) sind.

4.1.2 Eigenschaften der Verzerrungsenergiefunktion

Um sicherzustellen, daß die Verzerrungsenergiefunktion mechanisch konsistent gewählt wird, muß sie bestimmte Einschränkungen erfüllen. Für weitere Hintergründe zu dieser Thematik wird unter anderen auf OGDEN [1982], MARSDEN & HUGHES [1983], OGDEN [1984] oder CIARLET [1988] verwiesen. In diesem Abschnitt werden die einschränkenden Bedingungen angegeben. Die Motivation der Bedingungen erfolgt zunächst für kompressible Werkstoffe. Dann erfolgt die Beschreibung der Bedingungen für inkompressible und nahezu inkompressible Werkstoffe sowie für kompressible Werkstoffe mit isochor-volumetrisch entkoppelten Anteilen. Hierbei wird insbesondere auf die Unterschiede eingegangen, die sich aus den verschiedenen Darstellungen der Verzerrungsenergiefunktion ergeben.

Kompressible Werkstoffe: Die Bedingung isotropen Stoffverhaltens impliziert, daß die Eigenwerte λ_i (mit $i = 1, 2, 3$), welche den drei orthogonalen Eigenrichtungen zugeordnet sind, beliebig in (4.5)₁ permutiert werden dürfen. Es folgt

$$W(\lambda_i, \lambda_j, \lambda_k) = W(\lambda_l, \lambda_m, \lambda_n) \quad \text{für } i \neq j \neq k \neq i \quad \text{und } l \neq m \neq n \neq l . \quad (4.15)$$

Aufgrund der Isotropie sind für identische Hauptstreckungen ebenfalls die Ableitungen nach den Hauptstreckungen identisch:

$$\begin{aligned} \partial_{\lambda_i} W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \Big|_{\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3} &= \partial_{\lambda_k} W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \Big|_{\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3} , \\ \partial_{\lambda_i \lambda_i}^2 W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \Big|_{\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3} &= \partial_{\lambda_j \lambda_j}^2 W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \Big|_{\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3} , \\ \partial_{\lambda_i \lambda_j}^2 W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \Big|_{\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3} &= \partial_{\lambda_k \lambda_l}^2 W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \Big|_{\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3} \quad \text{für } i \neq j, k \neq l. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Sonderfälle davon sind die Bedingungen (4.19) und (4.22).

Im verzerrungsfreien Zustand mit $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ und $\mathbf{e} = \mathbf{0}$ müssen die Eigenwerte E_i und e_i des Green-Lagrangeschen und Almansischen Verzerrungstensors zu null werden. Aus (2.32) ergibt sich mit $\lambda_i > 0$ die Bedingung $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Im verzerrungsfreien Zustand ist keine Verzerrungsenergie gespeichert und

$$W(\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 1) = 0 \quad (4.17)$$

muß identisch verschwinden. Setzt man voraus, daß der verzerrungsfreie Zustand gleichzeitig der spannungsfreie Zustand ist, so müssen die Cauchyschen Hauptspannungen

$$\sigma_i = J^{-1} \lambda_i \partial_{\lambda_i} W \quad (4.18)$$

(siehe (2.41) und (4.52)₂) zu null werden. Diese Voraussetzung ist mit der Bedingung

$$\partial_{\lambda_i} W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \Big|_{\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1} = 0 \quad (4.19)$$

verknüpft.

Liegen mit $\lambda_i \neq 1$ Verzerrungen vor, so muß die Verzerrungsenergie sowohl für Stauchung ($0 < \lambda_i < 1$) als auch für Dehnung ($\lambda_i > 1$) positiv sein:

$$W(\lambda_1 \neq 1, \lambda_2 \neq 1, \lambda_3 \neq 1) > 0 . \quad (4.20)$$

Es ist also unabhängig vom Vorzeichen der Verzerrungen immer Energie aufzuwenden, um einen verzerrten Zustand zu erreichen.

Für kleine Verzerrungen mit $\lambda_i \rightarrow 1$ muß W in die St.-Venant-Kirchhoffsche Verzerrungsenergiefunktion (siehe (4.37))

$$W(\lambda_1 \rightarrow 1, \lambda_2 \rightarrow 1, \lambda_3 \rightarrow 1) \rightarrow W_{\text{SVK}} \quad (4.21)$$

übergehen, d.h. in der Nähe des verzerrungsfreien Zustandes existiert ein linearer Zusammenhang zwischen den 2. Piola-Kirchhoff Spannungen und den Green-Lagrangeschen Verzerrungen. Mit den Laméschen Konstanten Λ und μ (Schubmodul) gilt dann

$$\partial_{\lambda_i \lambda_j}^2 W \Big|_{\lambda_1 \rightarrow 1, \lambda_2 \rightarrow 1, \lambda_3 \rightarrow 1} = \partial_{\lambda_j \lambda_i}^2 \Big|_{\lambda_1 \rightarrow 1, \lambda_2 \rightarrow 1, \lambda_3 \rightarrow 1} \rightarrow \Lambda + 2\mu \delta_{ij} . \quad (4.22)$$

Für den Grenzfall, daß das Kontinuum mit $\lambda_i \rightarrow +0$, $J \rightarrow +0$ auf einen Punkt gestaucht wird, ist zu fordern, daß die Verzerrungsenergie

$$W(\lambda_1 \rightarrow +0, \lambda_2 \rightarrow +0, \lambda_3 \rightarrow +0) \rightarrow +\infty \quad (4.23)$$

den Wert Unendlich annimmt und die Cauchyschen Hauptspannungen (4.18) negativ unendlich werden (Druckspannungen mit $\sigma_i \rightarrow -\infty$). Daraus resultiert

$$\partial_{\lambda_i} W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \Big|_{\lambda_1 \rightarrow +0, \lambda_2 \rightarrow +0, \lambda_3 \rightarrow +0} \rightarrow -\infty \quad (4.24)$$

mit der Nebenbedingung, daß $\partial_{\lambda_i} W$ Terme von kleinerer als quadratischer Ordnung in den Hauptstreckungen enthält.

Der umgekehrte Fall eines unendlich gedehnten Kontinuums mit $\lambda_i \rightarrow +\infty$, $J \rightarrow +\infty$ erzwingt

$$W(\lambda_1 \rightarrow +\infty, \lambda_2 \rightarrow +\infty, \lambda_3 \rightarrow +\infty) \rightarrow +\infty \quad (4.25)$$

Die Forderung nach positiv unendlichen Cauchyschen Hauptspannungen (4.18), d.h. Zugspannungen $\sigma_i \rightarrow +\infty$, ist dabei mit der Bedingung

$$\partial_{\lambda_i} W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \Big|_{\lambda_1 \rightarrow +\infty, \lambda_2 \rightarrow +\infty, \lambda_3 \rightarrow +\infty} \rightarrow +\infty \quad (4.26)$$

verknüpft. Als Nebenbedingung tritt dabei auf, daß $\partial_{\lambda_i} W$ Terme von höherer als quadratischer Ordnung in den Hauptstreckungen enthält.

Aus Gründen der Übersichtlichkeit wurde in den rechten Seiten einiger der oben angeführten Bedingungen auf die Angabe von Einheiten verzichtet.

Inkompressible Werkstoffe: Zunächst soll an einem Beispiel der wesentliche Unterschied zum kompressiblen Fall aufgezeigt werden: Ein Würfel aus inkompressiblem Werkstoff wird allseitig durch einen positiven hydrostatischen Druck p belastet. Aufgrund der Volumenerhaltung deformiert sich der Würfel nicht und es gilt $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Die Spannungsrandbedingung an der Würfeloberfläche fordert, daß sich im Würfelinneren ein homogener Druckspannungszustand mit $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -p$ einstellt. Dies führt auf einen Widerspruch zu (4.18) kombiniert mit (4.19) und verdeutlicht, daß für inkompressible Verzerrungsenergiefunktionen gesonderte Bedingungen aufgestellt werden müssen.

Die Berechnungsvorschrift (4.18) für die Cauchyschen Hauptspannungen muß, wie das obige Beispiel zeigt, durch einen zusätzlichen unbestimmten hydrostatischen Druck zu

$$\sigma_i = \lambda_i \partial_{\lambda_i} W - p \quad (4.27)$$

erweitert werden. Dabei gilt $J = 1$. Die Herleitung von (4.27) erfolgt durch Berücksichtigung der Zwangsbedingung $J = 1$ in der Spannungsleistung. Der Druck p hat dabei die Funktion eines Lagrangeschen Multiplikators. Genauere Einzelheiten sind in OGDEN [1984], Abschnitte 4.2.7 und 4.3.3 zu finden.

Die Bedingungen (4.15), (4.16) und (4.17) gelten analog für den inkompressiblen Fall. Wegen $\lambda_3 = \lambda_1^{-1}\lambda_2^{-1}$ sind identische Hauptstreckungen nur möglich, wenn $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ gilt und (4.16) muß weiter eingeschränkt werden zu

$$\begin{aligned} \partial_{\lambda_i} W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \Big|_{\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1} &= \partial_{\lambda_k} W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \Big|_{\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1} , \\ \partial_{\lambda_i \lambda_i}^2 W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \Big|_{\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1} &= \partial_{\lambda_j \lambda_j}^2 W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \Big|_{\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1} , \\ \partial_{\lambda_i \lambda_j}^2 W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \Big|_{\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1} &= \partial_{\lambda_k \lambda_l}^2 W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \Big|_{\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1} \quad \text{für } i \neq j, k \neq l. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Die Bedingung (4.20) ist zu ersetzen durch

$$W(\lambda_1 \neq 1, \lambda_2 \neq 1, \lambda_3 = \lambda_1^{-1}\lambda_2^{-1}) > 0 . \quad (4.29)$$

Für kleine Verzerrungen muß W analog zu (4.21) in die St.-Venant-Kirchhoffsche Verzerrungsenergiefunktion übergehen. Wegen der Inkompressibilität wird der Kompressionsmodul $K = \Lambda + 2\mu/3$ dabei unendlich groß und (4.22) wird unbestimmt. Unter Ausnutzung der Eigenschaften des Kroneckersymbols kann der unbestimmte Kompressionsmodul durch Addition eliminiert werden und man erhält unter Berücksichtigung von (4.27) den Grenzfall

$$[\partial_{\lambda_i \lambda_i}^2 W - \partial_{\lambda_i \lambda_j}^2 W + \partial_{\lambda_i} W]_{\lambda_1 \rightarrow 1, \lambda_2 \rightarrow 1, \lambda_3 = \lambda_1^{-1}\lambda_2^{-1}} \rightarrow 2\mu \quad \text{für } i \neq j . \quad (4.30)$$

Die Grenzfälle (4.23)–(4.26) sind für den inkompressiblen Fall unzulässig. Für den Grenzfall, daß das Kontinuum mit $\lambda_1 \rightarrow +0$, $\lambda_2 \rightarrow +0$ und $\lambda_3 = \lambda_1^{-1}\lambda_2^{-1}$ zu einer unendlich langen Linie degeneriert, ist zu fordern, daß die Verzerrungsenergiefunktion einen unendlich großen Wert annimmt und die Druckspannungen senkrecht zur Linie negativ unendlich werden. Ein mit $\lambda_1 \rightarrow +\infty$, $\lambda_2 \rightarrow +\infty$ und $\lambda_3 = \lambda_1^{-1}\lambda_2^{-1}$ zur Fläche degeneriertes Kontinuum impliziert den Wert Unendlich für die Verzerrungsenergiefunktion und unendlich große Zugspannungen in der Fläche.

Aufgrund numerischer Aspekte werden in der vorliegenden Arbeit keine ideal inkompressiblen Verzerrungsenergiefunktionen verwendet. Die weiteren Ausführungen setzen kompressibles Werkstoffverhalten voraus.

Nahezu inkompressible Werkstoffe: Die Funktionen (4.11) müssen analog zum kompressiblen Fall die Bedingungen (4.15)–(4.26) erfüllen. Die Vorschrift (4.18) zur Berechnung der Cauchyschen Hauptspannungen kann aufgrund der zugelassenen Kompressibilität direkt vom kompressiblen Fall übernommen werden. Es ergibt sich

$$\sigma_i = J^{-1} \lambda_i \partial_{\lambda_i} W_{\text{incomp}} + \partial J, \quad . \quad (4.31)$$

Der Vergleich mit (4.27) zeigt, daß der zweite Spannungsterm die Eigenschaft eines zusätzlichen hydrostatischen Druckes besitzt. Der zusätzliche hydrostatische Druck ist

im inkompressiblen Fall unbestimmt. Im Gegensatz dazu ist der zusätzliche hydrostatische Druck im nahezu inkompressiblen Fall bestimmt durch $\partial_J \cdot$. Spannungsterme, wie z.B. ∂_{λ_i} , die ausschließlich Funktionen von J sind, wirken immer richtungsunabhängig, d.h. hydrostatisch. Spannungsterme, die einzelne an Richtungen gebundene Hauptstreckungen enthalten, wirken hingegen richtungsabhängig.

Kompressible Werkstoffe mit isochor-volumetrisch entkoppelten Anteilen:

Für die Anteile \widehat{W} und U der Verzerrungsenergiefunktion (4.14) können in Analogie zu (4.15)–(4.26) ebenfalls mechanisch konsistente Einschränkungen aufgestellt werden:

<ol style="list-style-type: none"> 1. $\widehat{W}(\widehat{\lambda}_i, \widehat{\lambda}_j, \widehat{\lambda}_k) = \widehat{W}(\widehat{\lambda}_l, \widehat{\lambda}_m, \widehat{\lambda}_n)$ für $i \neq j \neq k \neq i$ und $l \neq m \neq n \neq l$, $U(\lambda_i \lambda_j \lambda_k) = U(\lambda_l \lambda_m \lambda_n)$ dabei immer erfüllt , vgl. (4.15) 2. $\partial_{\widehat{\lambda}_i} \widehat{W}(\widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2, \widehat{\lambda}_3) \Big _{\widehat{\lambda}_m=1} = \partial_{\widehat{\lambda}_k} \widehat{W}(\widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2, \widehat{\lambda}_3) \Big _{\widehat{\lambda}_m=1}$, $\partial_{\widehat{\lambda}_i \widehat{\lambda}_j}^2 \widehat{W}(\widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2, \widehat{\lambda}_3) \Big _{\widehat{\lambda}_m=1} = \partial_{\widehat{\lambda}_j \widehat{\lambda}_i}^2 \widehat{W}(\widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2, \widehat{\lambda}_3) \Big _{\widehat{\lambda}_m=1}$, $\partial_{\widehat{\lambda}_i \widehat{\lambda}_j}^2 \widehat{W} \Big _{\widehat{\lambda}_m=1} = \partial_{\widehat{\lambda}_k \widehat{\lambda}_l}^2 \widehat{W} \Big _{\widehat{\lambda}_m=1}$ für $i \neq j, k \neq l$, vgl. (4.16) 3. $\widehat{W}(\widehat{\lambda}_1 = 1, \widehat{\lambda}_2 = 1, \widehat{\lambda}_3 = 1) = 0$, $U(J = 1) = 0$, vgl. (4.17) 4. keine Aussage für $\partial_{\widehat{\lambda}_i} \widehat{W}$, $\partial_J U _{J=1} = 0$, vgl. (4.19) . (4.32) 5. $\widehat{W}(\widehat{\lambda}_1 \neq 1, \widehat{\lambda}_2 \neq 1, \widehat{\lambda}_3 = \widehat{\lambda}_1^{-1} \widehat{\lambda}_2^{-1}) > 0$, $U(J \neq 1) > 0$, vgl. (4.20) 6. $\widehat{W}(\widehat{\lambda}_1 \rightarrow 1, \widehat{\lambda}_2 \rightarrow 1, \widehat{\lambda}_3 = \widehat{\lambda}_1^{-1} \widehat{\lambda}_2^{-1}) + U(J \rightarrow 1) \rightarrow W_{\text{SVK}}$, vgl. (4.21) 7. $[\partial_{\widehat{\lambda}_i \widehat{\lambda}_i}^2 \widehat{W} - \partial_{\widehat{\lambda}_i \widehat{\lambda}_j}^2 \widehat{W} + \partial_{\widehat{\lambda}_i} \widehat{W}]_{\widehat{\lambda}_1 \rightarrow 1, \widehat{\lambda}_2 \rightarrow 1, \widehat{\lambda}_3 = \widehat{\lambda}_1^{-1} \widehat{\lambda}_2^{-1}} \rightarrow 2\mu$ für $i \neq j$, $\partial_{JJ}^2 U _{J \rightarrow 1} \rightarrow K$, vgl. (4.22) 8. keine Aussage für \widehat{W} , $U(J \rightarrow +0) \rightarrow +\infty$, vgl. (4.23) 9. keine Aussage für $\partial_{\widehat{\lambda}_i} \widehat{W}$, $\partial_J U _{J \rightarrow +0} \rightarrow -\infty$, vgl. (4.24) 10. keine Aussage für \widehat{W} , $U(J \rightarrow +\infty) \rightarrow +\infty$, vgl. (4.25) 11. keine Aussage für $\partial_{\widehat{\lambda}_i} \widehat{W}$, $\partial_J U _{J \rightarrow +\infty} \rightarrow +\infty$, vgl. (4.26)

In (4.32)₂ sind die Bedingungen für die Ableitung des volumetrischen Anteils U bei identischen Hauptstreckungen nicht aufgeführt, da diese immer erfüllt sind und deshalb nicht beachtet werden müssen. In (4.32)₅ wird vorausgesetzt, daß der volumetrische und der isochore Anteil unabhängig voneinander Verzerrungsenergie speichern. Es sei angemerkt, daß alle für den isochoren Anteil \widehat{W} aufgestellten Bedingungen mit den Bedingungen der Verzerrungsenergiefunktion W für inkompressible Werkstoffe übereinstimmen. Der einzige Unterschied besteht darin, daß die isochoren Hauptstreckungen $\widehat{\lambda}_i$ statt der Hauptstreckungen λ_i des inkompressiblen Falls gesetzt werden müssen. Die Bedingungen (4.32)_{3,5,8,10} in Verbindung mit

der nachfolgend geforderten Konvexität von $U(J)$ (siehe (4.36)₃) verdeutlichen die Eignung der volumetrischen Verzerrungsenergiefunktion als Penalty Term (siehe Abschnitt A.2.2), falls der Grenzfall der Inkompressibilität angestrebt wird.

Die Spannungsberechnung nach (4.18) führt auf

$$\sigma_i = J^{-1} \lambda_i \partial_{\lambda_i} \widehat{W} + \partial_J U \quad . \quad (4.33)$$

Hierin hat die Ableitung $p(J) = \partial_J U(J)$ die physikalische Bedeutung des hydrostatischen Druckes (vgl. $p = J^{-1} \tau^{\text{vol}}$ in Abschnitt 4.3.3).

Polykonvexität: Die mechanisch konsistenten Bedingungen basieren im wesentlichen auf Grenzzuständen und sichern nicht, daß die Verzerrungsenergiefunktion im gesamten Bereich $0 < \lambda_i < \infty$ physikalisch sinnvoll ist. Den Ausführungen in MARDEN & HUGHES [1983] folgend wird an dieser Stelle kurz die Forderung nach Konvexität diskutiert. Basierend auf der Betrachtung eines mit den Hauptstreckungen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ homogen in Kantenrichtung deformierten Quaders kann folgende zunächst physikalisch sinnvolle Forderung aufgestellt werden: mit wachsender Hauptstreckung λ_i wächst ebenfalls die zugeordnete Spannungskomponente σ_i (vgl. (4.18)) an, d.h. es ist strenge Konvexität $\partial_{\lambda_i \lambda_i}^2 W > 0$ zu fordern. Es zeigt sich jedoch, daß diese Forderung ein zu strenges Kriterium darstellt. Die Forderung nach Konvexität schließt, da sie die Eindeutigkeit der Lösung impliziert, Knick- und Beulerscheinungen aus (siehe HILL [1957]). Außerdem ist sie unvereinbar mit dem Prinzip der materiellen Objektivität (siehe CIARLET [1988], Theorem 4.8-1.b) und inkompatibel mit der Bedingung (4.23) (siehe CIARLET [1988], Theorem 4.8-1.a). Konvexität muß deshalb durch ein weniger strenges Kriterium ersetzt werden.

Wie in BALL [1977], CIARLET [1988], DACOROGNA [1989] dargestellt wird, tritt als weiches Kriterium die Forderung nach Polykonvexität auf:

Eine Verzerrungsenergiefunktion

$$W(\mathbf{F}) = W(\mathbf{F}, J\mathbf{F}^{-T}, J)$$

heißt polykonvex, wenn sie in den Argumenten \mathbf{F} , $J\mathbf{F}^{-T}$ und J jeweils konvex ist.

(4.34)

Die drei Argumente zeichnen sich dadurch aus, daß sie infinitesimale Linien-, Flächen- und Volumenelemente von der Referenz- in die Momentankonfiguration transformieren (siehe (2.7), (2.11)_{1,2}). Der Tensor $J\mathbf{F}^{-T}$ ist der Kofaktortensor von \mathbf{F} . Mit Hilfe von (2.29)₂ und $J = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ ergeben sich direkt dessen Singulärwertzerlegung

$$J\mathbf{F}^{-T} = \sum_{i=1}^3 \lambda_k \lambda_l \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{N}_i \quad \text{mit } i \neq k \neq l \neq i$$

und dessen Singulärwerte $\lambda_2 \lambda_3$, $\lambda_3 \lambda_1$ und $\lambda_1 \lambda_2$. Basierend auf (4.34) ist in CIARLET

[1988], Theorem 4.9-2 die Verzerrungsenergiefunktion

$$\begin{aligned}
 W_{\text{Ciarlet}}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = & \\
 & \left. \sum_{i=1}^m a_i [\lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_3^{\alpha_i}] + \right\} W_1(\mathbf{F}) \\
 & \left. \sum_{j=1}^n b_j [(\lambda_2 \lambda_3)^{\beta_j} + (\lambda_3 \lambda_1)^{\beta_j} + (\lambda_1 \lambda_2)^{\beta_j}] + \right\} W_2(J\mathbf{F}^{-T}) \\
 & \left. U(J) \right\} W_3(J)
 \end{aligned} \tag{4.35}$$

gegeben, die unter Voraussetzung von

$$\begin{aligned}
 a_i > 0 \quad , \quad \alpha_i \geq 1 \quad \text{für } i = 1, 2, \dots, m \quad , \\
 b_j > 0 \quad , \quad \beta_j \geq 1 \quad \text{für } j = 1, 2, \dots, n \quad , \\
 \partial_{JJ}^2 U \geq 0 \quad \quad \quad \text{für } 0 < J < \infty
 \end{aligned} \tag{4.36}$$

polykonvex ist (vgl. auch DACOROGNA [1989], A.1.1.2). Da die Hauptstreckungen λ_i größer als null sind, müssen wegen (4.20) die Koeffizienten a_i und b_j ebenfalls größer als null sein. Polykonvexität (4.34) bedeutet, daß die additiven Anteile W_1 , W_2 und W_3 in (4.35) jeweils bezüglich ihres Argumentes konvex sind. Daraus folgen dann die Bedingungen $\alpha_i \geq 1$ und $\beta_j \geq 1$.

Anmerkungen: Im inkompressiblen und im nahezu inkompressiblen Fall treten hydrostatische Drücke auf (siehe p in (4.27) und ∂_J in (4.31)). Diese Drücke sind nicht mit dem hydrostatischen Druck $\text{tr}\boldsymbol{\sigma}/3$ zu verwechseln, wie er in der additiven deviatorisch-hydrostatischen Aufteilung (2.43) definiert ist, sondern es handelt sich ausschließlich um zusätzliche hydrostatische Druckanteile. Im isochor-volumetrisch entkoppelten kompressiblen Fall hingegen ist der hydrostatische Druck (siehe $\partial_J U$ in (4.33)) identisch mit $\text{tr}\boldsymbol{\sigma}/3$. Der entkoppelte Fall wird in den Abschnitten 4.3.3 und 4.4.3 weiterführend behandelt.

Das negative Vorzeichen vor dem Druck in (4.27) besitzt rein anschaulichen Charakter, da ein positiver äußerer Druck negative Druckspannungen im Körper hervorruft. Formal hätte ebenso ein positives Vorzeichen gewählt werden können, damit (4.27), (4.31) und (4.33) bezüglich des Druckvorzeichens konsistent sind.

4.1.3 Diskussion ausgewählter Verzerrungsenergiefunktionen

In diesem Abschnitt werden Beispiele für Verzerrungsenergiefunktionen gegeben. Analog zu den beiden vorangegangenen Abschnitten 4.1.1 und 4.1.2 erfolgt hier die Unterscheidung in kompressible, inkompressible, nahezu inkompressible und kompressible isochor-volumetrisch entkoppelte Werkstoffe.

Kompressibel: Das St.-Venant-Kirchhoff Werkstoffgesetz (DE SAINT-VENANT [1844], KIRCHHOFF [1852]) entsteht durch Anwendung des Hooke'schen Gesetzes für kleine Verzerrungen auf die nichtlinearen Green-Lagrangeschen Verzerrungen. Es ergibt sich die St.-Venant-Kirchhoffsche Verzerrungsenergiefunktion

$$W_{\text{SVK}} = \frac{\Lambda}{2} \left(\sum_{i=1}^3 E_i \right)^2 + \mu \sum_{i=1}^3 E_i^2 \quad \text{mit } E_i = \frac{1}{2}(\lambda_i^2 - 1) . \quad (4.37)$$

Die Beziehung zwischen den 2. Piola-Kirchhoff Spannungen und den Green-Lagrangeschen Verzerrungen ist bei Verwendung von W_{SVK} linear. Diese Verzerrungsenergiefunktion erfüllt nicht die Bedingung (4.23) und nicht die Forderung nach Polykonvexität (4.34). Sie darf deshalb ausschließlich auf Probleme mit kleinen Verzerrungen angewendet werden. Die beiden Konstanten Λ und μ (Schubmodul) sind die Laméschen Konstanten.

Inkompressibel: Ogden entwickelte auf der Basis von Experimenten die Verzerrungsenergiefunktion

$$W_{\text{OG,inkomp}} = \sum_{i=1}^n \frac{\mu_i}{\alpha_i} (\lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_3^{\alpha_i} - 3) \quad \text{mit } \lambda_3 = \lambda_1^{-1} \lambda_2^{-1} \quad (4.38)$$

für inkompressible Werkstoffe (siehe OGDEN [1972a]). Sie beruht auf den ersten Invarianten verallgemeinerter Verzerrungstensoren mit den Eigenwerten $(\lambda_k^\alpha - 1)/\alpha$. Die Funktion von Ogden ist ein Spezialfall der in (4.35) gegebenen polykonvexen Verzerrungsenergiefunktion mit $a_i = \mu_i/\alpha_i$, $b_j = 0$ und $U(J) = 0$. Der zusätzlich additiv eingeführte konstante Term $-3 \sum_{i=1}^n \mu_i/\alpha_i$ sichert die Einhaltung der Bedingung $W(\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 1) = 0$ und besitzt keinen Einfluß auf die Polykonvexität. Der Klammerausdruck in (4.38) ist für $\lambda_1, \lambda_2 \neq 1$ und beliebige α_i immer größer als null. Die Bedingung (4.29) erfordert deshalb die Einschränkung $\mu_i/\alpha_i > 0$. In Verbindung mit der Forderung nach Polykonvexität (4.34) folgt daraus die einschränkende Ungleichung

$$\mu_i \alpha_i > 0 \quad (4.39)$$

für die Stoffkonstanten. Das heißt, es werden auch negative Werte für α_i zugelassen, sofern die zugehörige Konstante μ_i ebenfalls negativ ist. Dieser Fall korrespondiert bei inkompressiblem Stoffverhalten wegen $(\lambda_k \lambda_l)^{\beta_j} = \lambda_m^{-\beta_j}$ mit dem Term W_2 aus der allgemeinen Verzerrungsenergiefunktion (4.35). Bei korrekter Wahl der Konstanten erfüllt die Verzerrungsenergiefunktion von Ogden alle in Abschnitt 4.1.2 aufgelisteten Bedingungen für inkompressible Verzerrungsenergiefunktionen und unterliegt deshalb keinen Einschränkungen bezüglich des Anwendungsbereiches. Der Grenzübergang (4.30) auf kleine Verzerrungen liefert hierbei die Beziehung

$$\sum_{i=1}^n \mu_i \alpha_i = 2 \mu \quad (4.40)$$

zum Schubmodul der linearen Theorie. Es sei angemerkt, daß die Verzerrungsenergiefunktion nach Ogden die Valanis-Landel Hypothese (4.6) erfüllt.

Von TREOLAR [1944] sind experimentelle Daten für Gummi aus ein- und zweiachsigen Zugversuchen sowie aus einem reinen Scherversuch bestimmt worden. Nach Anpassung der Stoffkonstanten μ_i und α_i konnte Ogden mit seinem dreigliedrigen Modell (d.h. $n = 3$) Ergebnisse erzielen, die für Hauptstreckungen bis $\lambda \approx 7$ sehr gut mit den experimentellen Daten übereinstimmten. Aufgrund dieser guten Korrelation zwischen Theorie und Experiment nimmt das Werkstoffmodell (4.38) von Ogden eine herausragende Stellung ein. Diese wichtige Stellung wird dadurch untermauert, daß zwei klassische Vertreter der Verzerrungsenergiefunktionen für inkompressibles Werkstoffverhalten bereits im Modell von Ogden enthalten sind. Die spezielle Wahl der Konstanten $\alpha_1 = 2$ und $\mu_2, \dots, \mu_n = 0$ liefert das Neo-Hooke Modell nach TREOLAR [1943a,b]. Das Mooney-Rivlin Modell nach MOONEY [1940], RIVLIN [1947, 1948a–d, 1949a], RIVLIN & SAUNDERS [1951] erhält man mit $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = -2$ und $\mu_3, \dots, \mu_n = 0$.

Nahezu inkompressibel: In OGDEN [1972b] ist entsprechend (4.11) die Erweiterung von (4.38) auf den nahezu inkompressiblen Fall gegeben:

$$W_{\text{OG}, \sim \text{inkomp}} = \sum_{i=1}^n \frac{\mu_i}{\alpha_i} (\lambda_1^{\alpha_i} + \lambda_2^{\alpha_i} + \lambda_3^{\alpha_i} - 3) + \psi(J) \quad \text{mit} \quad (4.41)$$

$$\psi(J) = - \sum_{i=1}^n \mu_i \ln J + \Lambda \theta^{-2} (\theta \ln J + J^{-\theta} - 1) \quad .$$

Hierin ist Λ die Lamésche Konstante. Der erste Term in $\psi(J)$ stellt sicher, daß der unverformte Zustand gleichzeitig der spannungsfreie Zustand ist. Der Grenzübergang auf die Theorie kleiner Verzerrungen liefert analog zum inkompressiblen Fall die Bedingung (4.40). Die Bedingungen (4.15)–(4.19), (4.21), (4.22) werden erfüllt. Die Konstanten müssen konform zu den Bedingungen (4.20), (4.23)–(4.26) gewählt werden. Polykonvexität (4.34) setzt $\partial_{JJ}^2 \psi \geq 0$ voraus (erfüllt beispielsweise für $\sum \mu_i \geq 0, \Lambda \geq 0, \theta \leq -1$).

Für fast inkompressible Werkstoffe gilt $K = \Lambda + 2\mu/3 \gg \mu$ und somit $\Lambda \gg \mu$. Setzt man voraus, daß die Konstanten μ_i und der Schubmodul μ der linearen Theorie von der gleichen Größenordnung sind, dann gilt ebenfalls $\Lambda \gg \mu_i$. Bei einer homogenen Kompression können deshalb Terme mit μ_i gegenüber Termen mit Λ vernachlässigt werden. Aus (4.31) ergibt sich dann der hydrostatische Druck in guter Näherung zu

$$p = \Lambda \theta^{-1} (J^{-\theta-1} - J^{-1}) \quad .$$

Ogden fand für $\theta = 9$ und Werte Λ in der Größenordnung von $10^4 \cdot \mu$ eine sehr gute Übereinstimmung zwischen Experiment und Theorie. Der zweite Term in $\psi(J)$ übernimmt die Aufgabe eines Penalty Terms mit Λ als Penalty Parameter und zugehöriger Penalty Funktion.

Kompressibel isochor-volumetrisch entkoppelt: Die Verzerrungsenergiefunktion

$$\begin{aligned} W_{\text{H}} &= \frac{\Lambda}{2} \left(\sum_{i=1}^3 \epsilon_i \right)^2 + \mu \sum_{i=1}^3 \epsilon_i^2 \quad \text{mit } \epsilon_i = \ln \lambda_i \\ &= \mu \sum_{i=1}^3 (\hat{\epsilon}_i)^2 + \frac{K}{2} (\ln J)^2 \quad \text{mit } \hat{\epsilon}_i = \ln \hat{\lambda}_i \end{aligned} \quad (4.42)$$

wurde von HENCKY [1933] angegeben. Sie entspricht in der oberen Darstellung (4.42)₁ formal der Darstellung (4.37), außer daß die Eigenwerte E_i des Green-Lagrange Tensors durch die Logarithmen ϵ_i der Hauptstreckungen λ_i ersetzt sind. In der unteren Darstellung (4.42)₂ ist deutlich die isochor-volumetrische Entkopplung erkennbar. Die Funktion W_{H} erfüllt nicht die Bedingung (4.32)₁₁ und nicht die Forderung nach Polykonvexität (4.34) bzw. (4.36)₃. Wie in REESE & WRIGGERS [1997] gezeigt wird, sollte W_{H} nur für Problemstellungen mit Hauptstreckungen bis $\lambda_{\text{max}} = 1.15$ verwendet werden.

Analog zu (4.14) kann für das Modell von Ogden die kompressible Variante

$$W_{\text{OG,komp}} = \sum_{i=1}^3 \frac{\mu_i}{\alpha_i} (\hat{\lambda}_1^{\alpha_i} + \hat{\lambda}_2^{\alpha_i} + \hat{\lambda}_3^{\alpha_i} - 3) + U(J) \quad (4.43)$$

mit entkoppeltem isochorem und volumetrischem Anteil angegeben werden (siehe SALLEB, CHANG & ARNOLD [1992]). Bei korrekter Wahl der Konstanten werden vom isochoren Anteil in (4.43) alle isochoren Bedingungen in (4.32) erfüllt. Wegen (4.32)₅ und (4.32)₇ können die Bedingungen (4.39) und (4.40) unverändert übernommen werden. Für den inkompressiblen Grenzfall $J = 1$ sind die isochoren Hauptstreckungen $\hat{\lambda}_i$ identisch mit den Hauptstreckungen λ_i . Dann ist die Polykonvexität der Funktion (4.43) gegeben, da als Grenzfall die polykonvexe inkompressible Funktion von Ogden (4.38) erhalten wird. Dem Autor ist keine Zitatstelle aus dem Schrifttum bekannt, in der die Polykonvexität der entkoppelten Energiefunktion von Ogden für den kompressiblen Fall untersucht wird.

Für den volumetrischen Anteil $U(J)$ ist außer dem Term $K(\ln J)^2/2$ in der Energiefunktion (4.42)₂ bisher kein Beispiel angegeben. Weitere Beispiele sind dem folgenden Abschnitt zu entnehmen. Dort erfolgt eine ausführliche Diskussion des volumetrischen Anteils $U(J)$.

4.2 Diskussion und Entwicklung volumetrischer Verzerrungsenergiefunktionen

In diesem Abschnitt wird ausschließlich der volumetrische Anteil $U(J)$ der isochor-volumetrisch entkoppelten Energiefunktion (4.14) behandelt. Im ersten Teil dieses Abschnitts werden die im Schrifttum gegebenen volumetrischen Energiefunktionen bezüglich der Erfüllung der Bedingungen (4.32) untersucht. Dabei werden die Be-

trachtungen von LIU & MANG [1996] erweitert. Der zweite Teil hat die Entwicklung neuer volumetrischer Verzerrungsenergiefunktionen zum Inhalt (siehe auch DOLL & SCHWEIZERHOF [1997]).

4.2.1 Bekannte Funktionen aus dem Schrifttum

$U_1(J) = K (J - 1)^2 / 2$
$U_2(J) = K (\ln J)^2 / 2$
$U_3(J) = K [(J - 1)^2 + (\ln J)^2] / 4$
$U_4(J) = K \theta^{-2} (\theta \ln J + J^{-\theta} - 1)$ für $\theta < -1$
$U_5(J) = K (J \ln J - J + 1)$

Tafel 4.1: Funktionen $U(J)$ aus dem Schrifttum (Referenzen siehe Text).

Bedingung	Schrifttum					Neu		
	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	U_7	U_8
(4.32) ₃	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
(4.32) ₄	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
(4.32) ₅	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
(4.32) ₇	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
(4.32) ₈	$\rightarrow K/2$	✓	✓	✓	$\rightarrow K$	✓	✓	✓
(4.32) ₉	$\rightarrow -K$	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
(4.32) ₁₀	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
(4.32) ₁₁	✓	$\rightarrow 0$	✓	✓	✓	✓	✓	✓
(4.36) ₃	✓	$1 \not\approx \ln J$	✓	✓	✓	✓	✓	✓

Tafel 4.2: Erfüllung der volumetrischen Bedingungen für gegebene und neu vorgeschlagene Funktionen $U(J)$.

In Tafel 4.1 sind einige der im Schrifttum vorgeschlagenen volumetrischen Verzerrungsenergiefunktionen zusammengefasst. Einige charakteristische Zitate sind: für U_1 SUSSMAN & BATHE [1987], SIMO [1988a], VAN DEN BOGERT & DE BORST [1990], CHANG, SALEEB & LI [1991], VAN DEN BOGERT, DE BORST, LUITEN & ZEILMAKER [1991]; für U_2 HENCKY [1933], VALANIS & LANDEL [1967], SIMO, TAYLOR & PISTER [1985], SIMO [1992], SIMO, ARMERO & TAYLOR [1993], ROEHL & RAMM [1996]; für U_3 SIMO & TAYLOR [1982], VAN DEN BOGERT & DE BORST [1990], LIU

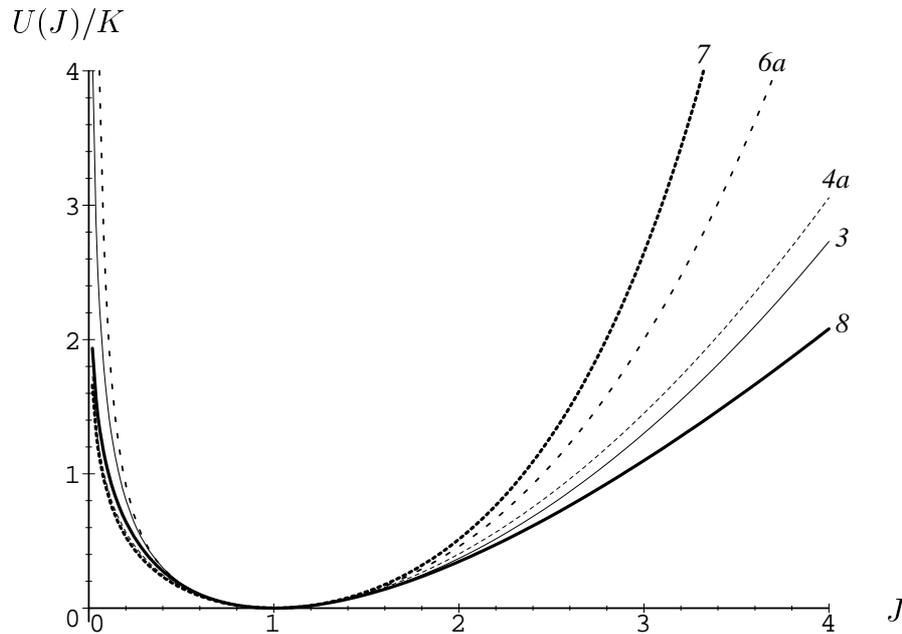


Bild 4.1: Kurven der Funktionen $U(J)/K$.

& MANG [1996]; für U_4 OGDEN [1972b], SIMO & TAYLOR [1991], SIMO & ARME-RO [1992], SIMO & MIEHE [1992], MIEHE [1994], KALISKE & ROTHERT [1997] und für U_5 LIU, HOFSTETTER & MANG [1992,1994]. Die Zitate zeigen, daß die isochor-volumetrische Entkopplung der Verzerrungsenergiefunktion oft und vor allem bei der Behandlung nichtlinearer Elastizität mittels der Finite Elemente Methode verwendet wird. In einigen der genannten Beiträge wird die Erweiterung inkompressiblen Werkstoffverhaltens zu nahezu inkompressiblem Werkstoffverhalten diskutiert. Da diese Erweiterungen ebenfalls das volumetrische Verhalten beschreiben, sind sie jedoch ähnlich zu interpretieren wie die volumetrischen Verzerrungsenergiefunktionen.

Für die in Tafel 4.1 gegebenen Funktionen (die neu vorgeschlagenen Funktionen U_{6-8} werden später behandelt) ist die Erfüllung der Bedingungen (4.32)₃₋₁₁, (4.36)₃ in Tafel 4.2 vermerkt. Das Symbol \checkmark bedeutet die Erfüllung der zugehörigen Bedingung. Im Fall der Verletzung einer Bedingung ist der statt dessen erreichte Grenzwert angegeben. Es ist offensichtlich, daß nur das Verhalten der Funktionen U_3 und U_4 korrekt ist. Die Funktionen U_1 , U_2 und U_5 zeigen Mängel bezüglich der Erfüllung der Bedingungen. Insbesondere U_1 und U_5 sollten nicht für Anwendungen mit großen Kompressionen eingesetzt werden, während U_2 bei Fällen mit großen volumetrischen Expansionen nicht sinnvoll erscheint. In den Bildern 4.1, 4.2 und 4.3 sind die Funktionen U_3 , U_{4a} (der Index a steht für $\theta = -2$) und deren Ableitungen $\partial_J U$, $\partial_{J,J}^2 U$ jeweils in Abhängigkeit von J eingezeichnet. Alle Kurven sind mit dem Kompressionsmodul K normiert. Die Erfüllung der Bedingungen (4.32)₃₋₁₁, (4.36)₃ kann damit auch anschaulich überprüft werden. Es sei bemerkt, daß die Funktionen U_3 und U_{4a} zu sehr ähnlichen Kurvenverläufen führen.

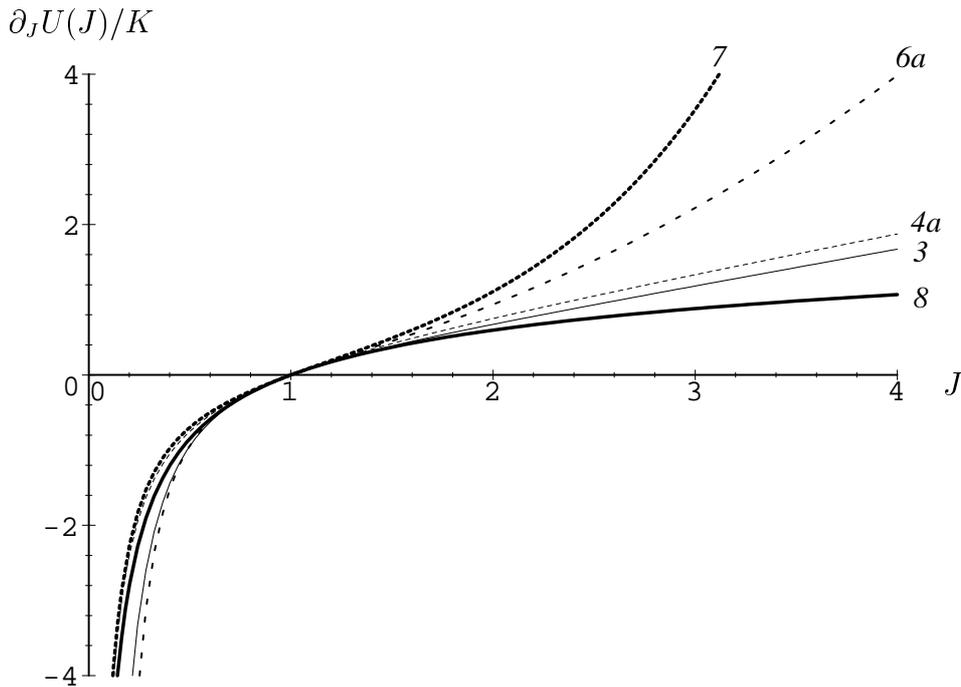


Bild 4.2: Kurven der ersten Ableitung $\partial_J U(J)/K$.

Mit dem konstanten Kompressionsmodul K werden die Funktionen lediglich skaliert, die Funktionsverläufe bleiben ansonsten jedoch unverändert. In diesem Zusammenhang kann K auch als Penalty Parameter interpretiert werden, der die Inkompressibilitätsbedingung erzwingt, falls große Werte gewählt werden. Die Funktion U_4 besitzt gegenüber den anderen in Tafel 4.1 gegebenen Funktionen einen Vorteil, weil sie einen zusätzlichen Parameter θ enthält, mit dem der Funktionsverlauf besser an experimentelle Daten angepaßt werden kann. Allerdings garantieren nur Werte mit $\theta < -1$ die Erfüllung aller Bedingungen. Im Schrifttum wird der Wert $\theta = -2$ oft gewählt. Wie von OGDEN [1972b] ermittelt (siehe auch Abschnitt 4.1.3), ist der Wert $\theta = 9$ geeignet, um im Druckbereich die Funktion an experimentelle Daten für fast inkompressiblen Gummi anzupassen. Die Verletzung der Bedingungen (4.32)₁₁ und (4.36)₃ ist in diesem Fall hinnehmbar, da für fast inkompressible Werkstoffe ohnehin ein großer Wert für K gewählt werden muß und somit J nahe eins bleibt. Anwendungen mit $J > 1$ sollten aber wegen der sehr kleinen volumetrischen Spannungen in diesem Bereich kritisch beurteilt werden (siehe auch Bild 4.4).

4.2.2 Neu vorgeschlagene Funktionen

Bevor neue volumetrische Energiefunktionen entwickelt werden, sollten deren wünschenswerte Eigenschaften vorab formuliert werden: erstens sollten die Funktionen alle Bedingungen (4.32)₃₋₁₁, (4.36)₃ erfüllen und zweitens sollten die Funktionen möglichst allgemeingültig sein. Die Erfüllung der zweiten Forderung erbringt den Vorteil, daß ein breites Spektrum an experimentellen Daten mit einer einzigen

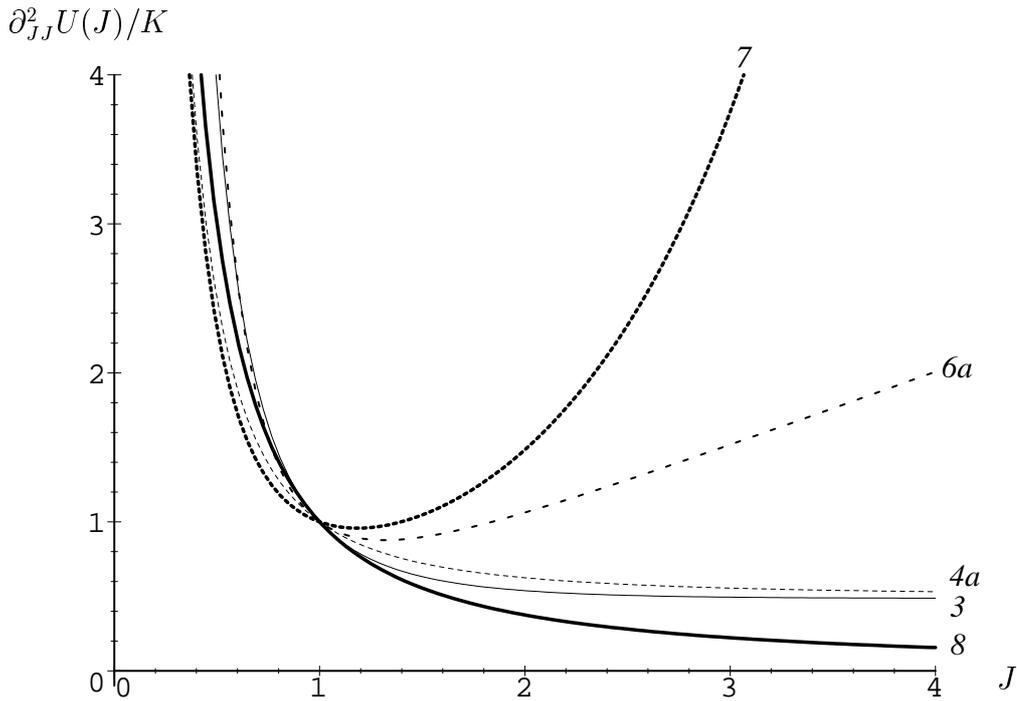


Bild 4.3: Kurven der zweiten Ableitung $\partial_{JJ}^2 U(J)/K$.

allgemeingültigen Funktion erfaßt werden kann. Damit kann ein weiter Bereich elastischen volumetrischen Werkstoffverhaltens mit wenig Aufwand beschrieben werden. Das bedeutet, daß nicht für jeden Werkstoff eine spezielle volumetrische Energiefunktion vorliegen muß, sondern nur spezielle Konstanten in einer möglichst allgemeinen Form. Dies kann auch als Vorteil für eine möglichst allgemeingültige Finite Elemente Implementierung im Hinblick auf den geringeren Programmieraufwand angesehen werden. Allgemeingültigkeit einer volumetrischen Verzerrungsenergiefunktion wird demnach nur erreicht, wenn zusätzliche Werkstoffparameter zur Anpassung darin enthalten sind. Im folgenden wird daher eine Klasse volumetrischer Funktionen mit zwei zusätzlichen Parametern vorgeschlagen. Der Entwicklungsprozeß wird detailliert beschrieben, vor allem bezüglich der Erfüllung der physikalischen Bedingungen.

Funktion mit zwei zusätzlichen Parametern: Der vorgeschlagene Ausgangspunkt der Entwicklung ist folgende Gleichung

$$p_6(J) = \partial_J U_6(J) = K(J^\chi - J^{-\phi})(\chi + \phi)^{-1} \quad \text{mit } \chi > 0 \quad \text{und } \phi > 1 \quad (4.44)$$

für die volumetrische Spannung. Der Index 6 kennzeichnet die neue volumetrische Energiefunktion. Die Werkstoffparameter χ und ϕ sind Konstanten. Es ist offensichtlich, daß die Bedingung (4.32)₄ immer eingehalten wird. Der erste Term mit positivem Exponenten ($\chi > 0$) verschwindet für $J \rightarrow +0$. Der zweite Term mit negativem Exponenten ($\phi > 1$) geht für $J \rightarrow +\infty$ gegen null. Somit sind die Eigenschaften (4.32)_{9,11} gesichert. Die Differentiation von (4.44) nach J zeigt, daß (4.32)₇ und (4.36)₃ gewährleistet sind. Es sollte angemerkt werden, daß eine anfangs unbestimmte Konstante in (4.44) direkt aus der Bedingung (4.32)₇ zu $K(\chi + \phi)^{-1}$ bestimmt werden kann. Die

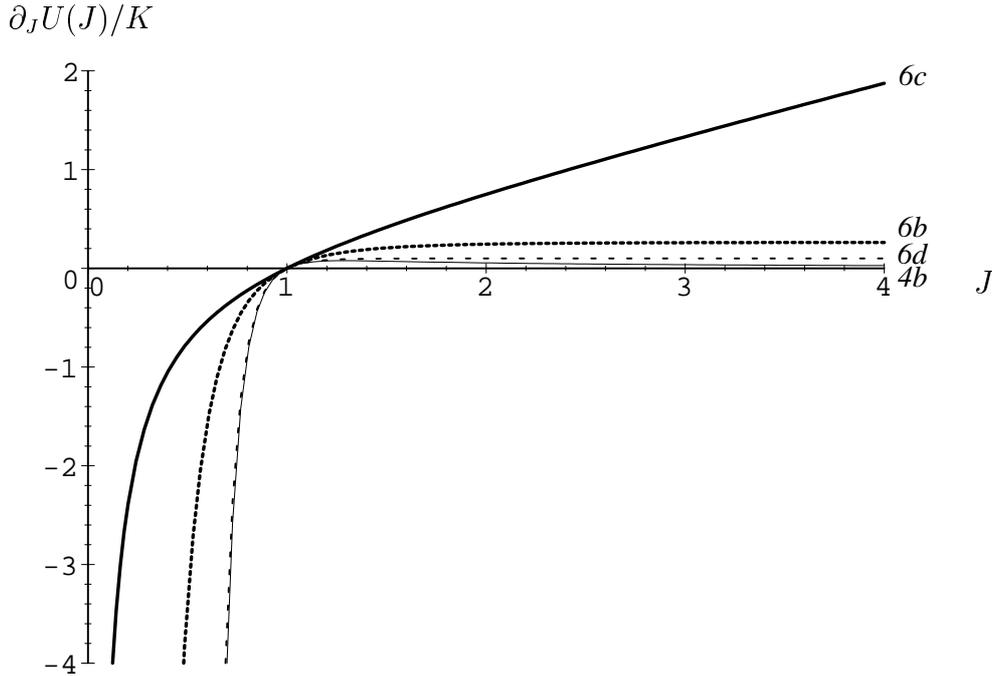


Bild 4.4: Angepaßte Kurven der ersten Ableitung $\partial_J U(J)/K$.

Integration von (4.44) nach J resultiert in der zugehörigen volumetrischen Verzerrungsenergiefunktion

$$U_6(J) = K[(\chi+1)^{-1}J^{\chi+1} + (\phi-1)^{-1}J^{-(\phi-1)}](\chi+\phi)^{-1} - K(\chi+1)^{-1}(\phi-1)^{-1} \quad (4.45)$$

Die Integrationskonstante ist so gewählt, daß Bedingung (4.32)₃ erfüllt ist. Die Bedingungen (4.32)_{5,8,10} werden unmittelbar erfüllt. Bei der Differentiation bzw. Integration von (4.44) bleibt der negative Exponent des zweiten Terms erhalten, wohingegen sein Vorzeichen wechselt. Diese Eigenschaft gilt wegen $\phi > 1$ und sichert, daß sowohl die volumetrische Energiefunktion als auch deren zweite Ableitung immer positiv und an den Grenzen positiv unendlich sind.

In den Gleichungen (4.44) und (4.45) sind zwei anschauliche Sonderfälle enthalten. Für $\phi = \chi$ ergibt sich die Beziehung $p_6(J) = -p_6(J^{-1})$, d.h. in einem um den Faktor γ^{-1} (mit $\gamma > 1$) homogen gestauchten Würfel und in einem um den Faktor γ homogen gestreckten Würfel wirken betragsmäßig die gleichen hydrostatischen Druck- bzw. Zugspannungen. Für $\phi = \chi + 2$ ergibt sich die Beziehung $U_6(J) = U_6(J^{-1})$, d.h. in einem um den Faktor γ^{-1} homogen gestauchten Würfel und in einem um den Faktor γ homogen gestreckten Würfel ist dieselbe volumetrische Verzerrungsenergie gespeichert.

In den Bildern 4.1, 4.2 und 4.3 sind die Funktionsverläufe von U_{6a} (Index a bedeutet $\chi = \phi = 2$) und die ihrer Ableitungen dargestellt. Wegen der Wahl identischer Konstanten ist die Funktion U_{6a} ein Beispiel für den ersten der beiden oben genannten Sonderfälle. Die Erfüllung der Bedingungen (4.32)₃₋₁₁, (4.36)₃ ist offensichtlich. Die Hauptaufgabe besteht nun darin, die neue volumetrische Funktion U_6 bezüglich ihrer Anwendbarkeit auf reale Aufgabenstellungen zu bewerten.

1. Bewertung: Der Grenzübergang $\chi \rightarrow 0$ in Gleichung (4.44) führt direkt auf die Formel

$$p(J) = K(1 - J^{-\phi})\phi^{-1} \quad (4.46)$$

des hydrostatischen Druckes, wie sie in MURNAGHAN [1951], Seite 73 gegeben ist. Es ist zu beachten, daß in der vorliegenden Arbeit die volumetrische Spannung bei Kompression ein negatives Vorzeichen aufweist (Druckspannung). Im Gegensatz dazu wird im zitierten Schrifttum der Druck meist positiv angegeben. Der Vorteil der Druckfunktion (4.46) besteht in der Möglichkeit, die Funktion an experimentelle Daten für Natrium anpassen zu können (für Informationen zu den Experimenten siehe Literaturstellen in MURNAGHAN [1951]). Für $\phi = 3.79$ werden die experimentellen Werte $p(J)$ bis zu Drücken von 10GPa mit einer Genauigkeit angenähert, die innerhalb der Genauigkeit der Messung (3%) liegt. Außerdem ist die auf Murnaghans Druckformel (4.46) basierende volumetrische Verzerrungsenergiefunktion ein Grenzfall ($\chi \rightarrow 0$) der allgemeineren Funktion (4.45), die ihrerseits alle Bedingungen (4.32)₃₋₁₁, (4.36)₃ erfüllt. In Bild 4.4 ist die von U_{6b} (Index b bedeutet $\chi = 0.001$, $\phi = 3.79$) abgeleitete volumetrische Spannungskurve eingezeichnet. Die Kurve für $\chi = 0$ ist nicht dargestellt, da keine Unterscheidung zur Kurve $\partial_J U_{6b}$ erkennbar ist. Im Hinblick auf experimentelle Untersuchungen erscheint es vorteilhaft, die volumetrische Spannung (\cong Druck) anzupassen anstatt die Energiefunktion selbst oder deren zweite Ableitung. Deshalb wird hier und im folgenden auf die Darstellungen der U -Kurven und $\partial_{JJ}^2 U$ -Kurven verzichtet. Es ist aber offensichtlich, daß bei verbesserter Anpassung von $\partial_J U$ auch U und $\partial_{JJ}^2 U$ besser angepaßt sind.

2. Bewertung: Es soll nun angestrebt werden, die Konstanten χ und ϕ in U_6 so anzupassen, daß sich die im Schrifttum oft verwendeten Funktionen U_3 und U_{4a} (Index a bedeutet $\theta = -2$) ergeben. Da beide Funktionen U_3 und U_{4a} sehr ähnliche Kurvenverläufe aufweisen, wird an dieser Stelle exemplarisch die Funktion U_{4a} herausgegriffen. Die erste Ableitung von U_{4a} führt im Vergleich zur Beziehung (4.44) unmittelbar auf die Konstanten $\chi = \phi = 1$, was jedoch die zweite Restriktion in (4.44) verletzen würde. Aber die Konstantenwahl $\chi = 1$, $\phi \rightarrow 1$ (im speziellen $\phi = 1.001$, im weiteren als U_{6c} gekennzeichnet) erfüllt die zweite Restriktion und eine perfekte Anpassung von U_{6c} an U_{4a} wird erreicht. In Bild 4.4 ist der volumetrische Spannungsverlauf $\partial_J U_{6c}$ eingezeichnet. Die Kurve für $\partial_J U_{4a}$ (siehe Bild 4.2) ist an dieser Stelle nicht dargestellt, da sie nicht von $\partial_J U_{6c}$ unterscheidbar ist. Daß die Funktion U_6 für den Grenzfall $\chi = 1$, $\phi \rightarrow 1$ auch identisch mit der Funktion U_{4a} wird, unterstreicht den Vorteil von U_6 .

3. Bewertung: Wie bereits erwähnt, ist die volumetrische Funktion U_{4b} (Index b bedeutet $\theta = 9$) im Druckbereich sehr gut an experimentelle Daten für fast inkompressiblen Gummi angepaßt. Allerdings muß bei dieser Wahl von θ die Verletzung zweier physikalischer Bedingungen in Kauf genommen werden. Die erste Ableitung von U_{4b} liefert im Vergleich zu Beziehung (4.44) die Werte $\chi = -1$ und $\phi = 10$, was jedoch die Restriktion für den Parameter χ in (4.44) verletzt. Für die gewählten Werte $\chi = 0.001$ und $\phi = 10$ (im folgenden mit U_{6d} bezeichnet) hingegen sind die Restriktionen für χ und ϕ sowie alle physikalischen Bedingungen (4.32)₃₋₁₁, (4.36)₃ erfüllt. Die beiden von U_{4b} , U_{6d} abgeleiteten volumetrischen Spannungskurven sind

in Bild 4.4 dargestellt. Im Druckbereich ($J < 1$) sind beide Kurven kaum zu unterscheiden, für $J > 1$ sind die Unterschiede marginal. Damit ist für die Funktion U_6 die Möglichkeit der guten Parameteranpassung an experimentelle Daten (siehe OGDEN [1972b] und darin gegebene Literaturstellen) sowie ihre Anwendbarkeit und ihr großer Einsatzbereich bestätigt. Als Nachteil seien allerdings die physikalisch nicht sinnvollen kleinen Spannungen im Zugbereich $J > 1$ erwähnt. Aufgrund der Erfüllung aller Bedingungen ist der Verlauf der Funktion $\partial_J U_{6d}$ in diesem Bereich sinnvoller als der Verlauf der Funktion $\partial_J U_{4b}$.

Verallgemeinerung der Zwei-Parameter-Funktion: Es ist möglich, die volumetrische Verzerrungsenergiefunktion U_6 weiter zu verallgemeinern, indem einzelne Funktionen des Typs (4.44), (4.45) additiv überlagert werden. Die volumetrische Spannung der verallgemeinerten Funktion ist dann durch

$$p_{6gen}(J) = \partial_J U_{6gen}(J) = K \left[\sum_{i=1}^n (J^{\chi_i} - J^{-\phi_i}) \right] \left[\sum_{i=1}^n (\chi_i + \phi_i) \right]^{-1} \quad (4.47)$$

mit $\chi_i > 0$ und $\phi_i > 1$

gegeben. Die Integration der Gleichung (4.47) liefert daraus die verallgemeinerte Funktion $U_{6gen}(J)$. Die Integrationskonstante muß dabei aus (4.32)₃ bestimmt werden. Es ist einfach zu zeigen, daß $U_{6gen}(J)$ alle Bedingungen (4.32)₃₋₁₁, (4.36)₃ erfüllt. Somit sind verallgemeinerte Funktionen mit einer unbeschränkten Anzahl an zusätzlichen Werkstoffparametern χ_i , ϕ_i konstruierbar.

Es sollte zudem angemerkt werden, daß jede additive Überlagerung einzelner volumetrischer Verzerrungsenergiefunktionen U_{1-6} , welche die physikalischen Bedingungen erfüllt, eine zulässige Verallgemeinerung der Einzelfunktionen ist. Beispielsweise führt $(U_1 + U_4)/2$ zu einer neuen zulässigen Funktion, welche die Mängel der Einzelfunktion U_1 nicht mehr besitzt.

Weitere Funktionen: Zusätzlich zur Funktion U_6 werden an dieser Stelle zwei weitere volumetrische Verzerrungsenergiefunktionen

$$\begin{aligned} U_7(J) &= K (\exp(J - 1) - \ln J - 1) / 2 \quad , \\ U_8(J) &= K (J - 1) \ln J / 2 \end{aligned} \quad (4.48)$$

neu vorgeschlagen. Wie in Tafel 4.2 aufgeführt, erfüllen diese beiden Funktionen alle Bedingungen (4.32)₃₋₁₁, (4.36)₃. Da keine zusätzlichen Parameter zur Variation der Funktionsverläufe enthalten sind, ist die Möglichkeit der Anpassung an Versuchsdaten stark eingeschränkt. Die beiden Funktionen (4.48) sind jedoch den Funktionen U_1 , U_2 und U_5 im Hinblick auf die Erfüllung der physikalischen Bedingungen überlegen. Zum Vergleich sind die Funktionen U_7 und U_8 sowie deren Ableitungen ebenfalls in den Bildern 4.1, 4.2 und 4.3 dargestellt.

Nun werden zwei weitere Parameteranpassungen der Einzelfunktion U_6 an die Funktionen U_7 und U_8 durchgeführt. Dies soll eine ungefähre Vorstellung von den Möglichkeiten und den Grenzen der Anpassungsmöglichkeiten von U_6 geben. Mit $\chi = 2.3$, $\phi = 1.4$, bezeichnet als U_{6e} , wird die Funktion U_7 angenähert und mit

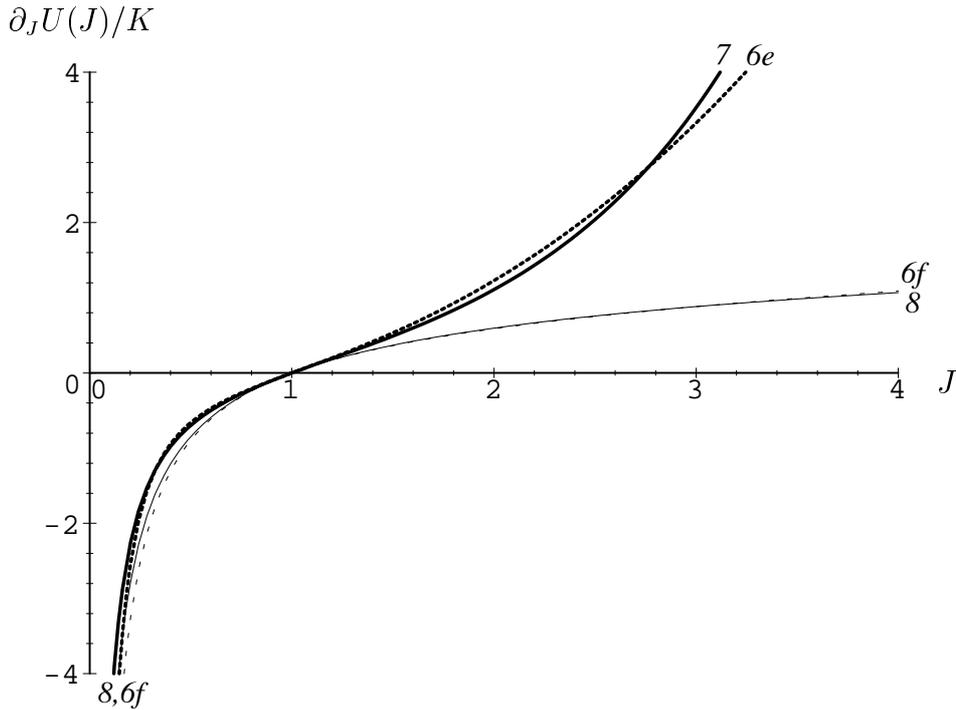


Bild 4.5: Angepaßte Kurven der ersten Ableitung $\partial_J U(J)/K$.

$\chi = 0.45$, $\phi = 1.05$, bezeichnet als U_{6f} , wird die Funktion U_8 approximiert. Die abgeleiteten volumetrischen Spannungskurven sind in Bild 4.5 eingezeichnet. Der Vergleich zeigt, daß beide Funktionen U_7 und U_8 näherungsweise durch U_6 ersetzt werden können. Um eine bessere Annäherung im gesamten Bereich von J zu erzielen, müßten allerdings mehr Parameter verwendet werden, z.B. durch Verwendung der verallgemeinerten Funktion U_{6gen} . Aber die zumindest bereichsweise gute Approximation ist zu beachten.

Abschließende Bemerkungen: Für Anwendungen mit kleinen volumetrischen Deformationen werden keine allgemeinen volumetrischen Verzerrungsenergiefunktionen benötigt. In diesem Deformationsbereich liegen wegen der zu erfüllenden physikalischen Bedingungen (4.32)_{3,4,7} auch alle zulässigen Funktionen dicht beieinander. Die Vorteile der vorgeschlagenen Funktion U_6 mit zwei zusätzlichen Konstanten und deren Verallgemeinerung U_{6gen} mit einer beliebigen Anzahl an zusätzlichen Konstanten müssen daher im Kontext großer volumetrischer Deformationen gesehen werden. Es sollte abschließend angemerkt werden, daß die Bestimmung der Konstanten nicht trivial ist, da sie in der volumetrischen Spannungsformel (4.44) sowohl im Exponenten als auch im Nenner auftreten. Bei der Behandlung realer Werkstoffe sollte außerdem der durch die isochor-volumetrische Aufspaltung eingebrachte Modellierungsfehler mit in Betracht gezogen werden, um überhöhte Genauigkeitsanforderungen an den volumetrischen Teil zu vermeiden.

4.3 Spannungsberechnung

4.3.1 Herleitung der allgemeinen Gleichungen

Zunächst wird angenommen, daß die Verzerrungsenergiefunktion (4.2) ausschließlich von den Rechten Cauchy-Green Verzerrungen abhängt. Bei elastischem Werkstoffverhalten erfolgt aufgrund der Reversibilität des Deformationsvorganges keine Dissipation und die in (3.18) eingeführte Dissipationsleistung wird zu null:

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2} \mathbf{S} : \dot{\mathbf{C}} - \dot{W} \equiv 0 \quad .$$

Die Anwendung der Kettenregel auf die materielle Zeitableitung der Verzerrungsenergiefunktion (4.2) führt auf

$$\mathcal{D} = \left[\frac{1}{2} \mathbf{S} - \partial_{\mathbf{C}} W \right] : \dot{\mathbf{C}} \equiv 0 \quad .$$

Diese Gleichung muß für beliebige Raten $\dot{\mathbf{C}}$ erfüllt sein, d.h. der Klammerausdruck muß verschwinden. Die 2. Piola-Kirchhoff Spannungen

$$\mathbf{S} = 2\partial_{\mathbf{C}} W \tag{4.49}$$

werden somit durch Ableitung der Verzerrungsenergiefunktion nach den Rechten Cauchy-Greenschen Verzerrungen berechnet. Wegen der Beziehung (2.20)₁ kann ebenfalls die Berechnungsvorschrift $\mathbf{S} = \partial_{\mathbf{E}} W$ angegeben werden. Es sei hier festgestellt, daß in der Herleitung von (4.2) und (4.49) außer der Forderung nach materieller Objektivität und Reversibilität keine Annahmen bezüglich des Werkstoffverhaltens enthalten sind.

Legt man für die Verzerrungsenergiefunktion die Form (4.5) zugrunde, kann analog vorgegangen werden. Hierbei erfolgt jedoch die Beschränkung auf isotropes Stoffverhalten. Voraussetzungsgemäß muß die Dissipationsleistung

$$\mathcal{D} = \boldsymbol{\tau} : \mathbf{d} - \partial_{\mathbf{b}} W : \dot{\mathbf{b}} \equiv 0$$

verschwinden. Für beliebige Verzerrungsraten \mathbf{d} muß wegen $\overset{\circ}{\mathbf{b}} = \dot{\mathbf{b}} - \mathbf{l} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{l}^T = 0$ und der Koaxialität von $\partial_{\mathbf{b}} W$ und \mathbf{b} die Beziehung

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mathbf{b} \cdot \partial_{\mathbf{b}} W = 2\partial_{\mathbf{b}} W \cdot \mathbf{b} \tag{4.50}$$

gelten. Die Kirchhoff Spannungen (und wegen (2.41) auch die Cauchy Spannungen) werden somit durch Ableitung der Verzerrungsenergiefunktion nach dem Linken Cauchy-Green Tensor berechnet. Zur Spannungsberechnung kann alternativ die Doyle-Ericksen Formel $\boldsymbol{\tau} = 2\partial_{\mathbf{g}} W = \partial_{\mathbf{e}} W$ verwendet werden (siehe DOYLE & ERICKSEN [1956], SIMO & MARSDEN [1984]).

Materielle Formulierungen in der Referenzkonfiguration basieren in der Regel auf den Darstellungen (4.2) und (4.49). Bei räumlichen Formulierungen in der

Momentankonfiguration wendet man die Gleichungen (4.5) und (4.50) an. In der vorliegenden Arbeit erfolgt die Beschränkung auf die materielle beziehungsweise auf die räumliche Formulierung. Alternativ kann aus der Dissipationsleistung $\mathcal{D} = \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} - \partial_{\mathbf{F}} W : \dot{\mathbf{F}} \equiv 0$ der nicht symmetrische 1. Piola-Kirchhoff Spannungstensors $\mathbf{P} = \partial_{\mathbf{F}} W$ abgeleitet werden. Da hierbei aber alle neun Tensorkomponenten berücksichtigt werden müssen, wird vorzugsweise mit symmetrischen Spannungstensoren gearbeitet.

4.3.2 Spektraldarstellungen

Aus der Beziehung (4.49) und der Ableitungsvorschrift von Skalaren nach zweistufigen Tensoren erhält man mit (2.27) die Spektraldarstellung

$$\mathbf{S} = \sum_{i=1}^3 S_i \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i \quad \text{mit} \quad S_i = \lambda_i^{-1} \partial_{\lambda_i} W \quad (4.51)$$

der 2. Piola-Kirchhoff Spannungen. Analog ergeben (4.50) und (2.28)₂ die Kirchhoff Spannungen

$$\boldsymbol{\tau} = \sum_{i=1}^3 \tau_i \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i \quad \text{mit} \quad \tau_i = \lambda_i \partial_{\lambda_i} W \quad . \quad (4.52)$$

In beiden Darstellungen wird isotropes Werkstoffverhalten mit $W = W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ vorausgesetzt. Alternativ können die Spektraldarstellungen von $\boldsymbol{\tau}$ und \mathbf{S} mit $S_i = \lambda_i^{-2} \tau_i$, $\tau_i = \lambda_i^2 S_i$ angegeben bzw. aus den Pull-Back und Push-Forward Transformationen (2.42) mit Hilfe von (2.29) hergeleitet werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \varphi_t^*[\boldsymbol{\tau}] = \sum_{i=1}^3 \tau_i (\lambda_i^{-1} \mathbf{N}_i) \otimes (\lambda_i^{-1} \mathbf{N}_i) \quad \text{mit} \quad \lambda_i^{-1} \mathbf{N}_i = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{n}_i \quad \text{und} \\ \boldsymbol{\tau} &= \varphi_{t*}[\mathbf{S}] = \sum_{i=1}^3 S_i (\lambda_i \mathbf{n}_i) \otimes (\lambda_i \mathbf{n}_i) \quad \text{mit} \quad \lambda_i \mathbf{n}_i = \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_i \quad . \end{aligned} \quad (4.53)$$

Aus (4.53) lassen sich zusätzlich zu (2.34) die folgenden Beziehungen aufstellen:

$$\mathbf{N}_i = \lambda_i \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{n}_i \quad \text{und} \quad \mathbf{n}_i = \lambda_i^{-1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}_i \quad . \quad (4.54)$$

Die in Abschnitt 2.1.5 beschriebene Vorgehensweise zur Berechnung der materiellen Verzerrungsrate kann analog auf den 2. Piola-Kirchhoff Spannungstensor (4.51) angewendet werden. Es ergibt sich

$$\dot{\mathbf{S}} = \sum_{i=1}^3 \dot{S}_i \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i + \sum_{i,j=1, i \neq j}^3 \Omega_{ij} (S_j - S_i) \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_j \quad (4.55)$$

als Darstellung bezogen auf die materielle Eigenvektorbasis. Die erste Summe besetzt die Diagonale und die zweite Summe die Nebendiagonalen von $\dot{\mathbf{S}}$. Wie bereits bei der

Herleitung der Gleichung (2.35) angemerkt, ist die Kenntnis der Werte Ω_{ij} für alle folgenden Operationen nicht notwendig. Um die räumliche Oldroydsche Rate $\overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}$ zu berechnen, muß die Push-Forward Transformation (2.44) mittels (2.29) ausgeführt werden.

4.3.3 Deviatorisch-volumetrische Zerlegung

Wählt man eine Verzerrungsenergiefunktion (4.14), die additiv in einen isochoren und einen volumetrischen Anteil entkoppelt ist, so führt der Formalismus der Spannungsberechnung direkt auf die additive Zerlegung (2.43) des Cauchyschen Spannungstensors in einen deviatorischen und einen volumetrischen (hydrostatischen) Anteil. Mit Hilfe der Beziehungen aus Abschnitt 2.2.1 können daraus die deviatorisch-volumetrischen Entkopplungen

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}^{\text{dev}} + \mathbf{S}^{\text{vol}} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}^{\text{dev}} + \boldsymbol{\tau}^{\text{vol}} \quad (4.56)$$

des 2. Piola-Kirchhoff und des Kirchhoff Spannungstensors berechnet werden. Da im weiteren ausschließlich die Darstellungen (4.52)₁ und (4.53)₁ zugrunde gelegt werden, genügt die Angabe der räumlichen Komponenten τ_i . Die entkoppelte Darstellung (4.14) liefert nach Anwendung der Ableitungsregel (4.52)₂ die Aufspaltung

$$\begin{aligned} \tau_i &= \tau_i^{\text{dev}} + \tau^{\text{vol}} \\ \text{mit } \tau_i^{\text{dev}} &= \lambda_i \partial_{\lambda_i} \widehat{W} = \widehat{\lambda}_i \partial_{\widehat{\lambda}_i} \widehat{W} - \frac{1}{3} \sum_{k=1}^3 \widehat{\lambda}_k \partial_{\widehat{\lambda}_k} \widehat{W} \\ &= \partial_{\epsilon_i} \widehat{W} = \partial_{\hat{\epsilon}_i} \widehat{W} - \frac{1}{3} \sum_{k=1}^3 \partial_{\hat{\epsilon}_k} \widehat{W} \\ \text{mit } \tau^{\text{vol}} &= \lambda_i \partial_{\lambda_i} U = \partial_{\epsilon_i} U = J \partial_J U . \end{aligned} \quad (4.57)$$

Da sich die Spannungen durch Ableitung der Verzerrungsenergiefunktion nach den Hauptstreckungen ergeben und jede der drei isochoren Hauptstreckungen $\widehat{\lambda}_i$ von allen drei Hauptstreckungen λ_j abhängt, entstehen dabei Summenausdrücke in den deviatorischen Kirchhoffschen Hauptspannungen τ_i^{dev} , die in einer numerischen Berechnung ineffizient sind.

In (4.57) sind die logarithmischen Streckungen ϵ_i und die isochoren logarithmischen Streckungen $\hat{\epsilon}_i$ wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \epsilon_i &= \ln \lambda_i \quad , \quad \hat{\epsilon}_i = \ln \widehat{\lambda}_i = \epsilon_i - \frac{1}{3}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3) \quad , \quad J = \exp(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3) \quad , \\ \hat{\epsilon}_1 + \hat{\epsilon}_2 + \hat{\epsilon}_3 &= 0 \quad , \quad \lambda_i \partial_{\lambda_i}(\dots) = \partial_{\epsilon_i}(\dots) . \end{aligned} \quad (4.58)$$

Zur besseren Vergleichbarkeit mit der deviatorisch-volumetrischen Entkopplung bei elastoplastischem oder elastoviskoplastischem Stoffverhalten (siehe Abschnitt 5.5) ist die Einführung dieser Größen bereits hier sinnvoll. Aus den Beziehungen (4.58) wird

offensichtlich, daß der isochore Anteil \widehat{W} der Energiefunktion (4.14) alternativ als Funktion der isochoren logarithmischen Streckungen aufgefaßt werden kann.

Die Komponenten (4.57) sind beispielsweise in OGDEN [1982] gegeben. Die Aufspaltungen (4.56) ergeben sich direkt durch Einsetzen der Komponenten (4.57) in (4.52)₁ und (4.53)₁. Für den deviatorischen Anteil, der ausschließlich von den isochoren Hauptstreckungen abhängt, ist die Bedingung $\text{tr}\boldsymbol{\tau}^{\text{dev}} = 0$ stets erfüllt. Für den volumetrischen Anteil, der ausschließlich von der Dilatation abhängt, gilt $\tau^{\text{vol}} = \text{tr}\boldsymbol{\tau}/3$. Es wird deutlich, daß die räumliche Eigenvektorbasis \mathbf{n}_i nur durch den deviatorischen Anteil der Spannungen bestimmt ist. Der räumliche hydrostatische Anteil besitzt drei gleiche Eigenwerte τ^{vol} und jedes orthonormale Basissystem (und somit auch \mathbf{n}_i) ist Hauptachsensystem. Es sei angemerkt, daß hier die materiellen Tensoren $\mathbf{S}^{\text{dev}} = \boldsymbol{\varphi}_i^*[\boldsymbol{\tau}^{\text{dev}}]$ und $\mathbf{S}^{\text{vol}} = \boldsymbol{\varphi}_i^*[\tau^{\text{vol}}]$ als Pull-Back der räumlichen Tensoren definiert sind. In der Aufspaltung (2.43) tritt in einer materiellen Formulierung, d.h. mit dem 2. Piola-Kirchhoff Spannungstensor \mathbf{S} , anstelle der räumlichen Metrik \mathbf{g} der Rechte Cauchy-Green Tensor \mathbf{C} .

4.4 Elastische Stofftensoren

4.4.1 Herleitung der allgemeinen Gleichungen

In Abschnitt 2.3 wurden der materielle und räumliche Stofftensor eingeführt, ohne auf eine bestimmte Werkstoffklasse Bezug zu nehmen. Nun soll deren Spezifizierung auf isotropes hyperelastisches Werkstoffverhalten erfolgen. Im Spezialfall der Elastizität sind die kontinuierlichen und die inkrementellen Stofftensoren identisch. Es gilt $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{n+1}$ und $\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}$, d.h. bei der Linearisierung des Stoffgesetzes entsprechen die Steigungen des linearen Terms \mathcal{C}_{n+1} , $\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}$ den lokalen Steigungen \mathcal{C} , $\boldsymbol{\epsilon}$ am Linearisierungspunkt. Im folgenden wird deshalb nicht zwischen kontinuierlichen und inkrementellen Stofftensoren unterschieden.

Die Anwendung der materiellen Zeitableitung auf (4.49) liefert mit der Kettenregel und unter Beachtung der Abhängigkeit $\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathbf{C})$ die Beziehung

$$\dot{\mathbf{S}} = \mathcal{C} : \frac{1}{2} \dot{\mathbf{C}} = \mathcal{C} : \dot{\mathbf{E}} \quad \text{mit} \quad \mathcal{C} = 4 \partial_{\mathbf{C}\mathbf{C}}^2 W \quad . \quad (4.59)$$

Der elastische materielle Stofftensor ergibt sich durch zweifache Ableitung der Verzerrungsenergiefunktion nach dem Rechten Cauchy-Green Tensor. Der Formalismus zur Herleitung von (2.47) angewendet auf (4.59) führt zu

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}} = \boldsymbol{\epsilon} : \overset{\circ}{\mathbf{e}} \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\varphi}_{t*}[\mathcal{C}] = 4 \mathbf{b} \cdot \partial_{\mathbf{b}\mathbf{b}}^2 W \cdot \mathbf{b} = 4 \partial_{\mathbf{g}\mathbf{g}}^2 W \quad . \quad (4.60)$$

Der elastische räumliche Stofftensor ergibt sich durch zweifache Ableitung der Verzerrungsenergiefunktion nach dem Linken Cauchy-Green Tensor (MIEHE [1994]) bzw. nach dem räumlichen Metriktensor (SIMO & MARSDEN [1984]).

Wegen der Symmetrie des Rechten Cauchy-Green Tensors und des räumlichen Metriktensors und wegen der Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen folgen unmittelbar die Symmetrieeigenschaften

$$C^{IJKL} = C^{JIKL} = C^{IJLK} = C^{KLIJ} \quad \text{und} \quad c^{ijkl} = c^{jikl} = c^{ijlk} = c^{klij} .$$

Es existieren somit 21 unabhängige Komponenten je Stofftensor.

Alternativ folgt aus $\mathbf{P} = \partial_{\mathbf{F}}W$ die materielle Zeitableitung $\dot{\mathbf{P}} = \mathbb{A} : \dot{\mathbf{F}}$ mit dem Stofftensor $\mathbb{A} = \partial_{\mathbf{F}\mathbf{F}}^2W$. Da der Deformationsgradient nicht symmetrisch ist, kann lediglich die Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen ausgenutzt werden. Man erhält die Symmetriebedingung $A^{iJkL} = A^{kLiJ}$, die auf 45 unabhängige Komponenten des Stofftensors führt. Das heißt, die Berechnung wird dann wesentlich aufwendiger.

4.4.2 Spektraldarstellungen

Passend zur Formulierung der materiellen Verzerrungs- und Spannungsrate bezüglich der materiellen Eigenvektorbasis wird die Darstellung

$$\mathbb{C} = \sum_{i,j,k,l=1}^3 C_{ijkl} \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_j \otimes \mathbf{N}_k \otimes \mathbf{N}_l \quad (4.61)$$

angestrebt. Der Weg zur Berechnung der zugehörigen Koeffizienten wird hier kurz aufgezeigt (siehe auch CHADWICK & OGDEN [1971a,b], OGDEN [1984], REESE [1994]).

Auf der Grundlage von (4.61), (4.55) und (2.35) können unter Beachtung der Symmetrieeigenschaften die Komponenten C_{ijkl} durch Koeffizientenvergleich aus (4.59) gewonnen werden. Dabei ist die Ableitungsregel der Eigenwerte $\dot{S}_i = \sum_{k=1}^3 \dot{E}_k \partial_{E_k} S_i$ im Hauptachsenraum zu beachten. Da einige Komponenten verschwinden, ergibt sich für den materiellen Stofftensor die einfache Darstellung

$$\begin{aligned} \mathbb{C} = & \sum_{i,j=1}^3 C_{iijj} \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_j \otimes \mathbf{N}_j + \\ & \sum_{i,j=1, i \neq j}^3 C_{ijij} (\mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_j \otimes \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_j + \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_j \otimes \mathbf{N}_j \otimes \mathbf{N}_i) \end{aligned} \quad (4.62)$$

mit

$$C_{iijj} = \partial_{E_j} S_i = \lambda_i^{-1} \lambda_j^{-1} \left(\partial_{\lambda_j \lambda_i}^2 W - \delta_{ij} S_i \right) ,$$

$$C_{ijij} = \frac{1}{2} (E_i - E_j)^{-1} (S_i - S_j) = (\lambda_i^2 - \lambda_j^2)^{-1} (S_i - S_j) \quad (4.63)$$

$$\text{mit Grenzfall } \lim_{\lambda_i \rightarrow \lambda_j} C_{ijij} = \frac{1}{2} (C_{iiii} - C_{jjii}) \quad \text{für } i \neq j .$$

Die erste Summe in (4.62) verknüpft die Diagonalen von $\dot{\mathbf{S}}$ und $\dot{\mathbf{E}}$ und die zweite Summe deren Nebendiagonalen. Eine Kopplung von Diagonalen und Nebendiagonalen findet nicht statt. Im Fall gleicher Eigenwerte im Nenner von (4.63)₂ ist der Grenzübergang mit (4.63)₃ einfach durchführbar.

Der räumliche Stofftensor \mathfrak{c} folgt nach (4.60) aus der Push-Forward Transformation des materiellen Stofftensors. Man erhält allgemein

$$\mathfrak{c} = \sum_{i,j,k,l=1}^3 c_{ijkl} \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_j \otimes \mathbf{n}_k \otimes \mathbf{n}_l \quad \text{mit} \quad c_{ijkl} = \lambda_i \lambda_j \lambda_k \lambda_l C_{ijkl} . \quad (4.64)$$

Da nur die in (4.63) aufgeführten Komponenten des materiellen Stofftensors von null verschieden sind, ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathfrak{c} = & \sum_{i,j=1}^3 c_{iijj} \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_j \otimes \mathbf{n}_j + \\ & \sum_{i,j=1, i \neq j}^3 c_{ijij} (\mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_j \otimes \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_j + \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_j \otimes \mathbf{n}_j \otimes \mathbf{n}_i) \end{aligned} \quad (4.65)$$

mit

$$\begin{aligned} c_{iijj} &= \lambda_i \lambda_j \left(\partial_{\lambda_j \lambda_i}^2 W - \delta_{ij} \lambda_i^{-2} \tau_i \right) = -2\delta_{ij} \tau_i + \lambda_j \partial_{\lambda_j} \tau_i = -2\delta_{ij} \tau_i + \partial_{\epsilon_j} \tau_i , \\ c_{ijij} &= (\lambda_i^2 - \lambda_j^2)^{-1} (\tau_i \lambda_j^2 - \tau_j \lambda_i^2) \\ \text{mit Grenzfalle} \quad \lim_{\lambda_i \rightarrow \lambda_j} c_{ijij} &= \frac{1}{2} (c_{iiii} - c_{jjii}) \quad \text{für } i \neq j . \end{aligned} \quad (4.66)$$

In (4.53)₁ ist der materielle 2. Piola-Kirchhoff Spannungstensor \mathbf{S} mit räumlichen Komponenten τ_i dargestellt. Strebt man für den materiellen Stofftensor \mathfrak{C} eine Darstellung mit räumlichen Komponenten c_{ijkl} an, so muß (4.64)₂ in (4.62) eingesetzt werden:

$$\begin{aligned} \mathfrak{C} = & \sum_{i,j=1}^3 c_{iijj} (\lambda_i^{-1} \mathbf{N}_i) \otimes (\lambda_i^{-1} \mathbf{N}_i) \otimes (\lambda_j^{-1} \mathbf{N}_j) \otimes (\lambda_j^{-1} \mathbf{N}_j) + \\ & \sum_{i,j=1, i \neq j}^3 c_{ijij} [(\lambda_i^{-1} \mathbf{N}_i) \otimes (\lambda_j^{-1} \mathbf{N}_j) \otimes (\lambda_i^{-1} \mathbf{N}_i) \otimes (\lambda_j^{-1} \mathbf{N}_j) + \\ & \quad (\lambda_i^{-1} \mathbf{N}_i) \otimes (\lambda_j^{-1} \mathbf{N}_j) \otimes (\lambda_j^{-1} \mathbf{N}_j) \otimes (\lambda_i^{-1} \mathbf{N}_i)] . \end{aligned} \quad (4.67)$$

4.4.3 Deviatorisch-volumetrische Zerlegung

Analog zur in Abschnitt 4.3.3 eingeführten deviatorisch-volumetrischen Entkopplung der Spannungen können die elastischen Stofftensoren ebenfalls in deviatorische und volumetrische Anteile zerlegt werden:

$$\mathbb{C} = \mathbb{C}^{\text{dev}} + \mathbb{C}^{\text{vol}} \quad \text{und} \quad \mathfrak{c} = \mathfrak{c}^{\text{dev}} + \mathfrak{c}^{\text{vol}} \quad . \quad (4.68)$$

Hierzu muß die Beziehung (4.57) in die Komponenten (4.66) eingesetzt und ausgewertet werden. Da im weiteren ausschließlich die Darstellungen (4.65) und (4.67) zugrunde gelegt werden, genügt die Angabe der räumlichen Komponenten des Stofftensors:

$$\begin{aligned} c_{iijj} &= c_{iijj}^{\text{dev}} + c_{iijj}^{\text{vol}} \\ \text{mit } c_{iijj}^{\text{dev}} &= -2\delta_{ij}\tau_i^{\text{dev}} + \lambda_j\partial_{\lambda_j}\tau_i^{\text{dev}} = -2\delta_{ij}\tau_i^{\text{dev}} + \partial_{\epsilon_j}\tau_i^{\text{dev}} \\ \text{mit } c_{iijj}^{\text{vol}} &= -2\delta_{ij}\tau^{\text{vol}} + \lambda_j\partial_{\lambda_j}\tau^{\text{vol}} = -2\delta_{ij}\tau^{\text{vol}} + \partial_{\epsilon_j}\tau^{\text{vol}} \quad , \\ c_{ijij} &= c_{ijij}^{\text{dev}} + c_{ijij}^{\text{vol}} \\ \text{mit } c_{ijij}^{\text{dev}} &= (\hat{\lambda}_i^2 - \hat{\lambda}_j^2)^{-1} (\hat{\lambda}_j^2\tau_i^{\text{dev}} - \hat{\lambda}_i^2\tau_j^{\text{dev}}) \\ \text{Grenzfall } \lim_{\lambda_i \rightarrow \lambda_j} c_{ijij}^{\text{dev}} &= \frac{1}{2}(c_{iii}^{\text{dev}} - c_{jji}^{\text{dev}}) \quad \text{für } i \neq j \\ \text{mit } c_{ijij}^{\text{vol}} &= -\tau^{\text{vol}} \\ \text{Grenzfall } \lim_{\lambda_i \rightarrow \lambda_j} c_{ijij}^{\text{vol}} &= \frac{1}{2}(c_{iii}^{\text{vol}} - c_{jji}^{\text{vol}}) \quad \text{für } i \neq j \quad . \end{aligned} \quad (4.69)$$

Die darin enthaltenen Ableitungen der Spannungen

$$\begin{aligned} \partial_{\epsilon_j}\tau_i &= \partial_{\epsilon_j}\tau_i^{\text{dev}} + \partial_{\epsilon_j}\tau^{\text{vol}} \quad , \\ \partial_{\epsilon_j}\tau_i^{\text{dev}} &= \partial_{\epsilon_i}\tau_j^{\text{dev}} = \partial_{\epsilon_i\epsilon_j}^2 \widehat{W} = \partial_{\hat{\epsilon}_i\hat{\epsilon}_j}^2 \widehat{W} - \frac{1}{3} \sum_{k=1}^3 (\partial_{\hat{\epsilon}_i\hat{\epsilon}_k}^2 \widehat{W} + \partial_{\hat{\epsilon}_j\hat{\epsilon}_k}^2 \widehat{W}) + \frac{1}{9} \sum_{k,l=1}^3 \partial_{\hat{\epsilon}_k\hat{\epsilon}_l}^2 \widehat{W} \quad , \\ \partial_{\epsilon_j}\tau^{\text{vol}} &= \partial_{\epsilon_i\epsilon_j}^2 U = \tau^{\text{vol}} + J^2 \partial_{JJ}^2 U \end{aligned} \quad (4.70)$$

sind als Folge der additiven Aufspaltung (4.57) ebenfalls in einen deviatorischen und einen volumetrischen Anteil entkoppelt. Wie deutlich erkennbar ist, hängt der deviatorische Anteil in (4.69) ausschließlich von den isochoren Hauptstreckungen ab und der volumetrische Anteil hängt ausschließlich von der Dilatation ab. Der Grenzfall identischer Hauptstreckungen — die isochoren Hauptstreckungen sind dann ebenfalls identisch — kann direkt aus (4.66) auf den entkoppelten Fall übertragen werden. Die Aufspaltungen (4.68) ergeben sich direkt durch Einsetzen der Komponenten (4.69) in (4.65) und (4.67).

4.5 Algorithmus für elastische Werkstoffe

Finite Elemente werden in der Regel entweder in der Referenz- oder in der Momentan-konfiguration formuliert. Deshalb müssen die werkstoffabhängigen Größen, d.h. Spannungstensor und inkrementeller Stofftensor, entweder in materieller oder räumlicher Formulierung zur Verfügung gestellt werden. Ziel ist es, einen Werkstoffalgorithmus zu finden, der beide Formulierungen beinhaltet, ohne daß zu viele Fallunterscheidungen getroffen werden müssen.

Der Vergleich des Kirchhoff Spannungstensors (4.52) mit dem 2. Piola-Kirchhoff Spannungstensor (4.53)₁ zeigt die Übereinstimmung in den Komponenten τ_i bei einem Wechsel der Basisvektoren \mathbf{n}_i nach $\lambda_i^{-1} \mathbf{N}_i$. Der räumliche Stofftensor (4.65) und der materielle Stofftensor (4.67) besitzen in Analogie zu den Spannungstensen ebenfalls eine Übereinstimmung in den Komponenten und einen Wechsel in der Basis. Der Basiswechsel kann mittels $\lambda_i^{-1} \mathbf{N}_i = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{n}_i$ aus (4.53)₂ einfach durchgeführt werden, da sich beide Basen lediglich durch das Tensorprodukt mit dem (inversen) Deformationsgradienten unterscheiden.

Das Grundkonzept des Werkstoffalgorithmus wird in Tafel 4.3 vorgestellt. Alle Größen werden zunächst basierend auf der räumlichen Formulierung berechnet. Wird dann die räumliche Formulierung gewünscht, bleibt die Basis unverändert erhalten. Wird jedoch die materielle Formulierung gewünscht, so muß mit Hilfe des Deformationsgradienten der Basiswechsel durchgeführt werden. Im Werkstoffalgorithmus wird nur an einer Stelle, nämlich bei der Wahl der Basis, eine Fallunterscheidung getroffen. Der Faktor β besitzt rein „kosmetischen“ Charakter, da bei räumlichen Finite Element Formulierungen vorzugsweise mit den Cauchyschen Spannungen $\boldsymbol{\sigma}$ und dem Stofftensor $\boldsymbol{\epsilon}^*$ statt mit $\boldsymbol{\tau}$ und $\boldsymbol{\epsilon}$ gearbeitet wird.

Für den Sonderfall der additiven deviatorisch-volumetrischen Zerlegung (siehe Abschnitte 4.3.3 und 4.4.3) muß der Algorithmus in Tafel 4.3 nur unwesentlich modifiziert werden. Anstatt der Gesamtkomponenten sind dann die entkoppelten Spannungskomponenten (4.57) und die entkoppelten Moduli (4.69) zu verwenden. Damit sind der Spannungstensor und der Stofftensor in Punkt 4 der Tafel 4.3 ebenfalls entkoppelt.

1. Berechne \mathbf{F} .
2. a) Berechne \mathbf{b} (2.19).
 b) Berechne λ_i und \mathbf{n}_i aus Spektralzerlegung von \mathbf{b} (2.28)₂.
 c) Berechne τ_i (4.52)₂, c_{iijj} , c_{ijij} (4.66).
3. Wahl der Konfiguration (Momentan- oder Referenzkonfiguration):
 Mom \rightarrow Berechne $J = \det \mathbf{F}$ und setze $\mathbf{m}_i = \mathbf{n}_i$, $\beta = J^{-1}$.
 Ref \rightarrow Berechne \mathbf{F}^{-1} und setze $\mathbf{m}_i = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{n}_i$, $\beta = 1$.
4. Berechne die der gewählten Konfiguration zugeordneten Spannungs- und Stofftensoren:
 Mom $\rightarrow \boldsymbol{\sigma} = J^{-1} \boldsymbol{\tau}$ }
 Ref $\rightarrow \mathbf{S}$ } = $\beta \sum_{i=1}^3 \tau_i \mathbf{m}_i \otimes \mathbf{m}_i$,
 Mom $\rightarrow \boldsymbol{\epsilon}^* = J^{-1} \boldsymbol{\epsilon}$ }
 Ref $\rightarrow \boldsymbol{\mathcal{C}}$ } = $\beta \sum_{i,j=1}^3 c_{iijj} \mathbf{m}_i \otimes \mathbf{m}_i \otimes \mathbf{m}_j \otimes \mathbf{m}_j +$
 $\beta \sum_{i \neq j} c_{ijij} (\mathbf{m}_i \otimes \mathbf{m}_j \otimes \mathbf{m}_i \otimes \mathbf{m}_j +$
 $\mathbf{m}_i \otimes \mathbf{m}_j \otimes \mathbf{m}_j \otimes \mathbf{m}_i) .$

Tafel 4.3: Algorithmus für elastische Werkstoffe bei einer wahlweise räumlichen (Mom) oder materiellen (Ref) Formulierung.

Kapitel 5

Elastoplastizität

In jüngerer Zeit gewinnen Problemstellungen an Bedeutung, die sich sowohl durch große plastische und als auch durch große elastische Deformationsanteile auszeichnen. Dabei nimmt die Einführung einer plastischen Zwischenkonfiguration in Verbindung mit einer multiplikativen elastoplastischen Aufteilung des Deformationsgradienten eine zentrale Stellung ein. Formulierungen mit einer additiven elastoplastischen Aufteilung von Verzerrungstensoren können zwar ebenfalls auf der Basis einer plastischen Zwischenkonfiguration motiviert werden, müssen aber kritisch bezüglich der Definition einer sinnvollen Energiefunktion beurteilt werden. Alternative Formulierungen auf der Basis hypoelastischer Teilstoffgesetze sind bei großen elastischen Deformationen ebenfalls kritisch zu betrachten, da hierbei die elastische Verzerrungsenergie von der Deformationsgeschichte abhängen kann. Dies widerspricht den einleitenden Bemerkungen in Kapitel 4, da die elastische Verzerrungsenergie per Definition als geschichtsunabhängig eingeführt ist. Die im folgenden beschriebene Formulierung ist konform mit der multiplikativen Aufteilung des Deformationsgradienten und den thermodynamischen Grundprinzipien. Bei der algorithmischen Umsetzung der Formulierung für eine Finite Element Implementierung müssen keine zusätzlichen Voraussetzungen (z.B. verschwindender plastischer Spin) getroffen werden.

Ausgangspunkt für die folgenden Darstellungen ist eine ausführliche Diskussion der Kinematik multiplikativer Elastoplastizität. Zur Beschreibung des isotropen Werkstoffverhaltens wird dabei eine räumliche Formulierung gewählt und es werden die Existenz einer Energiefunktion mit hyperelastischem Anteil sowie das Prinzip der maximalen plastischen Dissipation vorausgesetzt. Daraus abgeleitet ergeben sich die Spannungen, die Verfestigungsfunktionen und die Evolutionsgleichungen. Die Integration der Evolutionsgleichungen erfolgt dann mit dem Standardproduktalgorithmus aus elastischem Prädiktor und plastischem Korrektor in Kombination mit einem Integrationsoperator des Exponentialtyps. Anschließend werden die elastoplastischen Stofftensoren hergeleitet. Unter Voraussetzung einer deviatorischen Fließbedingung können der Spannungstensor und der Stofftensor additiv in einen deviatorischen und einen volumetrischen Anteil zerlegt werden. Abschließend erfolgt die Zusammenfassung in einem Algorithmus für elastoplastische Werkstoffe, der trotz einer räumlichen

Formulierung des Stoffgesetzes sowohl für materielle als auch räumliche Formulierungen der Kinematik verwendet werden kann.

Um einen Einblick in den Themenbereich der numerischen Behandlung der zeitunabhängigen Elastoplastizität bei großen Deformationen zu geben, werden nachfolgend einige Hinweise zum Schrifttum gegeben. In den Arbeiten von SIMO [1985] und SIMO & ORTIZ [1985] erfolgt die Formulierung des elastischen Teilstoffgesetzes auf der Basis einer Energiefunktion. Ausgehend von der multiplikativen Aufspaltung des Deformationsgradienten in einen elastischen und einen plastischen Anteil wird jedoch die additive Aufspaltung der Verzerrungstensoren motiviert und daraus die additive Aufspaltung der symmetrischen Anteile der Geschwindigkeitsgradienten abgeleitet. Von SIMO [1988a,b] wird dann eine vollständig multiplikative Formulierung der Elastoplastizität entwickelt (siehe auch MÜLLER-HOEPPE [1990], MÜLLER-HOEPPE & STEIN [1992]). In der Arbeit von MORAN, ORTIZ & SHIH [1990] werden ebenfalls numerische Aspekte der multiplikativen Elastoplastizität behandelt. Wesentliche Inhalte der Veröffentlichungen von ETEROVIC & BATHE [1990], WEBER & ANAND [1990] und PERIĆ, OWEN & HONNOR [1992] sind einerseits die Verwendung elastischer logarithmischer Verzerrungen, die eine einfache numerische Umsetzung der multiplikativen Elastoplastizitätstheorie ermöglichen, und andererseits die Einführung eines impliziten Exponentialoperators zur Integration des plastischen Teilstoffgesetzes. Durch die Verwendung des exponentiellen Integrationsoperators wird die Formulierung der isotropen Elastoplastizität in Eigenwerten und Eigenvektoren motiviert. In der Arbeit von SIMO [1992] wird konsequent eine Eigenwertdarstellung in geschlossener Form verfolgt. Die Verwendung elastischer logarithmischer Streckungen führt dabei trotz großer Verzerrungen — in Analogie zur Elastoplastizität bei kleinen Verzerrungen — auf eine Implementierung mit additiver Aufdatierung im plastischen Korrektor (siehe auch CUITIÑO & ORTIZ [1992]). Zur Behandlung thermoplastischen Stoffverhaltens bei großen Deformationen sei in diesem Zusammenhang auf die Arbeiten von SIMO & MIEHE [1992], MIEHE [1993] und MIEHE [1995] verwiesen. Die Arbeit von SIMO [1992] bildet die Grundlage des Berichtes von SCHELLEKENS & PARISCH [1994b] sowie den Veröffentlichungen von WRIGGERS, EBERLEIN & REESE [1996] und REESE & WRIGGERS [1997]. Im Gegensatz zur ursprünglich geschlossenen Eigenvektordarstellung wird von den letztgenannten Autoren eine explizite Berechnung der Eigenvektorbasis vorgeschlagen. Erwähnenswert ist ebenfalls die Arbeit von IBRAHIMBEGOVIĆ [1994], welche sowohl die räumliche als auch die materielle Beschreibung der Elastoplastizität behandelt.

Da elastoplastische Stoffgesetze für den dreidimensionalen Fall algorithmisch wesentlich einfacher umgesetzt werden können als für den degenerierten Fall, gewinnen Schalenformulierungen, die den dreidimensionalen Spannungszustand beschreiben können, zunehmend an Bedeutung. Beiträge zur Formulierung der Elastoplastizität in Kombination mit 3D-Schalen sind beispielsweise SEIFERT [1996], EBERLEIN [1997], MIEHE [1997] und HAUPTMANN, SCHWEIZERHOF & DOLL [1998].

Lehrbücher zur Plastizität neueren Datums sind beispielsweise LUBLINER [1990], LEMAITRE & CHABOCHE [1990], MAUGIN [1992]. In einem Kapitel des Lehrbuchs von CRISFIELD [1997] wird auf die Numerik der Plastizität bei großen Deformationen

eingegangen. Mit Hinblick auf die numerische Umsetzung der Plastizitätstheorie ist insbesondere das Lehrbuch von SIMO & HUGHES [1998] hervorzuheben, welches dem Autor jedoch nur als Vorveröffentlichung vorliegt.

Die oben angegebenen aktuellen Hinweise zum Schrifttum erheben nicht den Anspruch auf Vollständigkeit. In den genannten Arbeiten sind viele weiterführende Verweise gegeben, die einen umfassenderen Einblick in die Thematik ermöglichen.

Es sei angemerkt, daß der bei der zeitunabhängigen Formulierung der Elastoplastizität auftretende Parameter t — analog zur Elastizität — die Rolle eines Kurvenparameters übernimmt. Er dient lediglich zur Steuerung der Lastgeschichte und darf nicht mit der tatsächlichen Zeit, wie sie bei der Formulierung zeitabhängiger Werkstoffgesetze auftritt, verwechselt werden.

5.1 Kinematik multiplikativer Elastoplastizität

Von KRÖNER [1960], LEE & LIU [1967], LEE [1969] wurde die multiplikative Aufspaltung des Deformationsgradienten

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \cdot \mathbf{F}^p \quad (5.1)$$

in einen elastischen Anteil \mathbf{F}^e und einen plastischen Anteil \mathbf{F}^p eingeführt. Dadurch wird implizit eine plastische Zwischenkonfiguration $\tilde{\mathbf{x}}$ mit

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}} &= \varphi_t^p(\mathbf{X}) & , \quad \mathbf{F}^p &= \partial_{\mathbf{X}} \varphi_t^p(\mathbf{X}) \quad , \\ \mathbf{x} &= \varphi_t^e(\tilde{\mathbf{x}}) = \varphi_t^e(\varphi_t^p(\mathbf{X})) = \varphi_t(\mathbf{X}) & , \quad \mathbf{F}^e &= \partial_{\tilde{\mathbf{x}}} \varphi_t^e(\tilde{\mathbf{x}}) \end{aligned}$$

und einer zugehörigen Metrik definiert (vgl. Abschnitte 2.1.1 und 2.1.2). Die konvektiven kovarianten Basisvektoren $\tilde{\mathbf{g}}_i$ auf der Zwischenkonfiguration besitzen die dualen kontravarianten Basisvektoren $\tilde{\mathbf{g}}^j$ mit der Orthogonalitätseigenschaft $\tilde{\mathbf{g}}_i \cdot \tilde{\mathbf{g}}^j = \delta_i^j$. Der kovariante Metriktensor ist durch $\tilde{\mathbf{g}} = \tilde{g}_{ij} \tilde{\mathbf{g}}^i \otimes \tilde{\mathbf{g}}^j$ mit $\tilde{g}_{ij} = \tilde{\mathbf{g}}_i \cdot \tilde{\mathbf{g}}_j$ gegeben. Basierend auf den konvektiven Basisvektoren ergibt sich die Darstellung

$$\mathbf{F} = \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}^i = \mathbf{F}^e \cdot \mathbf{F}^p \quad \text{mit} \quad \mathbf{F}^e = \mathbf{g}_i \otimes \tilde{\mathbf{g}}^i \quad \text{und} \quad \mathbf{F}^p = \tilde{\mathbf{g}}_j \otimes \mathbf{G}^j$$

des Deformationsgradienten. Die Bildung der Transponierten und der Inversen des elastischen und plastischen Deformationsgradienten erfolgt dabei in Analogie zu (2.8). Hier und im folgenden sind in der Zwischenkonfiguration definierte Größen mit einer Tilde gekennzeichnet.

Wird ein Körper global derart belastet, daß eine nichthomogene plastische Deformation $\mathbf{F}^p \neq \mathbf{1}$ vorliegt, und anschließend wieder global entlastet, so verbleiben residuelle Spannungen im Körper, da sich lokal nicht der Zustand $\mathbf{F}^e = \mathbf{1}$ einstellen kann. Der spannungsfreie Zustand wird nur erhalten, wenn nach der globalen Entlastung die materiellen Punkte lokal freigeschnitten werden und sich lokal der Zustand $\mathbf{F}^e = \mathbf{1}$ einstellen kann. Diese spannungsfreie Konfiguration ist diskontinuierlich, d.h. nicht kompatibel.

Der Deformationsgradient bildet laut (2.7) und (2.9) materielle auf räumliche Linienelemente ab. Durch die multiplikative Aufspaltung wird zunächst das Linienelement der Referenzkonfiguration auf ein plastisches Linienelement der Zwischenkonfiguration transformiert. Diese Operation entspricht einem plastischen Push-Forward. Danach erfolgt die Abbildung des plastischen Linienelementes der Zwischenkonfiguration auf ein elastoplastisches Linienelement der Momentankonfiguration. Diese Operation entspricht einem elastischen Push-Forward:

$$\begin{aligned} d\tilde{\mathbf{x}} &= \boldsymbol{\varphi}_*^p[d\mathbf{X}] = \mathbf{F}^p \cdot d\mathbf{X} \quad , \\ d\mathbf{x} &= \boldsymbol{\varphi}_*^e[d\tilde{\mathbf{x}}] = \mathbf{F}^e \cdot d\tilde{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\varphi}_*^e[\boldsymbol{\varphi}_*^p[d\mathbf{X}]] = \boldsymbol{\varphi}_{t*}^e[d\mathbf{X}] \quad . \end{aligned}$$

Basierend auf den Definitionen (2.18), (2.19) und (2.21) können die plastischen und elastischen Cauchy-Green Tensoren

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^p &= \mathbf{F}^{pT} \cdot \tilde{\mathbf{g}} \cdot \mathbf{F}^p = \mathbf{F}^{pT} \cdot \mathbf{F}^p \quad \text{d.h.} \quad \mathbf{C}^p = \boldsymbol{\varphi}^{p*}[\tilde{\mathbf{g}}] \quad , \\ \tilde{\mathbf{C}}^e &= \mathbf{F}^{eT} \cdot \mathbf{g} \cdot \mathbf{F}^e = \mathbf{F}^{eT} \cdot \mathbf{F}^e \quad \text{d.h.} \quad \tilde{\mathbf{C}}^e = \boldsymbol{\varphi}^{e*}[\mathbf{g}] \quad , \\ \tilde{\mathbf{b}}^p &= \mathbf{F}^p \cdot \mathbf{G}^{-1} \cdot \mathbf{F}^{pT} = \mathbf{F}^p \cdot \mathbf{F}^{pT} \quad \text{d.h.} \quad \tilde{\mathbf{b}}^{p-1} = \boldsymbol{\varphi}_*^p[\mathbf{G}] \quad , \\ \mathbf{b}^e &= \mathbf{F}^e \cdot \tilde{\mathbf{g}}^{-1} \cdot \mathbf{F}^{eT} = \mathbf{F}^e \cdot \mathbf{F}^{eT} \quad \text{d.h.} \quad \mathbf{b}^{e-1} = \boldsymbol{\varphi}_*^e[\tilde{\mathbf{g}}] \end{aligned} \quad (5.2)$$

eingeführt werden. Der kovariante plastische Rechte Cauchy-Green Tensor \mathbf{C}^p ist auf der Referenzkonfiguration definiert und ergibt sich aus dem plastischen Pull-Back der Metrik der Zwischenkonfiguration. Der kontravariante elastische Linke Cauchy-Green Tensor \mathbf{b}^e ist auf der Momentankonfiguration definiert. Seine Inverse resultiert aus dem elastischen Push-Forward der Metrik der Zwischenkonfiguration. Der kovariante elastische Rechte Cauchy-Green Tensor $\tilde{\mathbf{C}}^e$ und der kontravariante plastische Linke Cauchy-Green Tensor $\tilde{\mathbf{b}}^p$ sind auf der Zwischenkonfiguration definiert. $\tilde{\mathbf{C}}^e$ entsteht aus dem elastischen Pull-Back der Metrik der Momentankonfiguration. Die Inverse von $\tilde{\mathbf{b}}^p$ ist der plastische Push-Forward der Metrik der Referenzkonfiguration.

Die multiplikative Aufspaltung (5.1) ist nicht eindeutig, da die Zwischenkonfiguration bis auf eine eigentlich orthogonale Drehung $\mathbf{Q} \in SO(3)$ unbestimmt ist:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = \mathbf{F}^e \cdot \mathbf{F}^p = \bar{\mathbf{F}}^e \cdot \bar{\mathbf{F}}^p \quad \text{mit} \quad \bar{\mathbf{F}}^e &= \mathbf{F}^e \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{g}_i \otimes (\mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{g}}^i) = \mathbf{g}_i \otimes \bar{\tilde{\mathbf{g}}}^i \\ \text{und} \quad \bar{\mathbf{F}}^p &= \mathbf{Q} \cdot \mathbf{F}^p = (\mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{g}}_j) \otimes \mathbf{G}^j = \bar{\tilde{\mathbf{g}}}_j \otimes \mathbf{G}^j. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Größen, welche die unbestimmte Drehung beinhalten, sind mit einem Querstrich gekennzeichnet. Die Metrik auf der gedrehten Zwischenkonfiguration besitzt unveränderte Metrikkoeffizienten $\bar{\tilde{g}}_{ij} = \tilde{g}_{ij}$, aber die Basisvektoren werden mittels $\bar{\tilde{\mathbf{g}}}^i = \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{g}}^i$ gedreht. Die Linienelemente

$$d\bar{\tilde{\mathbf{x}}} = \bar{\mathbf{F}}^p \cdot d\mathbf{X} \neq d\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{F}^p \cdot d\mathbf{X}$$

auf der Zwischenkonfiguration sind unbestimmt, da sie von der Drehung abhängen. Definiert man die in (5.2) eingeführten Cauchy-Green Tensoren mittels der Deformationsgradienten $\bar{\mathbf{F}}^e$ und $\bar{\mathbf{F}}^p$ und vergleicht sie mit den ursprünglichen Definitionen, so erhält man

$$\mathbf{C}^p = \bar{\mathbf{C}}^p \quad , \quad \tilde{\mathbf{C}}^e \neq \bar{\tilde{\mathbf{C}}}^e \quad , \quad \tilde{\mathbf{b}}^p \neq \bar{\tilde{\mathbf{b}}}^p \quad , \quad \mathbf{b}^e = \bar{\mathbf{b}}^e \quad . \quad (5.4)$$

Das heißt, der materielle Tensor \mathbf{C}^p und der räumliche Tensor \mathbf{b}^e sind von der Drehung unabhängig und deshalb eindeutig. Die Referenz- und die Momentankonfiguration werden folglich durch die Drehung der Zwischenkonfiguration nicht beeinflusst. Die auf der Zwischenkonfiguration definierten Tensoren $\tilde{\mathbf{C}}^e$ und $\tilde{\mathbf{b}}^p$ sind nicht eindeutig, da die Metrik der Zwischenkonfiguration gedreht wird.

Um nun eine künstliche Abhängigkeit des elastoplastischen Werkstoffverhaltens von der unbestimmten Zwischenkonfiguration zu vermeiden, ist eine Formulierung des Stoffgesetzes basierend auf \mathbf{C}^p oder \mathbf{b}^e anzustreben. Im Vorgriff auf Abschnitt 5.2.1 sei bereits an dieser Stelle erwähnt, daß die Definition des hyperelastischen Anteils der Energiefunktion in Abhängigkeit des elastischen Tensors \mathbf{b}^e naheliegend ist und zu dem gewünschten Ergebnis führt. Diese Tensoren

$$\begin{aligned}\mathbf{b}^{e-1} &= \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{C}^p \cdot \mathbf{F}^{-1} = \varphi_{t*}[\mathbf{C}^p] \quad , \\ \mathbf{C}^p &= \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{b}^{e-1} \cdot \mathbf{F} = \varphi_t^*[\mathbf{b}^{e-1}]\end{aligned}$$

stehen über Push-Forward und Pull-Back Operationen miteinander in Beziehung. Die Tensoren \mathbf{C}^p und \mathbf{b}^{e-1} sind kovariant.

Abschließend werden die Singulärwertzerlegungen

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \cdot \mathbf{F}^p \quad \text{mit} \quad \mathbf{F}^e = \sum_{i=1}^3 \lambda_i^e \mathbf{n}_i \otimes \tilde{\mathbf{n}}_i \quad \text{und} \quad \mathbf{F}^p = \sum_{j=1}^3 \lambda_j^p \tilde{\mathbf{n}}_j \otimes \mathbf{N}_j \quad (5.5)$$

des elastischen und plastischen Deformationsgradienten eingeführt. Die Hauptstreckungen $\lambda_i = \lambda_i^e \lambda_i^p$ setzen sich dabei multiplikativ aus einem elastischen und einem plastischen Anteil zusammen. Dadurch ergibt sich automatisch die multiplikative Aufspaltung

$$J = \det \mathbf{F} = J^e J^p \quad \text{mit} \quad J^e = \det \mathbf{F}^e = \lambda_1^e \lambda_2^e \lambda_3^e \quad \text{und} \quad J^p = \det \mathbf{F}^p = \lambda_1^p \lambda_2^p \lambda_3^p \quad (5.6)$$

der Determinante des Deformationsgradienten in einen elastischen und einen plastischen Anteil. Die Eigenvektorbasis der Zwischenkonfiguration wird mit $\tilde{\mathbf{n}}_i$ bezeichnet. Der Metriktensor auf der Zwischenkonfiguration wird zum Einheitstensor

$$\tilde{\mathbf{g}} = \sum_{i=1}^3 \tilde{\mathbf{n}}_i \otimes \tilde{\mathbf{n}}_i \quad (5.7)$$

bezüglich der Eigenvektorbasis der Zwischenkonfiguration. Die Definitionen (5.2) führen mit (5.5) und (5.7) auf die Spektraldarstellungen der plastischen und elastischen Cauchy-Green Tensoren:

$$\begin{aligned}\mathbf{C}^p &= \sum_{i=1}^3 (\lambda_i^p)^2 \mathbf{N}_i \otimes \mathbf{N}_i \quad , \quad \tilde{\mathbf{C}}^e = \sum_{i=1}^3 (\lambda_i^e)^2 \tilde{\mathbf{n}}_i \otimes \tilde{\mathbf{n}}_i \quad , \\ \tilde{\mathbf{b}}^p &= \sum_{i=1}^3 (\lambda_i^p)^2 \tilde{\mathbf{n}}_i \otimes \tilde{\mathbf{n}}_i \quad , \quad \mathbf{b}^e = \sum_{i=1}^3 (\lambda_i^e)^2 \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i \quad .\end{aligned} \quad (5.8)$$

An der Tensorbasis ist offensichtlich zu erkennen, bezüglich welcher Konfiguration die einzelnen Tensoren definiert sind. Wie bereits in (5.3) angegeben, ist die Zwischenkonfiguration und somit auch deren Eigenvektorbasis unbestimmt. Für die gedrehte Eigenvektorbasis der Zwischenkonfiguration gilt dann $\tilde{\tilde{\mathbf{n}}}_i = \mathbf{Q} \cdot \tilde{\mathbf{n}}_i$. Die Verwendung der gedrehten Eigenvektorbasis führt auf äquivalente Aussagen wie (5.4).

Nachdem nun die wesentlichen kinematischen Größen der multiplikativen Elastoplastizität eingeführt sind, wird im folgenden Abschnitt das elastoplastische Werkstoffverhalten beschrieben. Die grundlegenden Schritte dabei sind die Definition einer Energiefunktion und einer Fließbedingung sowie die Anwendung des Prinzips der maximalen plastischen Dissipation.

5.2 Beschreibung des Werkstoffverhaltens

5.2.1 Energiedichtefunktion

Im Fall der multiplikativen Elastoplastizität soll zunächst angenommen werden, daß die in Abschnitt 3.3 eingeführte Energiefunktion (3.15) lokal ausschließlich vom elastischen Deformationsgradienten

$$W = W(\mathbf{F}^e)$$

abhängt, d.h. plastische Anteile sollen zunächst nicht berücksichtigt werden. Die hier skizzierte Vorgehensweise (siehe auch MIEHE [1993]) entspricht formal der Vorgehensweise aus Abschnitt 4.1.1 mit dem Unterschied, daß hier immer mit elastischen Teilgrößen anstatt mit Gesamtgrößen gearbeitet wird. Das Prinzip der materiellen Objektivität führt auf die Abhängigkeit

$$W = W(\tilde{\mathbf{C}}^e) .$$

Die Voraussetzung isotropen Werkstoffverhaltens ist nur erfüllt, wenn die Energiedichte eine Funktion der drei Grundinvarianten bzw. der drei Eigenwerte (siehe (5.8)₂) des elastischen Rechten Cauchy-Green Tensors ist:

$$W = W(\tilde{\mathbf{C}}^e) = W(I_{\tilde{\mathbf{C}}^e}, II_{\tilde{\mathbf{C}}^e}, III_{\tilde{\mathbf{C}}^e}) = W(\lambda_1^e, \lambda_2^e, \lambda_3^e) .$$

Wie den Spektraldarstellungen (5.8) zu entnehmen ist, besitzen die beiden elastischen Tensoren $\tilde{\mathbf{C}}^e$ und \mathbf{b}^e dieselben Eigenwerte und somit auch dieselben Invarianten. Da der auf der Zwischenkonfiguration definierte elastische Rechte Cauchy-Green Tensor $\tilde{\mathbf{C}}^e$ nicht eindeutig ist, ist bei Voraussetzung von Isotropie der Darstellung in Abhängigkeit des eindeutigen elastischen Linken Cauchy-Green Tensors \mathbf{b}^e der Vorzug zu geben. Deshalb wird für alle weiteren Betrachtungen die Darstellung

$$W = W(\mathbf{b}^e) = W(\lambda_1^e, \lambda_2^e, \lambda_3^e) \quad \text{bzw.} \quad W = W(\mathbf{b}^e) = W(I_{\mathbf{b}^e}, II_{\mathbf{b}^e}, III_{\mathbf{b}^e}) \quad (5.9)$$

zugrunde gelegt. Damit entfällt die Voraussetzung, daß der plastische Spin verschwindet (siehe EBERLEIN [1997]). Die Darstellung (5.9)₁ in elastischen Hauptstreckungen

besitzt außerdem den Vorteil, daß sie im Vergleich zu anderen Darstellungen sehr anschaulich ist. Die räumliche Formulierung der Plastizität in diesem Kapitel ist eine Folge der Wahl von \mathbf{b}^e als Argument der Energiefunktion.

Die Energiefunktion (5.9) kann analog zu den Fällen kompressibel, inkompressibel, nahezu inkompressibel und kompressibel isochor-volumetrisch entkoppelt nach Abschnitt 4.1.1 weiter spezifiziert werden. Dabei ist jedoch zu beachten, daß stets ausschließlich die elastischen Anteile berücksichtigt werden dürfen. Für $\mathbf{F}^p = \mathbf{1}$ gilt $\mathbf{b} = \mathbf{b}^e$, d.h. die Darstellungen (4.5) und (5.9) sind für den Sonderfall rein elastischer Deformationen identisch. Diese Identität ist aus physikalischer Sicht sinnvoll.

Bei der Herleitung von (5.9) wurde vorausgesetzt, daß die Energiefunktion zunächst von elastischen Deformationsgrößen abhängt und nur das elastische Werkstoffverhalten beschreibt. Mit der Energiefunktion W sollte jedoch das gesamte elastoplastische Werkstoffverhalten beschrieben werden. Um auch Effekte (z.B. Verfestigung) berücksichtigen zu können, die durch Veränderungen im Werkstoff aufgrund plastischer Deformation hervorgerufen werden, müssen in der Energiefunktion daher weitere Zustandsgrößen berücksichtigt werden. Diese Zustandsgrößen werden als innere plastische Variablen bezeichnet, da sie von außen nicht direkt beobachtbar sind. Die zur Beschreibung des plastischen Werkstoffverhaltens erforderlichen inneren Variablen können als skalarwertige Größe ξ (äquivalente plastische Verzerrung für isotrope Verfestigung) oder als tensorwertige Größe $\boldsymbol{\xi}$ (für kinematische Verfestigung) aufgefaßt werden. Basierend auf (5.9) ergibt sich die Energiedichte dann als Funktion

$$W = W(\mathbf{b}^e, \xi, \boldsymbol{\xi})$$

des elastischen Linken Cauchy-Green Tensors \mathbf{b}^e und der inneren plastischen Variablen ξ , $\boldsymbol{\xi}$ (vgl. COLEMAN & GURTIN [1967], PERZYNA [1971]). Das Prinzip der materiellen Objektivität und die Voraussetzung von Isotropie erfordern die Einhaltung der Bedingung

$$W(\mathbf{b}^e, \xi, \boldsymbol{\xi}) = W(\mathbf{b}^e, \xi, \mathbf{Q} \cdot \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{Q}^T)$$

mit $\mathbf{Q} \in SO(3)$, d.h. die Energiedichte

$$W(\mathbf{b}^e, \xi, \boldsymbol{\xi}) = W(\lambda_1^e, \lambda_2^e, \lambda_3^e, \xi, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$$

ist eine Funktion der Eigenwerte von \mathbf{b}^e und $\boldsymbol{\xi}$.

Eine oft gebräuchliche Annahme ist die additive Entkopplung der Energiedichtefunktion

$$W = W^e(\mathbf{b}^e) + \underbrace{W_1^p(\xi) + W_2^p(\boldsymbol{\xi})}_{W^p} \quad (5.10)$$

in einen elastischen Anteil W^e und einen plastischen Anteil W^p (siehe beispielsweise MANDEL [1974]). Diese Annahme impliziert, daß sich das elastische und das plastische Werkstoffverhalten gegenseitig nicht beeinflussen. Außerdem werden damit die Spannungen und die Verfestigungsfunktionen entkoppelt (siehe Abschnitt 5.2.2). Der Anteil W^e ist die im Werkstoff gespeicherte reversible elastische Formänderungsenergie. Der Anteil W^p ist die der plastischen Deformation zugeordnete Energie. Die

inneren Variablen ξ , $\boldsymbol{\xi}$ haben phänomenologischen Charakter und erfassen die mikroskopischen Mechanismen, die plastische Deformationen zur Folge haben (z.B. Punktdefekte, Gleiten von Gitterebenen, Entstehung und Wanderung von Versetzungen in der Metallplastizität), nur makroskopisch. Im folgenden wird von der entkoppelten Darstellung (5.10) der Energiefunktion ausgegangen.

Die in Abschnitt 4.1.2 aufgestellten Bedingungen für die Energiefunktion gelten weiterhin für den elastischen Anteil W^e . Dabei ist nur zu beachten, daß die elastischen Hauptstreckungen λ_i^e statt der Hauptstreckungen λ_i eingesetzt werden. Da somit die ausgewählten Funktionen W^e aus den Abschnitten 4.1.3 und 4.2 übernommen werden können, erfolgt im kommenden Abschnitt die Beschränkung auf den plastischen Anteil W^p .

Für den Sonderfall isotroper Verfestigung, d.h. $W_2^p = 0$, sind nachfolgend einige Beispiele für W^p gegeben. Der einfache Fall der linearen isotropen Verfestigung wird mittels

$$W^p = H\xi^2/2 \quad (5.11)$$

erhalten. Hierin ist H der sogenannte lineare isotrope Verfestigungsmodul. Für $H = 0$ ergibt sich der Grenzfall der idealen Plastizität. Zur Beschreibung des isotropen plastischen Verfestigungsverhaltens von Latex ist in REESE & WRIGGERS [1997] die Erweiterung von (5.11) um einen nichtlinearen Anteil gegeben:

$$W^p = H\xi^2/2 + (a+1)^{-1}H_2\xi^{(a+1)} \quad (5.12)$$

Als zusätzliche Konstanten treten ein zweiter Verfestigungsmodul H_2 und ein Exponent a auf. In numerischen Anwendungen wird häufig die plastische Energiefunktion

$$W^p = H\xi^2/2 + (\tau_\infty - \tau_0)\xi + \delta^{-1}(\tau_\infty - \tau_0)\exp(-\delta\xi) \quad \text{mit } \delta > 0 \quad (5.13)$$

verwendet, welche außer dem linearen Term (5.11) einen Sättigungsterm enthält (siehe SIMO, TAYLOR & PISTER [1985] und SIMO [1988b]). Die zusätzlichen Konstanten sind die Anfangsfließspannung τ_0 , die Sättigungsfließspannung τ_∞ und der Sättigungsexponent δ .

Für den Fall mit kinematischer Verfestigung, d.h. $W_2^p(\boldsymbol{\xi}) \neq 0$, sind an dieser Stelle keine Beispiele gegeben, da dieser Fall bei der numerischen Umsetzung nicht berücksichtigt wird (siehe Anmerkungen zur Isotropie in Abschnitt 5.2.3 sowie erster Absatz in Abschnitt 5.3.2).

5.2.2 Spannungsberechnung und Dissipationsleistung

Die Auswertung der spezifischen Dissipationsleistung (3.18) unter Berücksichtigung der Energiedichtefunktion (5.10) liefert

$$\mathcal{D} = \boldsymbol{\tau} : \mathbf{d} - \partial_{\mathbf{b}^e} W : \dot{\mathbf{b}}^e - \partial_\xi W \dot{\xi} - \partial_{\boldsymbol{\xi}} W : \dot{\boldsymbol{\xi}} \geq 0 \quad .$$

Aufgrund der Symmetrie des elastischen Linken Cauchy-Green Tensors \mathbf{b}^e ist auch die Ableitung $\partial_{\mathbf{b}^e} W$ symmetrisch. Wie aus der Ableitungsvorschrift eines Skalars nach

einem Tensor hervorgeht, sind diese beiden Tensoren koaxial. Schließlich erhält man nach Einführung der Oldroydschen Rate von \mathbf{b}^e die Darstellung

$$\mathcal{D} = (\boldsymbol{\tau} - 2\mathbf{b}^e \cdot \partial_{\mathbf{b}^e} W) : \mathbf{d} - (2\mathbf{b}^e \cdot \partial_{\mathbf{b}^e} W) : \left(\frac{1}{2} \overset{\circ}{\mathbf{b}^e} \cdot \mathbf{b}^{e-1}\right) - \partial_{\xi} W \dot{\xi} - \partial_{\boldsymbol{\xi}} W : \dot{\boldsymbol{\xi}} \geq 0 \quad . \quad (5.14)$$

Diese Ungleichung muß für alle beliebigen thermodynamisch zulässigen Prozesse gelten und somit auch für beliebige symmetrische Geschwindigkeitsgradienten \mathbf{d} (Standardargumentation der Thermodynamik, siehe COLEMAN & GURTIN [1967]). Daraus folgt die Berechnungsvorschrift

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mathbf{b}^e \cdot \partial_{\mathbf{b}^e} W = 2\partial_{\mathbf{b}^e} W \cdot \mathbf{b}^e \quad (5.15)$$

für die Spannungen. Wegen (5.10) gilt $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(\mathbf{b}^e)$. Der Vergleich von (5.15) mit (4.50) zeigt, daß sich die Spannungen sowohl im elastischen als auch im elastoplastischen Fall nach der gleichen Vorschrift berechnen, wobei im elastischen Fall $\mathbf{b}^e \equiv \mathbf{b}$ gilt.

Wählt man die inneren plastischen Variablen ξ und $\boldsymbol{\xi}$ als extensive Größen, so ergeben sich nach (3.16) die energetisch konjugierten intensiven Größen q und \mathbf{q} durch Ableitung der Energiedichtefunktion W nach den extensiven Größen:

$$q = \partial_{\xi} W \quad , \quad \mathbf{q} = \partial_{\boldsymbol{\xi}} W \quad . \quad (5.16)$$

Wegen (5.10) gilt $q = q(\xi)$ und $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\boldsymbol{\xi})$. Da diese beiden Größen das Verfestigungsverhalten bei plastischer Deformation beschreiben, werden sie im folgenden Verfestigungsfunktionen genannt. Der Bezeichnungsweise der klassischen Plastizitätstheorie folgend können $q = q(\xi)$ als isotrope und $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\boldsymbol{\xi})$ als kinematische Verfestigungsfunktionen identifiziert werden. Die Vorzeichen in (5.16) sind so definiert, daß bei Verfestigung eine Zunahme der inneren plastischen Variablen zu einer Zunahme der Energiedichte W führt (LEMAITRE & CHABOCHE [1990]). Im Schrifttum wird oft ein negatives Vorzeichen verwendet (siehe LUBLINER [1990], MAUGIN [1992], SIMO [1992]).

Mit der Berechnungsvorschrift der Spannungen (5.15) und der Definition der Verfestigungsfunktionen (5.16) erhält man aus (5.14) abschließend die spezifische Dissipationsleistung

$$\mathcal{D} = -\boldsymbol{\tau} : \left(\frac{1}{2} \overset{\circ}{\mathbf{b}^e} \cdot \mathbf{b}^{e-1}\right) - q \dot{\xi} - \mathbf{q} : \dot{\boldsymbol{\xi}} \geq 0 \quad . \quad (5.17)$$

Dieser Leistungsausdruck ist bei der Formulierung des Prinzips der maximalen plastischen Dissipation maßgeblich (siehe Abschnitt 5.2.4).

5.2.3 Fließbedingung

Bevor bleibende plastische Deformationen eintreten, verhalten sich die meisten Werkstoffe zunächst elastisch. Die in Abschnitt 5.2.1 behandelte Energiedichtefunktion ist aber lediglich ein Maß für die im Werkstoff gespeicherte Deformationsenergie. Eine Aussage, wann elastische und wann elastoplastische Deformationen stattfinden, kann

durch alleinige Kenntnis der Energiedichtefunktion nicht getroffen werden. Zur Spezifizierung des Werkstoffverhaltens ist deshalb eine zusätzliche Bedingung notwendig. Diese Bedingung heißt Fließbedingung und grenzt den Bereich ein, in dem elastische Deformationen stattfinden.

Der Bereich

$$E = \{(\boldsymbol{\tau}, q, \mathbf{q}) \in \mathbb{R}^6 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^6 \mid f(\boldsymbol{\tau}, q, \mathbf{q}) \leq 0\} \quad (5.18)$$

definiert im Spannungsraum den Bereich der zulässigen Spannungen. Hierin ist

$$f(\boldsymbol{\tau}, q, \mathbf{q}) \leq 0 \quad (5.19)$$

die Fließbedingung. Für $f < 0$ ist die Deformation elastisch und für $f = 0$ elastoplastisch. Der Fall $f > 0$ ist unzulässig. Die Wahl der Energiedichtefunktion (5.10) in Abhängigkeit des Variablensatzes \mathbf{b}^e , ξ , $\boldsymbol{\xi}$ impliziert die Kirchhoff Spannungen $\boldsymbol{\tau}$ (5.15) und die Verfestigungsfunktionen q und \mathbf{q} (5.16) als Funktionen desselben Variablensatzes (Erfüllung des Prinzips der Äquipräsenz). Die Fließbedingung f als skalarwertige Funktion ist deshalb in Abhängigkeit der Größen $\boldsymbol{\tau}$, q , \mathbf{q} definiert. Im Raum der Kirchhoff Spannungen beschreibt $f(\boldsymbol{\tau}, q(\xi), \mathbf{q}(\boldsymbol{\xi})) = 0$ für momentan festgehaltene plastische Zustandsvariablen ξ , $\boldsymbol{\xi}$ eine konvexe Fließfläche (Hyperfläche), die den momentanen elastischen Bereich einhüllt.

Die Fließbedingung (5.19) ist hier in Abhängigkeit der Kirchhoff Spannungen $\boldsymbol{\tau}$ definiert. Eine Formulierung in Abhängigkeit der wahren Cauchyschen Spannungen $\boldsymbol{\sigma}$, wie sie aus anschaulicher Sicht sinnvoll erscheint, hat unsymmetrische Stofftensoren zur Folge (siehe MESHKE & LIU [1997]). Für Problemstellungen mit kleinen Volumenänderungen (z.B. plastische Inkompressibilität bei Metallen) sind aufgrund $J \approx 1$ und Beziehung (2.41) die Unterschiede zwischen den beiden genannten Formulierungen gering, so daß hier vorzugsweise mit der Formulierung (5.19) gearbeitet wird.

Die Fließbedingung ist eine konvexe Funktion der Spannungen, d.h. es gilt

$$f(\boldsymbol{\tau}_1) + [\partial_{\boldsymbol{\tau}} f(\boldsymbol{\tau})|_{\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{\tau}_1}] : [\boldsymbol{\tau}_2 - \boldsymbol{\tau}_1] \leq f(\boldsymbol{\tau}_2) \quad (5.20)$$

Die Konvexität der Fließbedingung ist eine Folge des Prinzips der maximalen plastischen Dissipation (siehe Abschnitt 5.2.4). Anschaulich besagt die Konvexitätsbedingung, daß der gesamte elastische Bereich E im Spannungsraum immer innerhalb der Tangentialebenen an der Fließfläche $f = 0$ liegen muß. Im Hauptspannungsraum darf die gerade Verbindungslinie zwischen zwei zulässigen Spannungen nur im zulässigen Bereich E liegen und nicht außerhalb.

Unter der Voraussetzung von materieller Objektivität und isotropen Werkstoffverhaltens darf die Fließbedingung nur von den Invarianten oder den Eigenwerten der Tensoren $\boldsymbol{\tau}$ und \mathbf{q} abhängen, d.h. es gilt

$$f(\boldsymbol{\tau}, q, \mathbf{q}) = f(I_{\boldsymbol{\tau}}, II_{\boldsymbol{\tau}}, III_{\boldsymbol{\tau}}, q, I_{\mathbf{q}}, II_{\mathbf{q}}, III_{\mathbf{q}}) = f(\tau_1, \tau_2, \tau_3, q, q_1, q_2, q_3) \leq 0 \quad .$$

Wird hingegen eine Formulierung der Fließbedingung mit gemischter (isotroper und kinematischer) Verfestigung der Form

$$f(\boldsymbol{\tau} - \mathbf{q}, q) = f(I_{\boldsymbol{\tau}-\mathbf{q}}, II_{\boldsymbol{\tau}-\mathbf{q}}, III_{\boldsymbol{\tau}-\mathbf{q}}, q) = f([\boldsymbol{\tau} - \mathbf{q}]_1, [\boldsymbol{\tau} - \mathbf{q}]_2, [\boldsymbol{\tau} - \mathbf{q}]_3, q) \leq 0$$

verwendet, dann ist die Voraussetzung der Isotropie verletzt. Die Differenz $\boldsymbol{\tau} - \mathbf{q}$ bewirkt im Spannungsraum eine Verschiebung der Fließfläche in Richtung des Tensors \mathbf{q} (backstress), wodurch die Richtungsunabhängigkeit verletzt wird. Als Beispiel kann die von-Mises-Fließbedingung mit gemischter Verfestigung

$$f_{\text{Mises}}(\boldsymbol{\tau} - \mathbf{q}, q) = \|\text{dev}(\boldsymbol{\tau} - \mathbf{q})\| - \sqrt{\frac{2}{3}}[\tau_0 + q] \leq 0 \quad (5.21)$$

angegeben werden (siehe VON MISES [1913] für ideale Plastizität). Sie wird vorwiegend zur Beschreibung des plastischen Verhaltens von Metallen verwendet. Die skalare Größe $\tau_0 > 0$ ist die Anfangsfließspannung. Die von-Mises-Fließbedingung mit isotroper Verfestigung

$$f_{\text{Mises}}(\boldsymbol{\tau}, q) = \|\text{dev}\boldsymbol{\tau}\| - \sqrt{\frac{2}{3}}[\tau_0 + q] \leq 0$$

$$\text{mit } \|\text{dev}\boldsymbol{\tau}\| = \left[\sum_{i=1}^3 (\tau_i^{\text{dev}})^2 \right]^{1/2} \quad \text{und} \quad \tau_i^{\text{dev}} = \tau_i - \frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 \tau_j \quad (5.22)$$

aber ohne kinematischen Verfestigungsanteil erfüllt hingegen die Voraussetzung von Isotropie.

Grundsätzlich besteht die Möglichkeit, Fließbedingungen im Verzerrungsraum statt im Spannungsraum zu formulieren. Abschließend wird diese Möglichkeit kurz diskutiert, ohne aber im weiteren Verlauf der Arbeit davon Gebrauch zu machen. Die Kirchhoff Spannungen (5.15) werden aus der Energiefunktion (5.10) abgeleitet und können deshalb explizit als Funktion $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{b}^e)$ des elastischen Linken Cauchy-Green Tensors \mathbf{b}^e aufgefaßt werden. Setzt man die Kirchhoff Spannungen $\boldsymbol{\tau}$ in die Fließbedingung (5.19) ein, so erhält man unmittelbar eine Formulierung der Fließbedingung in Abhängigkeit des elastischen Verzerrungsmaßes \mathbf{b}^e . Die Formulierung der Fließbedingung im Spannungsraum anstatt im Verzerrungsraum erscheint jedoch aus experimenteller Sicht naheliegender. Außerdem sind etablierte Fließbedingungen, wie z.B. die von-Mises-Fließbedingung, im Spannungsraum definiert.

5.2.4 Prinzip der maximalen plastischen Dissipation

Das Prinzip der maximalen plastischen Dissipation geht auf VON MISES [1928], S. 184 zurück und wurde von HILL [1948] aufgegriffen. Für den Sonderfall kleiner Verzerrungen ist es identisch mit dem Postulat von DRUCKER [1951], DRUCKER [1960]. Das Prinzip bildet die Grundlage der assoziierten Plastizität und wird in neueren Lehrbüchern aufgegriffen (siehe beispielsweise LUBLINER [1990], MAUGIN [1992] oder SIMO & HUGHES [1998]).

Das Prinzip der maximalen plastischen Dissipation angewendet auf (5.17) lautet: für vorgegebene Raten $(\overset{\circ}{\mathbf{b}}^e \cdot \mathbf{b}^{e-1}, \dot{\xi}, \dot{\boldsymbol{\xi}})$ maximiert der aktuelle Zustand $(\boldsymbol{\tau}, q, \mathbf{q}) \in E$ unter allen möglichen zulässigen Zuständen $(\boldsymbol{\tau}^*, q^*, \mathbf{q}^*) \in E$ die plastische Dissipation \mathcal{D} :

$$\mathcal{D}(\boldsymbol{\tau}, q, \mathbf{q}) - \mathcal{D}(\boldsymbol{\tau}^*, q^*, \mathbf{q}^*) \geq 0 \quad \forall \quad (\boldsymbol{\tau}, q, \mathbf{q}), (\boldsymbol{\tau}^*, q^*, \mathbf{q}^*) \in E \quad . \quad (5.23)$$

Die Maximierung der plastischen Dissipation \mathcal{D} ist gleichbedeutend mit der Minimierung der negativen plastischen Dissipation $-\mathcal{D}$:

$$(\overset{\circ}{\mathbf{b}}^e, \dot{\xi}, \dot{\boldsymbol{\xi}}) = \text{Arg}\{ \text{Min}\{ -\mathcal{D}(\boldsymbol{\tau}, q, \mathbf{q}) \} \} \quad \forall \quad (\boldsymbol{\tau}, q, \mathbf{q}) \in E \quad . \quad (5.24)$$

Das Minimierungsproblem (5.24) mit der Nebenbedingung (5.19) kann mittels der im Anhang A.2 beschriebenen Methoden gelöst werden. Im Fall der zeitunabhängigen Plastizität wird eine exakte Lösung mit Berücksichtigung der Kuhn-Tucker Bedingungen angestrebt (siehe A.2.1). Setzt man in das Minimierungsproblem (5.24) die Dissipationsleistung (5.17) ein, so liefert (A.6):

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \overset{\circ}{\mathbf{b}}^e \cdot \mathbf{b}^{e-1} &= \dot{\gamma} \partial_{\boldsymbol{\tau}} f(\boldsymbol{\tau}, q, \mathbf{q}) \quad , \\ -\dot{\xi} &= \dot{\gamma} \partial_q f(\boldsymbol{\tau}, q, \mathbf{q}) \quad , \\ -\dot{\boldsymbol{\xi}} &= \dot{\gamma} \partial_{\mathbf{q}} f(\boldsymbol{\tau}, q, \mathbf{q}) \quad , \\ f(\boldsymbol{\tau}, q, \mathbf{q}) &\leq 0 \quad , \quad \dot{\gamma} \geq 0 \quad , \quad \dot{\gamma} f(\boldsymbol{\tau}, q, \mathbf{q}) = 0 \quad . \end{aligned} \quad (5.25)$$

Die Beziehung (5.25)₁ heißt Fließregel, die Evolutionsgesetze der inneren plastischen Variablen sind durch (5.25)_{2,3} gegeben und (5.25)₄ repräsentieren die Kuhn-Tucker Bedingungen. Der plastische Multiplikator $\dot{\gamma}$ ist ein Maß für die momentane „Rate“ des plastischen Fließens. Die „Ratenabhängigkeit“ wird durch den Punkt der materiellen Zeitableitung symbolisiert. Die Kuhn-Tucker Bedingungen implizieren die Konsistenzbedingung

$$\dot{\gamma} \dot{f} = 0 \quad . \quad (5.26)$$

Für rein elastische Deformationen gilt $f < 0$, $\dot{\gamma} = 0$ und (5.26) ist für beliebige \dot{f} erfüllt. Für elastoplastische Deformationen gilt $\dot{\gamma} \geq 0$. Wegen $f = 0 = \text{konst}$ ist dann $\dot{f} = 0$ und (5.26) ist gültig.

Da die Energiedichtefunktion (5.10) eine Funktion von \mathbf{b}^e ist, muß die Fließregel (5.25)₁ in eine Evolutionsgleichung für $\dot{\mathbf{b}}^e$ überführt werden. Mit Hilfe der Oldroydschen Rate von \mathbf{b}^e erhält man schließlich

$$\dot{\mathbf{b}}^e = \mathbf{l} \cdot \mathbf{b}^e + \mathbf{b}^e \cdot \mathbf{l}^T - 2\dot{\gamma} \partial_{\boldsymbol{\tau}} f \cdot \mathbf{b}^e \quad (5.27)$$

als Argument des Minimierungsproblems (5.24).

Die Normalenregel und die Konvexität der Fließbedingung sind direkte Folgen des Prinzips der maximalen plastischen Dissipation. Wie aus (5.25)₁₋₃ ersichtlich ist,

entwickelt sich die plastische Deformation in Richtung der Normalen auf der Fließfläche $f = 0$ (Normalenregel). Dabei spricht man auch von assoziierter Plastizität. Die Verwendung von (5.25) mit (5.17) in (5.23) führt auf

$$(\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}^*) : \partial_{\boldsymbol{\tau}} f + (\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}^*) : \partial_{\boldsymbol{\xi}} f + (\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}^*) : \partial_{\boldsymbol{\xi}} f \geq 0 \quad .$$

Die Konvexität der Fließbedingung (siehe Abschnitt 5.2.3) folgt anschaulich aus dem ersten Term. Im Spannungsraum muß die Spannungsdifferenz $\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}^*$ einen positiven (≥ 0) Richtungsanteil in Richtung der äußeren Normalen $\partial_{\boldsymbol{\tau}} f$ besitzen.

Der bislang in diesem Abschnitt beschriebene Formalismus ist der rationalen Thermodynamik zuzuordnen. Die Werkstoffgesetze (5.25) werden aus dem Maximumprinzip der Dissipationsleistung abgeleitet. Die Dissipationsleistung in ihrer ursprünglichen Form (3.18) folgt aus der Clausius-Duhem Ungleichung. Somit wirkt die Clausius-Duhem Ungleichung als Restriktion auf die Werkstoffgesetze (vergleiche Schlußbemerkungen in Abschnitt 3.1).

Für den rein elastischen Fall mit $\mathbf{F}^p = \mathbf{1}$, $\mathbf{b} = \mathbf{b}^e$, $f < 0$ folgt aus (5.25)₄ unmittelbar $\dot{\gamma} = 0$. Mit (5.25)₁₋₃ in (5.17), (5.27) erhält man somit den in Abschnitt 4.3.1 beschriebenen elastischen Sonderfall $\mathcal{D} \equiv 0$, $\dot{\mathbf{b}} = \mathbf{l} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{l}^T$.

In (5.18) wird vereinfachend angenommen, daß eine einzige Fließbedingung (5.19) zur Definition des elastischen Bereiches genügt. Die Möglichkeit den elastischen Bereich mit Hilfe mehrerer Fließbedingungen $f_i \leq 0$ zu definieren (multisurface plasticity), ist aber nicht ausgeschlossen. Da in A.2.1 mehrere Nebenbedingungen zugelassen sind, kann die in diesem Abschnitt beschriebene Lösungsstrategie analog auf den Fall mehrerer Fließbedingungen angewendet werden (siehe beispielsweise SIMO [1992]).

5.3 Integration der Evolutionsgleichungen

5.3.1 Anfangswertproblem und Integrationsalgorithmus

Zur Beschreibung des elastoplastischen Stoffverhaltens sind die Evolutionsgleichungen (5.27) und (5.25)_{2,3} für die Größen \mathbf{b}^e , $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\xi}$ sowie die Nebenbedingungen (5.25)₄ gegeben. Ziel ist es, die Evolutionsgleichungen innerhalb eines Zeitintervalls $t \in [t_n, t_{n+1}] \subset \mathbb{R}_+$ zu integrieren. Es wird davon ausgegangen, daß zum Anfangszeitpunkt t_n des Intervalls die Anfangsbedingungen \mathbf{b}_n^e , $\boldsymbol{\xi}_n$, $\boldsymbol{\xi}_n$ sowie die Konfiguration $\boldsymbol{\varphi}_n = \boldsymbol{\varphi}_{t=t_n}$ bekannt sind. Für den Zeitpunkt t_{n+1} sei nur die momentane Konfiguration $\boldsymbol{\varphi}_{n+1} = \boldsymbol{\varphi}_{t=t_{n+1}}$ als gegeben angenommen.

Die weiteren Ausführungen in diesem Abschnitt sind in zwei Teile untergliedert. Zunächst wird das elastoplastische Anfangswertproblem formuliert und in ein elastisches und ein plastisches Teilproblem aufgeteilt. Diese Aufteilung bildet die Grundlage für den Standardproduktalgorithmus bestehend aus elastischem Prädiktor und plastischem Korrektor. Erst anschließend wird die Integration der beiden Teilprobleme beschrieben.

i. Anfangswertproblem: Zur Lösung des elastoplastischen Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \text{Evolutionsgleichungen} : \dot{\mathbf{b}}^e &= \mathbf{l} \cdot \mathbf{b}^e + \mathbf{b}^e \cdot \mathbf{l}^T - 2\dot{\gamma} \partial_{\boldsymbol{\tau}} f(\boldsymbol{\tau}, q, \mathbf{q}) \cdot \mathbf{b}^e , \\ \dot{\xi} &= -\dot{\gamma} \partial_q f(\boldsymbol{\tau}, q, \mathbf{q}) , \\ \dot{\boldsymbol{\xi}} &= -\dot{\gamma} \partial_{\mathbf{q}} f(\boldsymbol{\tau}, q, \mathbf{q}) , \end{aligned} \quad (5.28)$$

$$\text{Nebenbedingungen} : f(\boldsymbol{\tau}, q, \mathbf{q}) \leq 0 , \dot{\gamma} \geq 0 , \dot{\gamma} f(\boldsymbol{\tau}, q, \mathbf{q}) = 0 ,$$

$$\text{Anfangsbedingungen} : \mathbf{b}^e(t = t_n) = \mathbf{b}_n^e , \xi(t = t_n) = \xi_n , \boldsymbol{\xi}(t = t_n) = \boldsymbol{\xi}_n$$

im Intervall $[t_n, t_{n+1}]$ wird eine Aufspaltung in ein elastisches Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \text{Evolutionsgleichungen} : \dot{\mathbf{b}}^e &= \mathbf{l} \cdot \mathbf{b}^e + \mathbf{b}^e \cdot \mathbf{l}^T , \\ \dot{\xi} &= 0 , \\ \dot{\boldsymbol{\xi}} &= \mathbf{0} , \end{aligned} \quad (5.29)$$

$$\text{Nebenbedingungen} : \text{Keine} ,$$

$$\text{Anfangsbedingungen} : \mathbf{b}_n^e , \xi_n , \boldsymbol{\xi}_n$$

und ein plastisches Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \text{Evolutionsgleichungen} : \dot{\mathbf{b}}^e &= -2\dot{\gamma} \partial_{\boldsymbol{\tau}} f(\boldsymbol{\tau}, q, \mathbf{q}) \cdot \mathbf{b}^e , \\ \dot{\xi} &= -\dot{\gamma} \partial_q f(\boldsymbol{\tau}, q, \mathbf{q}) , \\ \dot{\boldsymbol{\xi}} &= -\dot{\gamma} \partial_{\mathbf{q}} f(\boldsymbol{\tau}, q, \mathbf{q}) , \end{aligned} \quad (5.30)$$

$$\text{Nebenbedingungen} : f(\boldsymbol{\tau}, q, \mathbf{q}) \leq 0 , \dot{\gamma} \geq 0 , \dot{\gamma} f(\boldsymbol{\tau}, q, \mathbf{q}) = 0 ,$$

$$\text{Anfangsbedingungen} : \mathbf{b}_{n+1}^{e,trial} , \xi_{n+1}^{trial} , \boldsymbol{\xi}_{n+1}^{trial}$$

vorgenommen (siehe SIMO [1992]). Im elastischen Anfangswertproblem wird die plastische Zwischenkonfiguration mittels $\dot{\gamma} = 0$ festgehalten und die Konfiguration $\boldsymbol{\varphi}_t$ wird von $\boldsymbol{\varphi}_n$ auf die momentane Konfiguration $\boldsymbol{\varphi}_{n+1}$ bewegt. Hierbei gilt $\mathbf{l} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} \neq \mathbf{0}$. Im plastischen Anfangswertproblem wird die momentane Konfiguration $\boldsymbol{\varphi}_{n+1}$ festgehalten, d.h. $\mathbf{l}_{n+1} = \dot{\mathbf{F}}_{n+1} = \mathbf{0}$, und die plastische Zwischenkonfiguration wird mittels $\dot{\gamma} \geq 0$ bewegt. Die Lösung des elastischen Anfangswertproblems $\mathbf{b}_{n+1}^{e,trial}, \xi_{n+1}^{trial}, \boldsymbol{\xi}_{n+1}^{trial}$ wird mit dem Index $(\)_{n+1}^{trial}$ gekennzeichnet und als Anfangsbedingung für das plastische Anfangswertproblem vorgegeben. Diese Trial-Größen sind Versuchsgrößen, die nur dann im plastischen Teilproblem korrigiert werden müssen, wenn die Fließbedingung verletzt ist.

ii. Integration: Das elastische Anfangswertproblem (5.29) ist mittels $\mathbf{b}^e = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}_n^{-1}) \cdot \mathbf{b}_n^e \cdot (\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}_n^{-1})^T$, $\xi = \xi_n$ und $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}_n$ exakt integrierbar, d.h. für alle $t \in [t_n, t_{n+1}]$ sind damit sowohl die Evolutionsgleichungen (5.29)₁₋₃ als auch die Anfangsbedingungen (5.29)₅ exakt erfüllt. Als Lösung für $t = t_{n+1}$ ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{n+1}^{e,trial} &= (\mathbf{F}_{n+1} \cdot \mathbf{F}_n^{-1}) \cdot \mathbf{b}_n^e \cdot (\mathbf{F}_{n+1} \cdot \mathbf{F}_n^{-1})^T = \boldsymbol{\varphi}_{n+1*}[\boldsymbol{\varphi}_n^*[\mathbf{b}_n^e]] , \\ \xi_{n+1}^{trial} &= \xi_n , \\ \boldsymbol{\xi}_{n+1}^{trial} &= \boldsymbol{\xi}_n . \end{aligned} \quad (5.31)$$

Das plastische Anfangswertproblem (5.30) ist nicht exakt integrierbar. Es werden daher numerische Näherungsverfahren eingesetzt. Als Näherungslösung für $t = t_{n+1}$ wird das folgende implizite Integrationsschema verwendet:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{n+1}^e &= \exp[-2\Delta\gamma \partial_{\boldsymbol{\tau}} f]_{n+1} \cdot \mathbf{b}_{n+1}^{e,trial} \quad , \\ \xi_{n+1} &= \xi_{n+1}^{trial} - [\Delta\gamma \partial_q f]_{n+1} \quad , \\ \boldsymbol{\xi}_{n+1} &= \boldsymbol{\xi}_{n+1}^{trial} - [\Delta\gamma \partial_{\mathbf{q}} f]_{n+1} \quad , \end{aligned} \quad (5.32)$$

$$\text{Nebenbedingungen: } f_{n+1} \leq 0 \quad , \quad \Delta\gamma_{n+1} \geq 0 \quad , \quad \Delta\gamma_{n+1} f_{n+1} = 0 \quad .$$

Hierin bedeutet der tiefgestellte Index $n + 1$, daß alle Argumente des Ausdrucks zum Zeitpunkt t_{n+1} auszuwerten sind, z.B. $f_{n+1} = f(\boldsymbol{\tau}_{n+1}, q_{n+1}, \mathbf{q}_{n+1})$. Der diskrete plastische Multiplikator ist zu $\Delta\gamma_{n+1} = \dot{\gamma}_{n+1} \Delta t_{n+1}$ mit $\Delta t_{n+1} = t_{n+1} - t_n$ definiert. Die Bedingungen (5.32)₄ werden diskrete Form der Kuhn-Tucker Bedingungen genannt. Die diskrete Form der Konsistenzbedingung (5.26) lautet

$$\Delta\gamma_{n+1} \Delta f_{n+1} = 0 \quad (5.33)$$

mit $\Delta f_{n+1} = \dot{f}_{n+1} \Delta t_{n+1}$.

Die Integration der Evolutionsgleichung (5.30)₁ erfolgt wie in (5.32)₁ angegeben unter Zuhilfenahme eines impliziten Integrationsoperators des Exponentialtyps, der von ETEROVIC & BATHE [1990], WEBER & ANAND [1990], SIMO [1992] und CUITIÑO & ORTIZ [1992] für diesen Themenbereich vorgeschlagen wurde. Mit dem Operator $\mathbf{A}_{n+1} = \exp[\mathbf{B}_{n+1}(t_{n+1} - t_n)] \mathbf{A}_n$ wird das Differentialgleichungssystem $\dot{\mathbf{A}}(t) = \mathbf{B}(\mathbf{A}, t) \cdot \mathbf{A}(t)$ im Zeitintervall $t \in [t_n, t_{n+1}]$ bis zur ersten Ordnung genau integriert, die Anfangsbedingungen werden erfüllt und der Algorithmus ist unbedingt stabil. Der Integrationsoperator basiert auf der Annahme $\dot{\mathbf{A}}(t) = \mathbf{B}_{n+1} \cdot \mathbf{A}(t)$ im Zeitintervall $t \in [t_n, t_{n+1}]$ und dem dafür exakten Ansatz $\mathbf{A}(t) = \exp[t \mathbf{B}_{n+1}]$. Da zur Bildung der Exponentialfunktion eines Tensors seine Spektraldarstellung erforderlich ist (siehe Anhang A.1.1), ist der Übergang auf Eigenwerte eine unmittelbare Folge des Exponentialansatzes. Der Integrationsoperator in (5.32)₁ besitzt außerdem die Eigenschaft, daß bei Voraussetzung einer druckunabhängigen Fließbedingung die plastische Inkompressibilität $J^p = 1$, d.h. $J_{n+1}^p = J_n^p$, gewährleistet ist. Die Integration der Evolutionsgleichungen (5.30)_{2,3} erfolgt mittels des impliziten Standard-Euler-Rückwärts Verfahrens, das erster Ordnung genau und unbedingt stabil ist (siehe beispielsweise HUGHES [1987] zur allgemeinen Diskussion von Integrationsalgorithmen).

Im folgenden werden (5.31) elastischer Prädiktor und (5.32) plastischer Korrektor genannt.

5.3.2 Elastischer Prädiktor und plastischer Korrektor

Aus Gründen der Einfachheit erfolgt in diesem Kapitel im weiteren die Beschränkung auf isotrope Verfestigung (d.h. $\mathbf{q} = \boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$). Die konsistente Berücksichtigung der kinematischen Verfestigung kann als Verlust der Gültigkeit der unten gegebenen Beziehung (5.40) interpretiert werden, was eine erschwerte algorithmische Umsetzung

der Gleichungen zur Folge hat (siehe SVENDSEN, ARNDT, KLINGBEIL & SIEVERT [1998] für eine weiterführende Diskussion).

Wie im vorangegangenen Abschnitt besprochen, muß aufgrund des exponentiellen Integrationsoperators für den Term $\partial_{\boldsymbol{\tau}} f$ in (5.32)₁ die Spektraldarstellung angestrebt werden, d.h. die Fließbedingung

$$f(\boldsymbol{\tau}, q) = f_1(\boldsymbol{\tau}) + f_2(q) = f_1(\tau_1, \tau_2, \tau_3) + f_2(q) \leq 0 \quad (5.34)$$

muß in Abhängigkeit der Eigenwerte τ_i der Kirchhoff Spannungen formuliert werden. Hier wird eine Fließbedingung mit additiv entkoppelten Anteilen in $\boldsymbol{\tau}$ und q vorausgesetzt, d.h. in der Anschauung entspricht der Funktionswert f_1 einer skalaren Vergleichsspannung, welche den Funktionswert f_2 der aktuellen Fließspannung nicht überschreiten darf. Durch die Entkopplung wird der plastische Korrektor vereinfacht, da bei der Ableitung der Fließbedingung keine Kopplungsterme auftreten. Da die Spannungen über (5.15) von der Energiedichtefunktion abhängen, ist es empfehlenswert, bereits die Energiedichtefunktion

$$W(\mathbf{b}^e, \xi) = W^e(\epsilon_1^e, \epsilon_2^e, \epsilon_3^e) + W^p(\xi) \quad \text{mit } \epsilon_i^e = \ln \lambda_i^e \quad (5.35)$$

als Funktion der Eigenwerte des elastischen Linken Cauchy-Green Tensors (5.8)₄ anzugeben. Die Verwendung der elastischen logarithmischen Hauptstreckungen ϵ_i^e statt der Hauptstreckungen λ_i^e ist im weiteren vorteilhaft und hat hier rein formalen Charakter. Es ist anzumerken, daß aufgrund der additiven Entkopplung (5.35) die Spannungen $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{\epsilon}^e)$ ausschließlich eine Funktion der elastischen logarithmischen Hauptstreckungen sind und die isotrope Verfestigungsfunktion $q = q(\xi)$ ausschließlich eine Funktion der isotropen inneren Variablen ist.

i. Elastischer Prädiktor: Für den gegebenen Deformationsgradienten \mathbf{F}_{n+1} werden die Trial-Größen nach (5.31)_{1,2} berechnet. Die Auswertung von (5.15) und (5.16)₁ führt schließlich auf die Trial-Fließbedingung

$$f_{n+1}^{trial} = f(\boldsymbol{\tau}_{n+1}^{trial}, q_{n+1}^{trial}) \quad (5.36)$$

Wegen der Konvexität der Fließbedingung (5.20) ist folgende Aussage möglich:

1. Falls $f_{n+1}^{trial} \leq 0$ gilt, ist $f_{n+1} = f(\boldsymbol{\tau}_{n+1}, q_{n+1}) \leq 0$ (vgl. MIEHE [1993]). Das heißt, für

$$f_{n+1}^{trial} \leq 0 \quad \rightarrow \quad \Delta\gamma_{n+1} = 0$$

ist kein plastischer Korrektor durchzuführen und es gilt für alle Größen $(\)_{n+1} = (\)_{n+1}^{trial}$. Da der elastische Integrationsalgorithmus exakt ist, werden alle elastischen Problemstellungen mit $f_{n+1}^{trial} \leq 0$ exakt gelöst.

2. Für

$$f_{n+1}^{trial} > 0 \quad \rightarrow \quad \Delta\gamma_{n+1} > 0$$

liegt der Trial-Zustand außerhalb der Fließfläche und es ist der plastische Korrektor durchzuführen.

ii. Plastischer Korrektor: Ausgehend von der Spektraldarstellung (5.8)₄ berechnet sich der Kirchhoff Spannungstensor (5.15) mit (5.35) zu

$$\boldsymbol{\tau} = \sum_{i=1}^3 \tau_i \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i \quad \text{mit} \quad \tau_i = \partial_{\epsilon_i^e} W \quad . \quad (5.37)$$

Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird hier und im folgenden auf die Indizierung mit $n + 1$ verzichtet. Die Ableitung der Fließbedingung nach den Spannungen

$$\partial_{\boldsymbol{\tau}} f = \sum_{i=1}^3 \partial_{\tau_i} f \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i \quad (5.38)$$

besitzt dieselbe Eigenvektorbasis wie der Spannungstensor. Die Auswertung von (5.32)₁ liefert als Resultate: (a) Die Tensoren

$$\mathbf{b}^e = \sum_{i=1}^3 (\lambda_i^e)^2 \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i \quad \text{und} \quad \mathbf{b}^{e,trial} = \sum_{i=1}^3 (\lambda_i^{e,trial})^2 \mathbf{n}_i^{trial} \otimes \mathbf{n}_i^{trial} \quad (5.39)$$

besitzen dieselbe Eigenvektorbasis

$$\mathbf{n}_i = \mathbf{n}_i^{trial} \quad , \quad (5.40)$$

d.h. die Eigenvektorbasis ist durch den elastischen Prädiktor festgelegt. (b) Die Logarithmen

$$\epsilon_i^e = \epsilon_i^{e,trial} - \Delta\gamma \partial_{\tau_i} f \quad (5.41)$$

der Wurzeln der Eigenwerte des Tensors \mathbf{b}^e folgen durch eine additive Korrektur der Logarithmen der Wurzeln der Eigenwerte des Tensors $\mathbf{b}^{e,trial}$. Es sei angemerkt, daß die additive Korrektur, wie sie aus der Plastizität der Theorie kleiner Verzerrungen bekannt ist, aus der Einführung der elastischen logarithmischen Hauptstreckungen ϵ_i^e folgt. Bei Formulierungen in elastischen Hauptstreckungen λ_i^e würde an die Stelle von (5.41) formal eine multiplikative Korrekturformel treten. Die Gleichung (5.32)₂ zur Korrektur der inneren Variablen ist hiervon unbeeinflusst und kann identisch übernommen werden.

Zur Durchführung des plastischen Korrektors ist es notwendig, den diskreten plastischen Multiplikator $\Delta\gamma$ in (5.41) und (5.32)₂ so zu bestimmen, daß die Nebenbedingungen (5.32)₄ erfüllt sind. In dem hier betrachteten Fall mit allgemeiner entkoppelter Energiedichtefunktion und allgemeiner entkoppelter Fließbedingung ist eine lokale Newton Iteration notwendig. Für Spezialfälle, siehe beispielsweise SIMO [1992] mit elastischer Energiedichtefunktion nach Hencky (4.42) und von-Mises-Fließbedingung (5.22), kann die lokale Newton Iteration erheblich vereinfacht werden.

Lokale Newton Iteration (siehe SIMO [1992], SCHELLEKENS & PARISCH [1994b], REESE & WRIGGERS [1997], EBERLEIN [1997]): Zur Unterscheidung von den Tensoren, die in Fettschrift dargestellt sind, werden die Matrizen im folgenden durch

Unterstreichung gekennzeichnet. Es ist günstig die Eigenwerte in Spaltenmatrizen

$$\begin{aligned}\underline{\epsilon}^e &= [\epsilon_1^e, \epsilon_2^e, \epsilon_3^e]^T, \\ \underline{\epsilon}^{e,trial} &= [\epsilon_1^{e,trial}, \epsilon_2^{e,trial}, \epsilon_3^{e,trial}]^T, \\ \underline{\tau} &= [\tau_1, \tau_2, \tau_3]^T\end{aligned}$$

zusammenzufassen. Die Linearisierungen

$$\text{Lin}[\underline{R}_{\epsilon^e}]_{(\cdot)_k, \Delta(\cdot)_{k+1}} = \underline{0}, \quad \text{Lin}[R_\xi]_{(\cdot)_k, \Delta(\cdot)_{k+1}} = 0, \quad \text{Lin}[R_f]_{(\cdot)_k, \Delta(\cdot)_{k+1}} = 0 \quad (5.42)$$

der Residuen

$$\begin{aligned}\underline{R}_{\epsilon^e} &= \underline{R}_{\epsilon^e}(\underline{\epsilon}^e, \Delta\gamma) = -\underline{\epsilon}^e + \underline{\epsilon}^{e,trial} - \Delta\gamma \partial_{\underline{\tau}} f = \underline{0}, \\ R_\xi &= R_\xi(\xi, \Delta\gamma) = -\xi + \xi^{trial} - \Delta\gamma \partial_q f = 0, \\ R_f &= R_f(\underline{\epsilon}^e, \xi) = f = 0\end{aligned} \quad (5.43)$$

aus den Gleichungen (5.41), (5.32)₂ und der Fließbedingung um den Linearisierungspunkt $(\cdot)_k = (\underline{\epsilon}_k^e, \xi_k, \Delta\gamma_k)$ in Richtung der Inkremente $\Delta(\cdot)_{k+1} = (\Delta\underline{\epsilon}_{k+1}^e, \Delta\xi_{k+1}, \Delta\Delta\gamma_{k+1})$ liefern die Update-Formeln

$$\underline{\epsilon}_{k+1}^e = \underline{\epsilon}_k^e + \Delta\underline{\epsilon}_{k+1}^e, \quad \xi_{k+1} = \xi_k + \Delta\xi_{k+1}, \quad \Delta\gamma_{k+1} = \Delta\gamma_k + \Delta\Delta\gamma_{k+1} \quad (5.44)$$

mit den Inkrementen

$$\begin{aligned}\Delta\Delta\gamma_{k+1} &= \left[\frac{R_f + (\partial_{\underline{\tau}} f)^T \underline{H}_{\epsilon^e} \underline{R}_{\epsilon^e} + (\partial_q f) H_\xi R_\xi}{(\partial_{\underline{\tau}} f)^T \underline{H}_{\epsilon^e} (\partial_{\underline{\tau}} f) + (\partial_q f) H_\xi (\partial_q f)} \right]_k, \\ \Delta\underline{\epsilon}_{k+1}^e &= [(\underline{E}_{\epsilon^e})^{-1} (\underline{R}_{\epsilon^e} - \Delta\Delta\gamma_{k+1} \partial_{\underline{\tau}} f)]_k, \\ \Delta\xi_{k+1} &= [(E_\xi)^{-1} (R_\xi - \Delta\Delta\gamma_{k+1} \partial_q f)]_k\end{aligned} \quad (5.45)$$

und den Moduli

$$\begin{aligned}\underline{E}_{\epsilon^e} &= \underline{1} + \Delta\gamma (\partial_{\underline{\tau}\underline{\tau}}^2 f) (\partial_{\underline{\epsilon}^e \underline{\epsilon}^e}^2 W), \\ \underline{H}_{\epsilon^e} &= (\partial_{\underline{\epsilon}^e \underline{\epsilon}^e}^2 W) (\underline{E}_{\epsilon^e})^{-1} = [(\partial_{\underline{\epsilon}^e \underline{\epsilon}^e}^2 W)^{-1} + \Delta\gamma (\partial_{\underline{\tau}\underline{\tau}}^2 f)]^{-1}, \\ E_\xi &= 1 + \Delta\gamma (\partial_{qq}^2 f) (\partial_{\xi\xi}^2 W), \\ H_\xi &= (\partial_{\xi\xi}^2 W) (E_\xi)^{-1} = [(\partial_{\xi\xi}^2 W)^{-1} + \Delta\gamma (\partial_{qq}^2 f)]^{-1}.\end{aligned} \quad (5.46)$$

Mit dem Iterationsindex k bezeichnete Terme sind stets am aktuellen Linearisierungspunkt $(\cdot)_k = (\underline{\epsilon}_k^e, \xi_k, \Delta\gamma_k)$ auszuwerten. Die Einheitsmatrix wird mit $\underline{1}$ bezeichnet. Die Iterationsschleife (5.43)–(5.46) ist ausgehend von den Startwerten $\underline{\epsilon}_0^e = \underline{\epsilon}^{e,trial}$, $\xi_0 = \xi^{trial}$, $\Delta\gamma_0 = 0$, $f_0 = f^{trial}$ solange zu durchlaufen, bis ein Abbruchkriterium

$$\alpha_1 \|\underline{R}_{\epsilon^e}\|_k + \alpha_2 |R_\xi|_k + |R_f|_k \leq TOL \quad \text{mit } \alpha_1, \alpha_2, TOL = konst \quad (5.47)$$

erfüllt ist. Die so iterierten Werte ergeben dann eingesetzt das Endergebnis \mathbf{b}^e , ξ (5.32)_{1,2} des plastischen Korrektors. Alle interessierenden Größen, wie beispielsweise

die Spannungen (5.37), sind somit berechenbar. Der plastische Korrektor beinhaltet die Erfüllung der Fließbedingung (5.43)₃. Veranschaulicht im Spannungsraum entspricht dies einer Rückprojektion der Versuchsspannungen $\boldsymbol{\tau}^{trial}$ des elastischen Prädiktors auf die Fließfläche $f = 0$ (return mapping).

Das Vorgehen (5.43)–(5.47) ist prinzipiell auch bei nichtentkoppelten Energiedichtefunktionen und Fließbedingungen möglich. Die Berechnung der Inkremente (5.45) wird dann wegen der Erhöhung der Zahl der Kopplungsterme in (5.43) jedoch aufwendiger.

5.4 Elastoplastische Stofftensoren

In Abschnitt 2.3 wurden der materielle und räumliche Stofftensor eingeführt, ohne auf eine bestimmte Werkstoffklasse Bezug zu nehmen. Nun soll deren Spezifizierung auf isotropes elastoplastisches Werkstoffverhalten erfolgen. Wie in Abschnitt 5.3 beschrieben, müssen die elastoplastischen Evolutionsgleichungen integriert werden. Hierzu ist ein inkrementelles Vorgehen mit einer Schrittweite $\Delta t_{n+1} = t_{n+1} - t_n$ notwendig. Bei der Herleitung der zugehörigen inkrementellen Stofftensoren \mathbb{C}_{n+1} und $\boldsymbol{\epsilon}_{n+1}$, wie sie in Abschnitt 2.3.2 definiert sind, muß der inkrementelle Integrationsalgorithmus bestehend aus elastischem Prädiktor und plastischem Korrektor berücksichtigt werden (konsistente algorithmische Tangentenmoduli, siehe SIMO & TAYLOR [1985], SIMO & TAYLOR [1986]). Die kontinuierlichen Stofftensoren $\mathbb{C} \neq \mathbb{C}_{n+1}$ und $\boldsymbol{\epsilon} \neq \boldsymbol{\epsilon}_{n+1}$ aus Abschnitt 2.3.1 spielen im Hinblick auf eine Finite Element Implementierung nur eine untergeordnete Rolle und werden an dieser Stelle nicht behandelt. Wie bereits in Abschnitt 5.3.2 angemerkt, wird aus Gründen der Übersichtlichkeit auf die Indizierung mit $n + 1$ verzichtet. Diese Vereinbarung gilt auch für die Stofftensoren, d.h. \mathbb{C} und $\boldsymbol{\epsilon}$ sind hier die inkrementellen Stofftensoren.

Die Herleitung der inkrementellen Stofftensoren erfolgt analog zur Vorgehensweise, wie sie in WRIGGERS, EBERLEIN & REESE [1996], REESE & WRIGGERS [1997] vorgeschlagen wurde. Im elastischen Prädiktor wird die plastische Zwischenkonfiguration festgehalten und nur die momentane Konfiguration wird bewegt. Für die multiplikative Aufspaltung des Deformationsgradienten (5.1), (5.5) kann deshalb die Singulärwertzerlegung

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \cdot \mathbf{F}^p = \mathbf{F}^{e,trial} \cdot \mathbf{F}_n^p$$

mit
$$\mathbf{F}^{e,trial} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i^{e,trial} \mathbf{n}_i \otimes \tilde{\mathbf{N}}_i \quad \text{und} \quad \mathbf{F}_n^p = \sum_{j=1}^3 \lambda_{n,j}^p \tilde{\mathbf{N}}_j \otimes \mathbf{N}_j = \text{fest} \quad (5.48)$$

angegeben werden. Diese Darstellung hat den Vorteil, daß der plastische Deformationsgradient \mathbf{F}_n^p festgehalten ist. Beim Übergang auf die durch (5.48) eingeführte Zwischenkonfiguration kann diese Eigenschaft zur Berechnung der Stofftensoren ausgenutzt werden. Der materielle Rechte Cauchy-Green Tensor (2.18) und der materielle 2. Piola-Kirchhoff Spannungstensor (2.40) ergeben sich aus den Tensoren $\tilde{\mathbf{C}}$, $\tilde{\mathbf{S}}$ der

Zwischenkonfiguration über die Pull-Back Transformationen

$$\begin{aligned}
\mathbf{C} &= (\mathbf{F}_n^p)^T \cdot \tilde{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{F}_n^p &&= \varphi_n^{p*}[\tilde{\mathbf{C}}] \\
\text{mit } \tilde{\mathbf{C}} &= (\mathbf{F}^{e,trial})^T \cdot \mathbf{g} \cdot \mathbf{F}^{e,trial} &&= \varphi^{e,trial*}[\mathbf{g}] , \\
\mathbf{S} &= (\mathbf{F}_n^p)^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{S}} \cdot (\mathbf{F}_n^p)^{-T} &&= \varphi_n^{p*}[\tilde{\mathbf{S}}] \\
\text{mit } \tilde{\mathbf{S}} &= (\mathbf{F}^{e,trial})^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot (\mathbf{F}^{e,trial})^{-T} &&= \varphi^{e,trial*}[\boldsymbol{\tau}] .
\end{aligned} \tag{5.49}$$

Der in Abschnitt 2.3.2 eingeführte inkrementelle materielle Stofftensor verknüpft das Inkrement $\Delta \mathbf{S}$ des 2. Piola-Kirchhoff Spannungstensors mit dem Inkrement $\Delta \mathbf{E}$ des Green-Lagrangeschen Verzerrungstensors:

$$\Delta \mathbf{S} = \mathbb{C} : \frac{1}{2} \Delta \mathbf{C} = \mathbb{C} : \Delta \mathbf{E} \quad \text{mit } \mathbb{C} = \varphi_n^{p*}[\tilde{\mathbb{C}}] \quad \text{und} \quad \Delta \tilde{\mathbf{S}} = \tilde{\mathbb{C}} : \frac{1}{2} \Delta \tilde{\mathbf{C}} . \tag{5.50}$$

Der inkrementelle räumliche Stofftensor in

$$\Delta \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\mathfrak{c}} : \Delta \mathbf{e} \quad \text{mit } \boldsymbol{\mathfrak{c}} = \varphi_{n+1*}[\mathbb{C}] = \varphi_{n+1*}[\varphi_n^{p*}[\tilde{\mathbb{C}}]] . \tag{5.51}$$

ergibt sich dann aus der Push-Forward Transformation des materiellen Stofftensors.

Zur Berechnung der Stofftensoren \mathbb{C} , $\boldsymbol{\mathfrak{c}}$ in (5.50), (5.51) ist der Stofftensor $\tilde{\mathbb{C}}$ der Zwischenkonfiguration erforderlich. Dazu benötigt man zunächst die Spektraldarstellungen

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{C}} &= \sum_{i=1}^3 \tilde{C}_i \tilde{\mathbf{N}}_i \otimes \tilde{\mathbf{N}}_i \quad \text{mit} \quad \tilde{C}_i = (\lambda_i^{e,trial})^2 , \\
\tilde{\mathbf{S}} &= \sum_{i=1}^3 \tilde{S}_i \tilde{\mathbf{N}}_i \otimes \tilde{\mathbf{N}}_i \quad \text{mit} \quad \tilde{S}_i = (\lambda_i^{e,trial})^{-2} \tau_i .
\end{aligned} \tag{5.52}$$

Beide Tensoren besitzen dieselbe Eigenvektorbasis. Die Darstellung (5.52)₁ ergibt sich mit (5.48)₂ aus (5.49)₂. Die Darstellung (5.52)₂ ergibt sich mit (5.37), (5.48)₂ aus (5.49)₄. Der Übergang auf die Inkremente

$$\begin{aligned}
\Delta \tilde{\mathbf{C}} &= \sum_{i=1}^3 \Delta \tilde{C}_i \tilde{\mathbf{N}}_i \otimes \tilde{\mathbf{N}}_i + \sum_{i,j=1, i \neq j}^3 \tilde{\Omega}_{ij} (\tilde{C}_j - \tilde{C}_i) \tilde{\mathbf{N}}_i \otimes \tilde{\mathbf{N}}_j , \\
\Delta \tilde{\mathbf{S}} &= \sum_{i=1}^3 \Delta \tilde{S}_i \tilde{\mathbf{N}}_i \otimes \tilde{\mathbf{N}}_i + \sum_{i,j=1, i \neq j}^3 \tilde{\Omega}_{ij} (\tilde{S}_j - \tilde{S}_i) \tilde{\mathbf{N}}_i \otimes \tilde{\mathbf{N}}_j
\end{aligned} \tag{5.53}$$

erfolgt analog zu (2.35) in Abschnitt 2.1.5 und (4.55) in Abschnitt 4.3.2. Die Inkre-

mente der Spannungshauptwerte auf der Zwischenkonfiguration ergeben sich zu:

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{S}_i &= \sum_{j=1}^3 (\partial_{\tilde{C}_j} \tilde{S}_i) \Delta \tilde{C}_j = -(\lambda_i^{e,trial})^{-4} \tau_i \Delta \tilde{C}_i \\ &\quad + \frac{1}{2} (\lambda_i^{e,trial})^{-2} \sum_{j=1}^3 (\lambda_j^{e,trial})^{-2} (\partial_{\tilde{C}_j} \tau_i) \Delta \tilde{C}_j \end{aligned} \quad (5.54)$$

$$\text{mit } \partial_{\tilde{C}_j} \tau_i = [\partial_{\underline{\epsilon}^e, trial} \underline{\tau}]_{ij}$$

$$\text{und } \partial_{\underline{\epsilon}^e, trial} \underline{\tau} = \underline{H}_{\epsilon^e} - \frac{[\underline{H}_{\epsilon^e}(\partial_{\underline{\tau}} f)][\underline{H}_{\epsilon^e}(\partial_{\underline{\tau}} f)]^T}{(\partial_{\underline{\tau}} f)^T [\underline{H}_{\epsilon^e}(\partial_{\underline{\tau}} f)] + (\partial_q f) H_{\xi}(\partial_q f)} .$$

Der darin auftretende symmetrische algorithmische elastoplastische Modul $\partial_{\underline{\epsilon}^e, trial} \underline{\tau}$ geht aus der konsistenten algorithmischen Linearisierung $\Delta \underline{\tau} = (\partial_{\underline{\epsilon}^e, trial} \underline{\tau}) \Delta \underline{\epsilon}^{e, trial}$ des elastoplastischen Integrationsalgorithmus hervor (siehe beispielsweise SIMO [1992]). Hierbei ist die diskrete Konsistenzbedingung (5.33) auszuwerten. Die Moduli $\underline{H}_{\epsilon^e}$ und H_{ξ} wurden bereits in (5.46)_{2,4} eingeführt. Für den rein elastischen Fall mit $f_{n+1}^{trial} \leq 0$ gilt

$$\partial_{\underline{\epsilon}^e, trial} \underline{\tau} = [\partial_{\underline{\epsilon}^e \underline{\epsilon}^e}^2 W]_{\underline{\epsilon}^e = \underline{\epsilon}^e, trial} . \quad (5.55)$$

Passend zur Formulierung der Inkremente $\Delta \tilde{C}$ und $\Delta \tilde{S}$ in (5.53) bezüglich der Eigenvektorbasis \tilde{N}_i wird die Darstellung

$$\tilde{C} = \sum_{i,j,k,l=1}^3 \tilde{C}_{ijkl} \tilde{N}_i \otimes \tilde{N}_j \otimes \tilde{N}_k \otimes \tilde{N}_l \quad (5.56)$$

des Stofftensors bezüglich der Zwischenkonfiguration angestrebt. Analog zu Abschnitt 4.4.2 ergibt sich der Stofftensor durch Koeffizientenvergleich in (5.50)₃ mit (5.53), (5.54) und (5.56):

$$\begin{aligned} \tilde{C} &= \sum_{i,j=1}^3 \tilde{C}_{iiij} \tilde{N}_i \otimes \tilde{N}_i \otimes \tilde{N}_j \otimes \tilde{N}_j + \\ &\quad \sum_{i,j=1, i \neq j}^3 \tilde{C}_{ijij} (\tilde{N}_i \otimes \tilde{N}_j \otimes \tilde{N}_i \otimes \tilde{N}_j + \tilde{N}_i \otimes \tilde{N}_j \otimes \tilde{N}_j \otimes \tilde{N}_i) \end{aligned} \quad (5.57)$$

mit

$$\tilde{C}_{iiij} = (\lambda_i^{e,trial} \lambda_j^{e,trial})^{-2} (\partial_{\tilde{C}_j} \tau_i) - 2(\lambda_i^{e,trial})^{-2} \tilde{S}_i \delta_{ij} ,$$

$$\tilde{C}_{ijij} = [(\lambda_i^{e,trial})^2 - (\lambda_j^{e,trial})^2]^{-1} [\tilde{S}_i - \tilde{S}_j]$$

$$\text{mit Grenzfall } \lim_{\lambda_i \rightarrow \lambda_j} \tilde{C}_{ijij} = \frac{1}{2} (\tilde{C}_{iiii} - \tilde{C}_{jjjj}) \quad \text{für } i \neq j .$$

Der räumliche elastoplastische Stofftensor \mathfrak{c} geht aus der Transformation (5.51)₂ des elastoplastischen Stofftensors der Zwischenkonfiguration (5.57) hervor. Er besitzt die

Darstellung (4.65) mit den Komponenten

$$\begin{aligned} c_{iijj} &= -2\delta_{ij}\tau_i + \partial_{\epsilon_j^e, trial} \tau_i \quad , \\ c_{ijij} &= [(\lambda_i^{e, trial})^2 - (\lambda_j^{e, trial})^2]^{-1} [(\lambda_j^{e, trial})^2 \tau_i - (\lambda_i^{e, trial})^2 \tau_j] \end{aligned} \quad (5.58)$$

$$\text{mit Grenzfall } \lim_{\lambda_i \rightarrow \lambda_j} c_{ijij} = \frac{1}{2}(c_{iii} - c_{jji}) \quad \text{für } i \neq j \quad .$$

Die Eigenvektorbasis ist durch (5.40) gegeben. Der materielle elastoplastische Stofftensor $\mathbb{C} = \varphi_t^*[\mathbb{c}]$ geht aus der Pull-Back Transformation des räumlichen elastoplastischen Stofftensors hervor. Er besitzt die Darstellung (4.67) mit den Komponenten (5.58). Für den rein elastischen Fall mit $f_{n+1}^{trial} \leq 0$ ist die Berechnungsvorschrift der elastoplastischen Stofftensoren identisch mit der Berechnungsvorschrift der elastischen Stofftensoren (siehe Abschnitt 4.4.2), da dann die Komponenten c_{iijj} , c_{ijij} in (4.66) mit $\lambda_i = \lambda_i^e$ und in (5.58) mit $\lambda_i^{e, trial} = \lambda_i^e$ dieselbe Berechnungsvorschrift besitzen.

5.5 Deviatorisch-volumetrische Zerlegung

In den Abschnitten 4.3.3 und 4.4.3 sind unter der Voraussetzung isochor-volumetrisch entkoppelter Elastizität die deviatorisch-volumetrisch entkoppelten Spannungs- und Stofftensoren angegeben. Ziel der folgenden Entwicklungen ist es, die entkoppelten Spannungs- und Stofftensoren für den Fall entkoppelter Elastoplastizität herzuleiten (siehe DOLL, HAUPTMANN, SCHWEIZERHOF & FREISCHLÄGER [1998]).

Ausgangspunkt der Herleitung ist die additive Entkopplung der Energiefunktion

$$\begin{aligned} W(\epsilon_1^e, \epsilon_2^e, \epsilon_3^e, \xi) &= \widehat{W}(\hat{\epsilon}_1^e, \hat{\epsilon}_2^e, \hat{\epsilon}_3^e) + U(J^e) + W^p(\xi) \\ \text{mit } \hat{\epsilon}_i^e &= \ln \widehat{\lambda}_i^e = \epsilon_i^e - \frac{1}{3}(\epsilon_1^e + \epsilon_2^e + \epsilon_3^e) \quad \text{und } \widehat{\lambda}_i^e = (J^e)^{-1/3} \lambda_i^e \end{aligned} \quad (5.59)$$

in einen elastischen isochoren Anteil \widehat{W} , einen elastischen volumetrischen Anteil U und in einen plastischen Anteil W^p , der die isotrope Verfestigung repräsentiert. Außerdem wird eine deviatorische Fließbedingung (5.34) mit

$$\partial_{\boldsymbol{\tau}} f = \text{dev}[\partial_{\boldsymbol{\tau}} f] \quad \text{und} \quad \text{tr}[\partial_{\boldsymbol{\tau}} f] = 0 \quad (5.60)$$

angenommen, d.h. die Ableitung der skalaren Fließbedingung f nach dem Kirchhoffschen Spannungstensor $\boldsymbol{\tau}$ führt auf einen rein deviatorischen Tensor (5.38) mit verschwindender Spur

$$\partial_{\tau_1} f + \partial_{\tau_2} f + \partial_{\tau_3} f = 0 \quad .$$

Aus der Korrekturformel (5.41) folgt damit direkt

$$\epsilon_1^e + \epsilon_2^e + \epsilon_3^e = \epsilon_1^{e, trial} + \epsilon_2^{e, trial} + \epsilon_3^{e, trial} \quad . \quad (5.61)$$

Bildet man den elastischen Anteil der Dilatation (5.6)₂

$$J^e = \exp(\epsilon_1^e + \epsilon_2^e + \epsilon_3^e) = \exp(\epsilon_1^{e,trial} + \epsilon_2^{e,trial} + \epsilon_3^{e,trial}) = J^{e,trial} \quad ,$$

so zeigt sich, daß im plastischen Korrektor der elastische Anteil der Dilatation nicht verändert wird (plastische Inkompressibilität). Als Folge der deviatorischen Fließbedingung (5.60) ist der plastische Deformationsanteil isochor. Die Kombination der Korrekturformel (5.41) mit (5.59)₂ und (5.61) liefert

$$\hat{\epsilon}_i^e = \hat{\epsilon}_i^{e,trial} - \Delta\gamma \partial_{\tau_i} f \quad \text{mit} \quad \hat{\epsilon}_i^{e,trial} = \epsilon_i^{e,trial} - \frac{1}{3}(\epsilon_1^{e,trial} + \epsilon_2^{e,trial} + \epsilon_3^{e,trial}) \quad . \quad (5.62)$$

Der Vergleich der beiden Korrekturformeln (5.41) und (5.62)₁ zeigt, daß bei Voraussetzung von (5.59) und (5.60) die elastischen logarithmischen Hauptstreckungen ϵ_i^e durch deren isochoren Anteile $\hat{\epsilon}_i^e$ ersetzt werden dürfen. Der deviatorische Charakter der Korrekturformel (5.62)₁ ist offensichtlich, da die Summe der drei isochoren logarithmischen Streckungen immer verschwindet.

i. Spannungstensor: Die Tensorbasis \mathbf{n}_i des Kirchhoffschen Spannungstensors ist unabhängig von der deviatorisch-volumetrischen Zerlegung, d.h. es müssen lediglich die Tensorkomponenten τ_i in (5.37) additiv in einen deviatorischen und einen volumetrischen Anteil aufgespalten werden. Die Anwendung von (5.37)₂ auf die entkoppelte Energiefunktion (5.59) liefert

$$\begin{aligned} \tau_i &= \tau_i^{\text{dev}} + \tau^{\text{vol}} \\ \text{mit} \quad \tau_i^{\text{dev}} &= \partial_{\epsilon_i^e} \widehat{W} = \partial_{\hat{\epsilon}_i^e} \widehat{W} - \frac{1}{3} \sum_{k=1}^3 \partial_{\epsilon_k^e} \widehat{W} \\ \text{mit} \quad \tau^{\text{vol}} &= \partial_{\epsilon^e} U = [J^e \partial_{J^e} U]_{J^e = J^{e,trial}} \quad . \end{aligned} \quad (5.63)$$

Der entkoppelte räumliche und materielle Spannungstensor (4.56) ergeben sich dann durch Einsetzen dieser Komponenten in die Darstellungen (4.52)₁ und (4.53)₁. Der Vergleich von (5.63) mit (4.57) zeigt, daß die Zerlegung der Spannungen sowohl im elastischen als auch im elastoplastischen Fall nach der gleichen Vorschrift erfolgt, wobei im elastischen Fall $\hat{\epsilon}_i^e = \hat{\epsilon}_i$ und $J^e = J$ gelten. Der plastische Korrektor beeinflusst lediglich den deviatorischen Spannungsanteil, nicht jedoch den volumetrischen Spannungsanteil. Der in Abschnitt 5.3.2 beschriebene plastische Korrektor kann auch ohne Änderung auf den deviatorisch-volumetrisch entkoppelten Fall angewendet werden. Dies läßt sich einfach nachweisen, da mit den logarithmischen isochoren Streckungen (5.59)₂ und (5.62)₂ und der Beziehung (5.61) die Identität der Korrekturformeln (5.41) und (5.62)₁ gezeigt werden kann, d.h. das Residuum

$$\underline{R}_{\epsilon^e} = \underline{R}_{\epsilon^e}(\underline{\epsilon}^e, \Delta\gamma) = -\underline{\epsilon}^e + \underline{\epsilon}^{e,trial} - \Delta\gamma \partial_{\tau} f = -\hat{\underline{\epsilon}}^e + \hat{\underline{\epsilon}}^{e,trial} - \Delta\gamma \partial_{\tau} f = \underline{R}_{\epsilon^e}(\hat{\underline{\epsilon}}^e, \Delta\gamma)$$

aus (5.43)₁ wird dabei nicht verändert. Da im plastischen Korrektor die Versuchsgrößen $\epsilon_i^{e,trial}$ festgehalten werden, kann mit (5.61) aus (5.59)₂ direkt auf die Identität

$$\Delta \underline{\epsilon}^e = \Delta \hat{\underline{\epsilon}}^e$$

mit dem Inkrement (5.45)₂ geschlossen werden.

ii. Stofftensor: Für den nicht entkoppelten Fall sind die Komponenten des Stofftensors in (5.58) hergeleitet. Wegen der additiven Entkopplung der Spannungen (5.63) kann daraus unmittelbar die additive Entkopplung der Komponenten

$$\begin{aligned}
c_{ijj} &= c_{ijj}^{\text{dev}} + c_{ijj}^{\text{vol}} \\
\text{mit } c_{ijj}^{\text{dev}} &= -2\delta_{ij}\tau_i^{\text{dev}} + \partial_{\epsilon_j^{e,\text{trial}}}\tau_i^{\text{dev}} \\
\text{mit } c_{ijj}^{\text{vol}} &= -2\delta_{ij}\tau^{\text{vol}} + \partial_{\epsilon_j^{e,\text{trial}}}\tau^{\text{vol}} \quad , \\
c_{ijj} &= c_{ijj}^{\text{dev}} + c_{ijj}^{\text{vol}} \\
\text{mit } c_{ijj}^{\text{dev}} &= [(\widehat{\lambda}_i^{e,\text{trial}})^2 - (\widehat{\lambda}_j^{e,\text{trial}})^2]^{-1} [(\widehat{\lambda}_j^{e,\text{trial}})^2\tau_i^{\text{dev}} - (\widehat{\lambda}_i^{e,\text{trial}})^2\tau_j^{\text{dev}}] \quad (5.64) \\
\text{Grenzfall } \lim_{\lambda_i^{e,\text{trial}} \rightarrow \lambda_j^{e,\text{trial}}} c_{ijj}^{\text{dev}} &= \frac{1}{2}(c_{iii}^{\text{dev}} - c_{jjj}^{\text{dev}}) \quad \text{für } i \neq j \\
\text{mit } c_{ijj}^{\text{vol}} &= -\tau^{\text{vol}} \\
\text{Grenzfall } \lim_{\lambda_i^{e,\text{trial}} \rightarrow \lambda_j^{e,\text{trial}}} c_{ijj}^{\text{vol}} &= \frac{1}{2}(c_{iii}^{\text{vol}} - c_{jjj}^{\text{vol}}) \quad \text{für } i \neq j \quad .
\end{aligned}$$

angegeben werden. Der Vergleich der Komponenten (5.64) und (4.69) des Stofftensors zeigt, daß im elastoplastischen Fall die Größen $\epsilon_i^{e,\text{trial}}$, $\widehat{\lambda}_i^{e,\text{trial}}$ und $J^{e,\text{trial}}$ an die Stelle der Größen ϵ_i , $\widehat{\lambda}_i$ und J des elastischen Falls treten. Wesentlich für die Entkopplung (5.64) ist, daß die Spannungsableitung

$$\begin{aligned}
\partial_{\epsilon_j^{e,\text{trial}}}\tau_i &= \partial_{\epsilon_j^{e,\text{trial}}}\tau_i^{\text{dev}} + \partial_{\epsilon_j^{e,\text{trial}}}\tau^{\text{vol}} \quad , \\
\partial_{\epsilon_j^{e,\text{trial}}}\tau_i^{\text{dev}} &= \partial_{\epsilon_i^{e,\text{trial}}}\tau_j^{\text{dev}} = \text{kein expliziter Ausdruck} \quad , \quad (5.65) \\
\partial_{\epsilon_j^{e,\text{trial}}}\tau^{\text{vol}} &= \tau^{\text{vol}} + [(J^e)^2 \partial_{J^e J^e}^2 U]_{J^e = J^{e,\text{trial}}}
\end{aligned}$$

additiv in einen deviatorischen und einen volumetrischen Anteil aufgespalten werden kann. Der volumetrische Anteil des elastoplastischen Falls (5.65)₃ wird nach derselben Vorschrift berechnet wie der volumetrische Anteil des elastischen Falls (4.70)₃, d.h. der plastische Korrektor besitzt keinen Einfluß auf den volumetrischen Anteil. Da die volumetrische Spannung (5.63)₃ explizit von den elastischen Prädiktorstreckungen abhängt, kann deren Ableitung (5.65)₃ explizit ausgeführt werden. Da die deviatorische Spannung (5.63)₂ vom plastischen Korrektor abhängt, kann deren Ableitung (5.65)₂ im Gegensatz zum elastischen Fall (4.70)₂ im allgemeinen nicht explizit angegeben werden. Das zentrale Problem der Entkopplung des Stofftensors (5.64) besteht nun darin, eine Berechnungsvorschrift für die Ableitung (5.65)₂ zu finden. Dieses Problem wird im folgenden Abschnitt behandelt.

Der Sonderfall der isochor-volumetrischen Entkopplung des elastischen Anteils der Energiefunktion (5.59) ist in den allgemeineren Ausführungen in Abschnitt 5.4 enthalten. Der algorithmische elastoplastische Modul $\partial_{\epsilon_j^{e,\text{trial}}}\tau_i$ aus (5.54)_{2,3} kann deshalb

identisch übernommen und im weiteren als bekannt vorausgesetzt werden. Der explizite Ausdruck für den volumetrischen Anteil $\partial_{\epsilon_j^{e,trial}} \mathcal{T}^{vol}$ ist in (5.65)₃ gegeben und somit ebenfalls bekannt. Der deviatorische Anteil der Spannungsableitung (5.65)₂ kann nun durch Umstellung der Gleichung (5.65)₁ bestimmt werden:

$$\partial_{\epsilon_j^{e,trial}} \mathcal{T}_i^{dev} = \partial_{\epsilon_j^{e,trial}} \mathcal{T}_i - \partial_{\epsilon_j^{e,trial}} \mathcal{T}^{vol} . \quad (5.66)$$

Somit sind alle Terme in den Komponenten des Stofftensors (5.64) bekannt. Der entkoppelte räumliche und materielle Stofftensor (4.68) ergeben sich schließlich durch Einsetzen der Komponenten (5.64) in die Darstellungen (4.65) und (4.67).

Bei der Berechnung der gesamten Spannungsableitung $\partial_{\epsilon_j^{e,trial}} \mathcal{T}_i$ mittels der Beziehung (5.54)_{2,3} tritt der Modul $\underline{H}_{\epsilon^e}$ aus Gleichung (5.46)₂ auf. Ausgehend von der entkoppelten Energiefunktion (5.59) muß bei der Berechnung des Moduls $\underline{H}_{\epsilon^e}$ die additive Aufspaltung

$$\partial_{\epsilon^e \epsilon^e}^2 W = \partial_{\epsilon^e \epsilon^e}^2 \widehat{W} + \partial_{\epsilon^e \epsilon^e}^2 U \quad (5.67)$$

eingesetzt werden. Bedingt durch die Matrizeninversionen in (5.46)₂ kann der Modul $\underline{H}_{\epsilon^e}$ nicht additiv entkoppelt werden, d.h. die anfangs vorhandene Entkopplung (5.67) geht verloren. Obwohl die Entkopplung der Spannungsableitung (5.65)₁ existiert, kann die Entkopplung im allgemeinen nicht direkt durch Auswertung der Formel (5.54)_{2,3} erhalten werden, sondern es muß der Umweg über die Formeln (5.65)₃ und (5.66) bestritten werden.

Für den rein elastischen Fall mit $f_{n+1}^{trial} \leq 0$ und $\epsilon_i^e = \epsilon_i^{e,trial}$ kann die Ableitung der deviatorischen Spannungen

$$\partial_{\epsilon_j^{e,trial}} \mathcal{T}_i^{dev} = \left[\partial_{\epsilon_i^e \epsilon_j^e}^2 \widehat{W} \right]_{\epsilon_k^e = \epsilon_k^{e,trial}}$$

explizit angegeben werden (siehe auch (4.70)₂) und muß nicht mittels der Beziehung (5.66) berechnet werden. Die Ableitung der volumetrischen Spannung (5.65)₃ bleibt dabei unverändert.

Abschließend sei angemerkt, daß die additive deviatorisch-volumetrische Aufspaltung des Spannungs- und des Stofftensors bei elastoplastischem Stoffverhalten bereits in SIMO [1988a,b] oder MÜLLER-HOEPPE & STEIN [1992] für einen Spezialfall gegeben ist. Die hier beschriebene Vorgehensweise unterscheidet sich bezüglich des Vorgehens in den genannten Arbeiten zum einen in der algorithmischen Formulierung der Elastoplastizität und zum anderen in ihrer größeren Allgemeingültigkeit (siehe auch Abschnitt 6.4 für den viskoplastischen Fall). Zur Beschreibung des elastischen Stoffverhaltens sind hier beliebige isochor-volumetrisch entkoppelte Energiefunktionen zugelassen, d.h. es erfolgt keine Beschränkung auf eine spezielle entkoppelte Energiefunktion. Im Vorgriff auf die Finite Elemente Formulierungen in Kapitel 7 sei bereits an dieser Stelle auf einen weiteren Unterschied hingewiesen. In der vorliegenden Arbeit wird die deviatorisch-volumetrische Aufspaltung im Hinblick auf eine selektiv reduzierte Integration der volumetrischen Anteile vorgenommen (siehe Abschnitt 7.1.3). In den erwähnten Arbeiten wurde hingegen eine vereinfachte Implementierung des Q1/P0 Elementes (siehe Abschnitte 7.1.6 und 7.1.7) angestrebt.

5.6 Algorithmus für elastoplastische Werkstoffe

Die Bemerkungen aus Abschnitt 4.5 können unverändert übernommen werden, da die Pull-Back und Push-Forward Transformationen zwischen der Referenz- und der Momentankonfiguration nur vom gesamten Deformationsgradienten abhängen und die multiplikative Zerlegung (5.1) nicht berücksichtigt werden muß. Der Unterschied des elastoplastischen Falls zum elastischen Fall besteht ausschließlich in der Berechnung der Hauptspannungen τ_i und der Komponenten c_{iijj} , c_{ijij} . Hierzu muß im elastoplastischen Fall der Algorithmus bestehend aus elastischem Prädiktor und plastischem Korrektor angewandt werden. Der Algorithmus für elastoplastische Werkstoffe ist in Tafel 5.1 zusammengefaßt. Der Vergleich mit Tafel 4.3 zeigt, daß sich beide Algorithmen lediglich in Punkt 2 unterscheiden. Die Stofftensoren in Punkt 4 sind die inkrementellen Stofftensoren. Es sei angemerkt, daß für identische elastische Energiedichtefunktionen der elastische und der elastoplastische Werkstoffalgorithmus identische Ergebnisse liefern, sofern die Bedingung $f^{trial} \leq 0$ stets eingehalten wird.

Für den Sonderfall der additiven deviatorisch-volumetrischen Zerlegung (siehe Abschnitt 5.5) muß der Algorithmus in Tafel 5.1 nur unwesentlich modifiziert werden. Anstatt der Gesamtkomponenten sind dann die entkoppelten Spannungskomponenten (5.63) und die entkoppelten Moduli (5.64) zu verwenden. Damit werden der Spannungstensor und der Stofftensor in Punkt 4 der Tafel 5.1 ohne weitere Operationen entkoppelt. Es sei angemerkt, daß auch der plastische Korrektor prinzipiell nicht modifiziert werden muß. Bei der Implementierung des entsprechenden Algorithmusteils ist es jedoch vorteilhaft, alle volumetrischen Größen vorab zu berechnen und im lokalen Newton Verfahren lediglich die deviatorischen Größen zu iterieren.

1. Berechne \mathbf{F} .
2. Elastischer Prädiktor:
 - a) Berechne $\mathbf{b}^{e,trial}$ (5.31)₁ und ξ^{trial} (5.31)₂.
 - b) Berechne $\epsilon_i^{e,trial}$ (5.35)₂ und $\mathbf{n}_i = \mathbf{n}_i^{trial}$ (5.40) aus Spektralzerlegung von $\mathbf{b}^{e,trial}$ (5.39)₂.
 - c) Berechne τ_i^{trial} (5.37)₂, q^{trial} (5.16)₁ und f^{trial} (5.36).
 - d) Fallunterscheidung:
 - (i) $f^{trial} \leq 0$: Setze $() = ()^{trial}$, berechne $\partial_{\underline{\epsilon}^{e,trial}} \underline{\tau}$ (5.55) mit (5.54)₂, c_{iijj} , c_{ijij} (5.58), weiter mit 3.
 - (ii) $f^{trial} > 0$: Weiter mit plastischem Korrektor.
- Plastischer Korrektor:
 - e) Iteriere ϵ_i^e , ξ , $\Delta\gamma$ aus (5.43)–(5.47).
 - f) Berechne τ_i (5.37)₂, $\partial_{\underline{\epsilon}^e} \underline{\tau}$ (5.54)_{2,3}, c_{iijj} , c_{ijij} (5.58).
3. Wahl der Konfiguration (Momentan- oder Referenzkonfiguration):

Mom	→	Berechne $J = \det \mathbf{F}$ und setze $\mathbf{m}_i = \mathbf{n}_i$, $\beta = J^{-1}$.
Ref	→	Berechne \mathbf{F}^{-1} und setze $\mathbf{m}_i = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{n}_i$, $\beta = 1$.
4. Berechne die der gewählten Konfiguration zugeordneten Spannungstensoren und inkrementellen Stofftensoren:

Mom	→	$\boldsymbol{\sigma} = J^{-1} \boldsymbol{\tau}$	}	=	$\beta \sum_{i=1}^3 \tau_i \mathbf{m}_i \otimes \mathbf{m}_i$,
Ref	→	\mathbf{S}				
Mom	→	$\mathfrak{c}^* = J^{-1} \mathfrak{c}$	}	=	$\beta \sum_{i,j=1}^3 c_{iijj} \mathbf{m}_i \otimes \mathbf{m}_i \otimes \mathbf{m}_j \otimes \mathbf{m}_j +$	$\beta \sum_{i \neq j} c_{ijij} (\mathbf{m}_i \otimes \mathbf{m}_j \otimes \mathbf{m}_i \otimes \mathbf{m}_j +$
Ref	→	\mathfrak{C}				

Tafel 5.1: Algorithmus für elastoplastische Werkstoffe bei einer wahlweise räumlichen (Mom) oder materiellen (Ref) Formulierung.

Kapitel 6

Elastoviskoplastizität

Es wird angenommen, daß der plastische Deformationsanteil ein viskoses Verhalten und der elastische Deformationsanteil ein zeitunabhängiges Verhalten zeigen. Das Attribut „viskos“ ist hierbei gleichbedeutend mit den Attributen „zeitabhängig“ bzw. „ratenabhängig“. Die Formulierungen, welche die elastischen Anteile betreffen, können ohne Änderung aus den Kapiteln 4 und 5 übernommen werden.

Zunächst wird von einer zeitunabhängigen Formulierung des elastoplastischen Stoffverhaltens ausgegangen, d.h. die Abschnitte 5.1 und 5.2.1–5.2.3 können ohne Änderung übernommen werden. Das Prinzip der maximalen plastischen Dissipation, das in Abschnitt 5.2.4 unter Einhaltung der Kuhn-Tucker Bedingungen ausgewertet wurde, wird nun mittels des Penalty Verfahrens ausgewertet. Zunächst werden die Änderungen behandelt, die sich aufgrund des Penalty Verfahrens ergeben. Erst dann erfolgt der Übergang auf die zeitabhängige Formulierung der Elastoviskoplastizität und die Auswirkungen werden rückblickend diskutiert.

Die Beschreibung elastoviskoplastischen Stoffverhaltens bei großen Deformationen, wie sie in diesem Kapitel angestrebt wird, basiert auf dem Modell von Perzyna (siehe beispielsweise PERZYNA [1963], PERZYNA [1966], PERZYNA [1971]). Die numerische Umsetzung erfolgt in Anlehnung an die Arbeiten von MIEHE [1993] und SIMO & HUGHES [1998]. In den einleitenden Bemerkungen zu Kapitel 5 sind bereits Literaturhinweise zur zeitunabhängigen Formulierung der Elastoplastizität gegeben. Die folgenden der dort angegebenen Zitate behandeln ebenfalls die Erweiterung des jeweiligen Stoffmodells zur zeitabhängigen Formulierung der Elastoviskoplastizität: SIMO & ORTIZ [1985], MÜLLER-HOEPPE [1990], MORAN, ORTIZ & SHIH [1990], MÜLLER-HOEPPE & STEIN [1992], SIMO [1992], CUITIÑO & ORTIZ [1992]. Kapitel 6 dieser Arbeit ist im Sinne der genannten Zitate lediglich als Ergänzung von Kapitel 5 anzusehen. Daher wird an dieser Stelle auf weitere Angaben zum Schrifttum verzichtet. Es sei angemerkt, daß die bereits in Kapitel 5 erwähnte Arbeit von WEBER & ANAND [1990] eine rein viskoplastische Formulierung beinhaltet.

Die Formulierung viskoplastischen Stoffverhaltens nach dem alternativen Konzept von DUVAUT & LIONS [1972] wird in der vorliegenden Arbeit nicht verfolgt. Basierend auf den Ausführungen in Kapitel 5 bietet die hier gewählte Penalty Formulierung (Modell von Perzyna) den Vorteil, daß alle erforderlichen Evolutionsgleichungen abgeleitet werden können. Die Übertragung der Fließregel (5.25)₁ auf das Konzept von Duvaut-Lions kann zwar motiviert werden, aber nach Kenntnis des Autors nicht direkt abgeleitet werden. Ein weiterer Vorteil des Penalty Verfahrens ist, daß der Algorithmus für elastoplastische Werkstoffe aus Abschnitt 5.6 für den viskoplastischen Fall nur geringfügig modifiziert werden muß. Für einen Vergleich der Modelle von Perzyna und Duvaut-Lions sei außerdem auf die Arbeit von WANG, SLUYS & DE BORST [1997] verwiesen, in der jedoch nur kleine Verzerrungen berücksichtigt werden.

Es sei angemerkt, daß der Parameter t , wie er bei der Formulierung der zeitabhängigen Viskoplastizität auftritt, nun im Gegensatz zur zeitunabhängigen Formulierung der Plastizität die Rolle der tatsächlichen Zeit übernimmt.

6.1 Prinzip der maximalen plastischen Dissipation

In Abschnitt 5.2.4 wurde die negative plastische Dissipation $-\mathcal{D}(\boldsymbol{\tau}, q, \mathbf{q})$ unter Berücksichtigung der Nebenbedingung $f(\boldsymbol{\tau}, q, \mathbf{q}) \leq 0$ durch Einhaltung der Kuhn-Tucker Bedingungen A.2.1 exakt minimiert. Exakt bezieht sich hierbei sowohl auf die Exaktheit der Minimumstelle als auch die exakte Einhaltung der Nebenbedingung. Den Ausführungen im Anhang A.2 folgend kann zur Minimumsuche aber auch alternativ das Penalty Verfahren A.2.2 angewandt werden, welches jedoch nur im Grenzfall sowohl die exakte Minimumstelle liefert als auch die exakte Einhaltung der Nebenbedingung erzwingt. An dieser Stelle soll das Prinzip der maximalen plastischen Dissipation in Kombination mit dem Penalty Verfahren ausgewertet werden.

Zu Minimieren ist die Funktion $-\mathcal{D}(\boldsymbol{\tau}, q, \mathbf{q})$. Die Nebenbedingung $f(\boldsymbol{\tau}, q, \mathbf{q}) \leq 0$ wird mit Hilfe des Penalty Terms eingebracht und man erhält schließlich das Minimierungsproblem

$$(\dot{\mathbf{b}}^e, \dot{\xi}, \dot{\boldsymbol{\xi}}) = \text{Arg}\{ \text{Min}\{ -\mathcal{D}(\boldsymbol{\tau}, q, \mathbf{q}) + \frac{\tau_0^2}{\eta} P(\boldsymbol{\tau}, q, \mathbf{q}) \} \} \quad (6.1)$$

ohne Nebenbedingung. Für die Penalty Funktion (siehe MIEHE [1993])

$$P(\boldsymbol{\tau}, q, \mathbf{q}) = \beta(f^+(\boldsymbol{\tau}, q, \mathbf{q})) \quad \text{mit} \quad f^+(\boldsymbol{\tau}, q, \mathbf{q}) = \max[0, f(\boldsymbol{\tau}, q, \mathbf{q})/\tau_0] \quad (6.2)$$

und $\partial_{f^+} \beta(f^+) |_{f^+=0} = 0$

werden die im Anhang A.2.2 aufgeführten Eigenschaften gefordert. Insbesondere ist β eine Funktion in Abhängigkeit der Fließbedingung, die bei Erfüllung der Fließbedingung zu null wird und bei Verletzung der Fließbedingung einen positiven Wert annimmt. Die konstante positive skalare Spannung $\tau_0 > 0$ (hier Anfangsfließspannung) wird aus Dimensionsgründen eingeführt, um die Penalty Funktion zu normieren. Hierbei ist vorausgesetzt, daß die Fließbedingung die Dimension einer Spannung besitzt.

Der Penalty Parameter ist zu τ_0^2/η gewählt und sichert für den Grenzfall $\eta \rightarrow 0$ die Exaktheit des Minimierungsverfahrens mit Nebenbedingung. Die Spannung τ_0 im Penalty Parameter wird ebenfalls aus Dimensionsgründen berücksichtigt.

Wie in der Einführung zu diesem Kapitel bereits angemerkt ist, wird zunächst der elastoplastische Grenzfall mit $\eta \rightarrow 0$ implizit vorausgesetzt. Diese Voraussetzung bietet den Vorteil, daß die Grundgleichungen aus Kapitel 5 übernommen werden können. In diesem Kapitel wird bei der Herleitung der Gleichungen zur Viskoplastizität der Grenzübergang $\eta \rightarrow 0$ jedoch nicht explizit ausgeführt, d.h. es werden keine Terme vernachlässigt. Diese Vorgehensweise bietet den Vorteil, daß an späterer Stelle dann der Fall mit einem endlichen Wert $\eta > 0$ berücksichtigt werden kann. Es sei vorweggenommen, daß der Parameter η die anschauliche Bedeutung einer Viskosität einnimmt. Das rheologische Modell des linearen viskosen Dämpfers mit der Spannungs-Dehnungs-Beziehung $\sigma = \eta \dot{\epsilon}$ kann dabei zur Erläuterung dienen. Bei verschwindender Viskosität $\eta = 0$ liefert der Dämpfer keinen Spannungsanteil. Ist jedoch ein endlicher Wert $\eta > 0$ für die Viskosität gegeben, so liefert der Dämpfer einen Spannungsanteil, der von der Dehnungsrate abhängt. Eine ausführliche Diskussion der Viskosität erfolgt in Abschnitt 6.6.

Zur Lösung des Minimierungsproblems (6.1) wird das Penalty Verfahren verwendet, welches im Anhang A.2.2 ausführlich erläutert ist. Die notwendige Bedingung (A.8) zur Erfüllung von (6.1) in der Darstellung (A.9) liefert:

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{2} \overset{\circ}{\mathbf{b}}^e \cdot \mathbf{b}^{e-1} &= \dot{\gamma} \partial_{\boldsymbol{\tau}} f(\boldsymbol{\tau}, q, \mathbf{q}) \quad , \\
 -\dot{\xi} &= \dot{\gamma} \partial_q f(\boldsymbol{\tau}, q, \mathbf{q}) \quad , \\
 -\dot{\boldsymbol{\xi}} &= \dot{\gamma} \partial_{\mathbf{q}} f(\boldsymbol{\tau}, q, \mathbf{q}) \quad , \\
 \dot{\gamma} &= \frac{\tau_0}{\eta} \partial_{f^+} \beta(f^+) \quad .
 \end{aligned} \tag{6.3}$$

Hierin ist $\dot{\gamma}$ der dem Penalty Parameter τ_0^2/η zugeordnete Lagrangesche Multiplikator. Da $\beta(f^+)$ eine monoton steigende Funktion ist, gilt $\dot{\gamma} \geq 0$. Der Vergleich mit der exakten Lösung des Minimierungsproblems aus Abschnitt 5.2.4 zeigt die Identität der Beziehungen (5.25)₁₋₃ und (6.3)₁₋₃. Diese Identität ist eine Folge der speziellen Wahl der Penalty Funktion (6.2). An die Stelle der Kuhn-Tucker Bedingungen (5.25)₄ tritt jetzt die explizite Berechnungsvorschrift (6.3)₄ für den viskoplastischen Multiplikator. Analog zu (5.25)₁ kann (6.3)₁ in die Evolutionsgleichung (5.27) überführt werden.

Für den rein elastischen Fall mit $\mathbf{F}^p = \mathbf{1}$, $\mathbf{b} = \mathbf{b}^e$, $f < 0$ folgt aus (6.2)₂ sofort $f^+ = 0$ und aus (6.2)₃ eingesetzt in (6.3)₄ folgt unmittelbar $\dot{\gamma} = 0$. Mit (6.3)₁₋₃ in (5.17) und (5.27) eingesetzt erhält man somit den in Abschnitt 4.3.1 beschriebenen elastischen Sonderfall $\mathcal{D} \equiv 0$, $\dot{\mathbf{b}} = \mathbf{l} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{l}^T$.

6.2 Integration der Evolutionsgleichungen

6.2.1 Anfangswertproblem und Integrationsalgorithmus

Für die Auswertung des Prinzips der maximalen plastischen Dissipation nach den beiden geschilderten Vorgehensweisen — Kuhn-Tucker Bedingungen in Abschnitt 5.2.4 bzw. Penalty Verfahren in Abschnitt 6.1 — ergibt sich als einziger Unterschied, daß die Nebenbedingungen (5.25)₄ durch die Belastungsbedingung (6.3)₄ ersetzt werden. Die Vorgehens- und Bezeichnungsweise in diesem Abschnitt entspricht derjenigen aus Abschnitt 5.3.1 und wird deshalb nicht nochmals erläutert. Bei Gleichungen, die unverändert aus Abschnitt 5.3.1 übernommen werden können, wird lediglich die Gleichungsnummer referiert.

Zur Lösung des elastoviskoplastischen Anfangswertproblems

$$\begin{aligned}
 \text{Evolutionsgleichungen} & : \text{ wie (5.28)}_{1-3} , \\
 \text{Belastungsbedingung} & : \dot{\gamma} = \frac{\tau_0}{\eta} \partial_{f^+} \beta(f^+) , \\
 \text{Anfangsbedingungen} & : \text{ wie (5.28)}_5
 \end{aligned} \tag{6.4}$$

wird eine Aufspaltung in ein elastisches Anfangswertproblem

$$\begin{aligned}
 \text{Evolutionsgleichungen} & : \text{ wie (5.29)}_{1-3} , \\
 \text{Belastungsbedingung} & : \text{ Keine} , \\
 \text{Anfangsbedingungen} & : \text{ wie (5.29)}_5
 \end{aligned} \tag{6.5}$$

und ein viskoplastisches Anfangswertproblem

$$\begin{aligned}
 \text{Evolutionsgleichungen} & : \text{ wie (5.30)}_{1-3} , \\
 \text{Belastungsbedingung} & : \dot{\gamma} = \frac{\tau_0}{\eta} \partial_{f^+} \beta(f^+) , \\
 \text{Anfangsbedingungen} & : \text{ wie (5.30)}_5
 \end{aligned} \tag{6.6}$$

vorgenommen. Die exakte Integration des elastischen Anfangswertproblems (6.5) liefert den Gleichungssatz

$$\text{wie (5.31)} \tag{6.7}$$

und die näherungsweise implizite Integration des viskoplastischen Anfangswertproblems (6.6) liefert den Gleichungssatz

$$\begin{aligned}
 & \text{ wie (5.32)}_{1-3} , \\
 \text{Belastungsbedingung: } & \Delta\gamma_{n+1} = \frac{\tau_0}{\eta} [\partial_{f^+} \beta]_{n+1} \Delta t_{n+1} .
 \end{aligned} \tag{6.8}$$

Hierin ist $\Delta\gamma_{n+1}$ die diskrete Form der Belastungsbedingung.

6.2.2 Elastischer Prädiktor und viskoplastischer Korrektor

Aus Gründen der Klarheit erfolgt in diesem Kapitel im weiteren die Beschränkung auf isotrope Verfestigung (d.h. $\mathbf{q} = \boldsymbol{\xi} = 0$). Außerdem wird zur besseren Übersichtlichkeit auf die Indizierung mit $n + 1$ verzichtet. Der elastische Prädiktor ist identisch mit dem in Abschnitt 5.3.2 beschriebenen Verfahren. Der viskoplastische Korrektor ist prinzipiell ebenfalls identisch mit dem in Abschnitt 5.3.2 beschriebenen Verfahren, nur die lokale Newton Iteration muß modifiziert werden.

Modifikation der lokalen Newton Iteration: Die Residuen \underline{R}_{e^e} , R_ξ aus (5.43)_{1,2} können wegen (6.8)₁ beibehalten werden. Anstelle des Residuums R_f , welches aus den Nebenbedingungen (5.32)₄ resultiert, muß jetzt das Residuum

$$R_\beta = R_\beta(\underline{\varepsilon}^e, \xi, \Delta\gamma) = -\frac{\eta}{\Delta t} \Delta\gamma + \tau_0 \partial_{f^+} \beta = 0 \quad (6.9)$$

betrachtet werden, welches aus der Belastungsbedingung (6.8)₂ folgt. Es sei angemerkt, daß die direkte Auswertung der Belastungsbedingung

$$-\Delta\gamma + \Delta t \frac{\tau_0}{\eta} \partial_{f^+} \beta = 0$$

als Residuum ungeeignet ist, da für den Grenzübergang $\eta \rightarrow 0$ der zweite Term singularär wird. Die Linearisierung $\text{Lin}[R_\beta]_{(\cdot)_k, \Delta(\cdot)_{k+1}} = 0$ anstelle von (5.42)₃ führt bei sonst unveränderten Inkrementen (5.45)_{2,3} auf das Inkrement

$$\Delta\Delta\gamma_{k+1} = \left[\frac{H_\beta R_\beta + (\partial_{\underline{\varepsilon}} f)^T \underline{H}_{e^e} \underline{R}_{e^e} + (\partial_q f) H_\xi R_\xi}{H_\beta \frac{\eta}{\Delta t} + (\partial_{\underline{\varepsilon}} f)^T \underline{H}_{e^e} (\partial_{\underline{\varepsilon}} f) + (\partial_q f) H_\xi (\partial_q f)} \right]_k \quad (6.10)$$

und bei sonst unveränderten Moduli auf den zusätzlichen Modul

$$H_\beta = (\partial_{f^+ f^+}^2 \beta)^{-1} . \quad (6.11)$$

Die Iterationsschleife (5.43)–(5.47) aus Abschnitt 5.3.2 kann mit Ausnahme von zwei Modifikationen übernommen werden: (i) R_f in (5.43)₃, (5.47) wird durch R_β aus (6.9) ersetzt und (ii) $\Delta\Delta\gamma_{k+1}$ aus (5.45)₁ wird durch (6.10) ersetzt.

Diskussion eines Spezialfalls: Betrachtet werden soll die spezielle Wahl

$$\beta(f^+) = \frac{1}{2} [f^+]^2 \quad (6.12)$$

einer quadratischen Penalty Funktion. Aus (6.9) und (6.11) folgt damit

$$R_\beta = -\frac{\eta}{\Delta t} \Delta\gamma + f \quad \text{und} \quad H_\beta = 1 .$$

Für den Grenzfall $\eta \rightarrow 0$ erhält man bei endlicher Zeitschrittweite den exakten plastischen Korrektor, wie er in Abschnitt 5.3.2 beschrieben ist, da $R_\beta = H_\beta R_\beta \rightarrow R_f$, $\eta H_\beta / \Delta t \rightarrow 0$ gilt und $\Delta\Delta\gamma_{k+1}$ aus (6.10) in (5.45)₁ übergeht. Das heißt, für den Grenzfall eines unendlichen Penalty Parameters wird mit dem Penalty Verfahren erwartungsgemäß der exakte plastische Korrektor erzielt, wie er auch aus den Kuhn-Tucker Bedingungen folgt.

6.3 Elastoviskoplastische Stofftensoren

Die Vorgehensweise in diesem Abschnitt erfolgt völlig analog zum Abschnitt 5.4 über elastoplastische Stofftensoren. Bei der Herleitung der Beziehungen (5.52) und (5.53) wurden lediglich geometrische Operationen verwendet, d.h. das Stoffgesetz ist hierbei noch ohne Bedeutung. Das Stoffgesetz geht jedoch bei der Berechnung von $\Delta\tilde{S}_i$ in (5.54) mittels der konsistenten algorithmischen Linearisierung $\Delta\mathcal{T} = (\partial_{\underline{\epsilon}^e, trial}\mathcal{T})\Delta\underline{\epsilon}^{e, trial}$ des elastoplastischen Integrationsalgorithmus ein. Für Viskoplastizität ist nun anstelle der diskreten Konsistenzbedingung (5.33) die Belastungsbedingung (6.8)₂ auszuwerten. Für den algorithmischen elastoviskoplastischen Modul ergibt sich dann

$$\partial_{\underline{\epsilon}^e, trial}\mathcal{T} = \underline{H}_{\epsilon^e} - \frac{[\underline{H}_{\epsilon^e}(\partial_{\mathcal{T}}f)][\underline{H}_{\epsilon^e}(\partial_{\mathcal{T}}f)]^T}{H_{\beta}\frac{\eta}{\Delta t} + (\partial_{\mathcal{T}}f)^T[\underline{H}_{\epsilon^e}(\partial_{\mathcal{T}}f)] + (\partial_q f)H_{\xi}(\partial_q f)} . \quad (6.13)$$

Der rein elastische Fall (5.55) bleibt unverändert. Die einzige Modifikation der Stofftensoren \mathcal{C} , \mathfrak{c} besteht folglich in der Verwendung von (6.13) statt (5.54)₃ in den Komponenten (5.58).

Diskussion eines Spezialfalls: Als Sonderfall soll wieder die quadratische Penalty Funktion (6.12) gewählt werden. Für den Grenzfall $\eta \rightarrow 0$ bei endlicher Zeitschrittweite gilt $\eta H_{\beta}/\Delta t \rightarrow 0$ und der mit dem Penalty Verfahren erhaltene Modul (6.13) geht erwartungsgemäß in den mit den Kuhn-Tucker Bedingungen erzielten exakten Modul (5.54)₃ über.

6.4 Deviatorisch-volumetrische Zerlegung

Bei den Herleitungen in den Abschnitten 6.1, 6.2 und 6.3 wurde implizit der elastoplastische Grenzfall mit verschwindender Viskosität $\eta \rightarrow 0$ vorausgesetzt. Die deviatorisch-volumetrische Zerlegung aus Abschnitt 5.5 kann deshalb ohne Änderung übernommen werden. Die Berechnungsvorschriften für die Aufspaltung der Spannungstensoren (5.63), (4.56) und für die Aufspaltung der Stofftensoren (5.64), (4.68) werden ebenfalls nicht beeinflusst. Auf die deviatorisch-volumetrische Zerlegung für den allgemeinen Fall $\eta > 0$ wird in Abschnitt 6.6.2 eingegangen. Es sei bereits an dieser Stelle erwähnt, daß dann bei der Berechnung der deviatorischen Spannungsableitung (5.66) die Gesamtableitung (6.13) des viskoplastischen Falls eingesetzt werden muß.

6.5 Algorithmus für elastoviskoplastische Werkstoffe

Wie in den Abschnitten 6.2.2 und 6.3 bereits beschrieben, werden beim Vorliegen von Viskoplastizität im Vergleich mit dem plastischen Fall aus Kapitel 5 lediglich die lokale Newton Iteration und der algorithmische Modul des Korrektors modifiziert. Diese

Modifikationen wirken sich im Werkstoffalgorithmus ebenfalls nur im Korrektorschritt aus. Der Algorithmus für elastoviskoplastische Werkstoffe ist in Tafel 6.1 verkürzt zusammengefaßt. Der Sonderfall der additiven deviatorisch-volumetrischen Zerlegung kann analog zur Darstellung in Abschnitt 5.6 berücksichtigt werden.

1. Siehe 1. in Tafel 5.1.
2. Elastischer Prädiktor: Siehe 2. a–d) in Tafel 5.1.
 Viskoplastischer Korrektor:
 - e) Iteriere ϵ_i^e , ξ , $\Delta\gamma$ aus (5.43)–(5.47) mit (6.9) statt (5.43)₃ und (6.10) statt (5.45)₁.
 - f) Berechne τ_i (5.37)₂, $\partial_{\epsilon^{e,trial}} \mathcal{I}$ (6.13), c_{ijjj} , c_{ijij} (5.58).
3. Siehe 3. in Tafel 5.1.
4. Siehe 4. in Tafel 5.1.

Tafel 6.1: Algorithmus für elastoviskoplastische Werkstoffe bei einer wahlweise räumlichen oder materiellen Formulierung.

6.6 Diskussion der Viskosität

Da die in Kapitel 6 vorgestellte Formulierung der Viskoplastizität die Formulierung der Plastizität nach Kapitel 5 beinhaltet, kann Viskoplastizität in dieser Form als Verallgemeinerung von Plastizität aufgefaßt werden. Die Viskosität η als zusätzlicher Werkstoffparameter spielt bei dieser Verallgemeinerung eine wesentliche Rolle und soll daher ausführlicher behandelt werden. Zunächst wird der bis jetzt vorausgesetzte plastische Grenzübergang $\eta \rightarrow 0$ diskutiert. Anschließend wird der allgemeine viskoplastische Fall mit nicht verschwindender Viskosität $\eta > 0$ betrachtet.

6.6.1 Grenzfall ohne Viskosität ($\eta = 0$)

In den Abschnitten 6.2.2 und 6.3 wurde für den Spezialfall (6.12) und den Grenzübergang $\eta \rightarrow 0$ gezeigt, daß die Minimierungsprobleme (5.24) und (6.1), (6.2) beide identisch die exakte Lösung liefern. Im folgenden soll zunächst der Grenzübergang $\eta \rightarrow 0$ behandelt werden, ohne daß die Penalty Funktion $\beta(f^+)$ festgelegt wird. Es wird jedoch vorausgesetzt, daß die Penalty Funktion den im Anhang A.2.2 aufgeführten Bedingungen genügt.

In den Gleichungen (6.9), (6.10), (6.13) tritt die Zeitschrittweite Δt immer nur im Term $\eta/\Delta t$ auf. Bei $\eta = 0$ ist auch mit einer endlichen Zeitschrittweite das vorab beschriebene Vorgehen wegen $\eta/\Delta t = 0$ nicht explizit von der Zeitschrittweite abhängig, d.h. es existiert keine explizite Abhängigkeit von der realen Zeit t . Durch die Vorgabe der momentanen Konfiguration $\varphi_{n+1} = \varphi_{t=t_{n+1}}$ besteht jedoch — wie bei der zeitunabhängigen Formulierung der Elastoplastizität in Abschnitt 5.3.1 auch — eine implizite „Zeit“-Abhängigkeit mit t in der Rolle eines Kurvenparameters. Das Residuum (6.9) kann nur verschwinden, wenn $\partial_{f^+}\beta = 0$ gilt. Wegen der für die Penalty Funktion geforderten Bedingungen (siehe auch (6.2)) muß dann aber im viskoplastischen Korrektor auch $f^+ = f/\tau_0 = 0$ sein, was wieder die Bedingung $f = 0$ nach sich zieht. Aus $R_\beta = 0$ (siehe (6.9)) folgt somit $R_f = f = 0$ (siehe (5.43)₃), d.h. für den Grenzfall $\eta = 0$ sind die in den Kapiteln 5 und 6 bislang beschriebenen Verfahren identisch. Die Wahl der Penalty Funktion $\beta(f^+)$ ist in diesem Fall also ohne Einfluß, solange die im Anhang A.2.2 aufgeführten Bedingungen erfüllt sind.

Der Sonderfall $\eta = 0$ kann mit Hilfe der rheologischen Modelle veranschaulicht werden. Das rheologische Modell der idealen eindimensionalen Viskoplastizität (Bingham-Modell), bestehend aus einer Parallelschaltung von Reibglied (ϵ^{vp} , $|\sigma_R| \leq \sigma_0$ mit der Haftgrenze σ_0) und linearem viskosem Dämpfer ($\sigma_D = \eta \dot{\epsilon}^{vp}$ mit der Viskosität η), geht für $\eta = 0$ in das rheologische Modell der idealen eindimensionalen Plastizität über, da der Dämpfer dann wegen $\sigma_D = 0$ keinen Spannungsanteil liefert und lediglich die mechanische Wirkung des Reibgliedes verbleibt.

Es sei angemerkt, daß es wegen der speziellen Wahl des Residuums (6.9) mit der Viskosität η im Zähler möglich ist, $\eta = 0$ bzw. $\eta \rightarrow 0$ zu setzen, ohne bei der Durchführung des lokalen sowie globalen Newton Verfahrens singuläre bzw. schlecht konditionierte Matrizen zu erhalten (siehe auch SIMO [1992]). Die spezielle Wahl des Residuums hat außerdem zur Folge, daß im Term $\eta/\Delta t$ sowohl die Viskosität η als auch die Zeitschrittweite Δt immer gemeinsam auftreten. Es ist deshalb offensichtlich, daß die Grenzübergänge $\eta \rightarrow 0$ und $\Delta t \rightarrow \infty$ algorithmisch zum selben Grenzfall der zeitunabhängigen Elastoplastizität führen (siehe auch LUBLINER [1990], MORAN, ORTIZ & SHIH [1990]). Eine unendliche Zeitschrittweite $\Delta t \rightarrow \infty$ ist dabei gleichbedeutend mit einem unendlich langsam ablaufenden, d.h. statischen Prozeß.

6.6.2 Allgemeiner Fall mit Viskosität ($\eta > 0$)

Wie in Abschnitt 6.6.1 dargestellt, ergibt sich für $\eta = 0$ der Grenzfall der zeitunabhängigen Elastoplastizität. Für $\eta > 0$ impliziert $R_\beta = 0$ aber nicht $R_f = 0$. Deshalb liefern die lokalen Newton Iterationen aus den Abschnitten 5.3.2 und 6.2.2 auch nicht die identischen Korrektoren. Die Kuhn-Tucker Bedingungen und das Penalty Verfahren liefern also erwartungsgemäß unterschiedliche Lösungen für ϵ_i^e , ξ und $\Delta\gamma$. Außerdem geht für $\eta > 0$ wegen des Terms $\eta/\Delta t$ die Zeitschrittweite Δt explizit in die Berechnung von (6.9), (6.10) und (6.13) ein, d.h. es existiert nun auch eine explizite Abhängigkeit von der realen Zeit t . In das Residuum (6.9) geht die Penalty

Funktion $\beta(f^+)$ ein. Die Wahl der Penalty Funktion ist im Gegensatz zum Sonderfall $\eta = 0$ maßgebend für das viskoplastische Werkstoffverhalten und muß analog der Fließbedingung zur Spezifizierung des Stoffverhaltens vorgegeben werden.

Da das Penalty Verfahren für $\eta > 0$ nur eine Näherungslösung für das Optimierungsproblem mit Nebenbedingungen liefert, wird das Prinzip der maximalen plastischen Dissipation nicht mehr exakt erfüllt. Für große Penalty Faktoren, d.h. kleine Viskositäten η , wird die Maximumstelle jedoch näherungsweise gut getroffen, und man kann davon ausgehen, daß die thermodynamische Restriktion $\mathcal{D} \geq 0$ aus (5.17) für „nicht zu große η -Werte“ dennoch eingehalten wird.

Ausgangspunkt in Kapitel 6 war das Prinzip der maximalen plastischen Dissipation mit $\eta \rightarrow 0$. Im folgenden soll nun rückblickend der Fall echter Viskosität mit $\eta > 0$ in bezug auf Kinematik, Energiedichtefunktion, Spannungsberechnung, Dissipationsleistung und Fließbedingung diskutiert werden. Der Sonderfall der additiven deviatorisch-volumetrischen Zerlegung, wie er in Abschnitt 6.4 beschrieben ist, setzte implizit den plastischen Grenzfall $\eta \rightarrow 0$ voraus. Dieser Sonderfall wird ebenfalls rückblickend für $\eta > 0$ behandelt.

Kinematik: Die Kuhn-Tucker Bedingungen und das Penalty Verfahren liefern (bei gegebenem Deformationsgradienten \mathbf{F}) unterschiedliche Korrektoren und haben unterschiedliche logarithmische elastische Hauptstreckungen (5.41) zur Folge. Wegen (5.35)₂, (5.39)₁, (5.2)₄ und (5.1) ergeben sich somit verschiedene Anteile \mathbf{F}^e und \mathbf{F}^{vp} . Zur Unterscheidung vom elastoplastischen Fall wird der multiplikative Split des Deformationsgradienten bei Elastoviskoplastizität deshalb geschrieben als

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \cdot \mathbf{F}^{vp} \quad (6.14)$$

mit \mathbf{F}^e als elastischem Anteil (vom Wert nicht identisch mit \mathbf{F}^e in (5.1)) und mit \mathbf{F}^{vp} als viskoplastischem Anteil. Aufgrund der gleichen kinematischen Annahme (5.1) bzw. (6.14) können die weiteren Ausführungen des Abschnitts 5.1 direkt übernommen werden. Es ist lediglich der Index p durch den Index vp zu ersetzen.

Energiedichtefunktion: Die Energiedichtefunktion wurde unverändert aus Abschnitt 5.2.1 übernommen. Da sowohl im elastoplastischen als auch im elastoviskoplastischen Fall das elastische Werkstoffverhalten zeitunabhängig ist, kann der elastische Anteil in der Energiedichtefunktion ohne Einschränkung übernommen werden. Die Verwendung derselben inneren plastischen Variablen und desselben plastischen Anteils sowohl für den zeitunabhängigen plastischen Fall als auch für den zeitabhängigen viskoplastischen Fall kann auf der Basis der Voraussetzung begründet werden, daß in beiden Fällen bleibende Veränderungen im Werkstoff durch dieselben zeitunabhängigen Mechanismen hervorgerufen werden. Viskose Effekte werden also in der Energiedichtefunktion nicht berücksichtigt.

Spannungsberechnung und Dissipationsleistung: Da sowohl die spezifische Dissipationsleistung (3.18) als auch die Energiedichtefunktion (5.10) für den elastoviskoplastischen Fall identisch wie für den elastoplastischen Fall sind, können die Berechnungsvorschriften (5.15) für die Spannungen, die Verfestigungsfunktionen (5.16) sowie der Ausdruck (5.17) für die Dissipationsleistung identisch übernommen werden.

Fließbedingung: Die Fließbedingung (5.19) definiert im Spannungsraum den Bereich (5.18) der elastischen Deformationen. Für $\eta > 0$ wird die Nebenbedingung $f \leq 0$ nicht mehr exakt erfüllt. Deswegen ist der Fall $f > 0$ möglich, d.h. im Spannungsraum sind auch Spannungszustände zulässig, die außerhalb der Fließfläche $f = 0$ liegen. Für $f \leq 0$ ist die Deformation wie bisher elastisch, aber für $f > 0$ elastoviskoplastisch. Die Überspannung (overstress), die eine Überschreitung der Fließbedingung bewirkt, besitzt die Bedeutung eines viskosen Spannungsanteils. Dieser viskose Spannungsanteil würde bei festgehaltener Gesamtdeformation in endlicher Zeit relaxieren.

Zur anschaulichen Interpretation kann das eindimensionale rheologische Modell der idealen Viskoplastizität dienen (siehe Abschnitt 6.6.1). Spannungszustände mit $|\sigma_R| < \sigma_0$ sind rein elastisch, da das Reibglied haftet ($\dot{\epsilon}^{vp} = 0$) und im dazu parallel geschalteten Dämpfer keine Relativbewegung auftritt. Spannungszustände mit $|\sigma_R| > \sigma_0$ sind zulässig. Dabei gleitet das Reibglied mit $\dot{\epsilon}^{vp}$, $|\sigma_R| = \sigma_0$ und die viskose Überspannung $\sigma_D = \eta \dot{\epsilon}^{vp}$ resultiert aus einer Relativbewegung im Dämpfer.

Deviatorisch-volumetrische Zerlegung: Der viskoplastische Fall mit $\eta > 0$ unterscheidet sich vom plastischen Fall lediglich im Korrektor, d.h. der viskoplastische Korrektor liefert andere Werte für die Größen ϵ_i^e , ξ und $\Delta\gamma$ als der plastische Korrektor. Für die additive Aufspaltung der Spannungskomponenten (5.63) bedeutet dies, daß die Berechnungsvorschrift identisch übernommen werden kann. Der Unterschied zum plastischen Fall liegt in den Werten, die für ϵ_i^e eingesetzt werden. Die Eigenschaft $J^e = J^{e,trial}$ bleibt erhalten, d.h. die volumetrischen Anteile werden im viskoplastischen Korrektor nicht verändert. Die Berechnungsvorschrift für die additive Zerlegung der Moduli (5.64) kann ebenfalls identisch übernommen werden. Der wesentliche Unterschied zum plastischen Fall liegt darin, daß in die Berechnungsvorschrift der deviatorischen Spannungsableitung (5.66) die Gesamtableitung (6.13) statt der Gesamtableitung (5.54)₃ eingeht.

6.7 Abschließende Bemerkungen

Die ursprünglichen Arbeiten von PERZYNA [1963], PERZYNA [1966] behandeln die geometrisch lineare Theorie. Überträgt man die ursprüngliche Formulierung der Evolutionsgleichung für die plastischen Verzerrungen auf die Theorie großer Deformationen, wie sie in diesem Kapitel beschrieben wurde, so erhält man die Evolutionsgleichung (6.3)₁ mit dem ursprünglichen Multiplikator $\dot{\gamma} = \gamma^0 \Phi(F)/\kappa$. Hierbei sind die Originalbezeichnungen auf der rechten Gleichungsseite beibehalten. Für den Fall einer konstanten Fließspannung gelten die Identitäten $\kappa = \tau_0$ und $F = f/\tau_0$ mit der hier verwendeten Bezeichnungsweise. Durch Vergleich des ursprünglichen Multiplikators mit (6.3)₄ ergibt sich die Relation $\gamma^0 = \tau_0^2/\eta$ zwischen den „Viskositäten“ γ^0 und η . Die ursprüngliche Funktion Φ und die Penalty Funktion β besitzen dabei den Zusammenhang $\partial_{f^+} \beta(f^+) = \Phi(F)$. Ist die Fließbedingung erfüllt, dann gilt $\partial_{f^+} \beta(f^+)|_{f^+=0} = \Phi(F)|_{F \leq 0} = 0$. Ist die Fließbedingung verletzt, dann gilt $\partial_{f^+} \beta(f^+) = \Phi(F = f^+)$. Beide Formulierungen sind also für den Fall einer konstanten Fließspannung identisch und (6.1), (6.2) entspricht der geometrisch nichtlinearen

Erweiterung der ursprünglichen Theorie von Perzyna. In PERZYNA [1966], Abschnitt II.10 sind Beispiele für die Funktion $\Phi(F)$ (und somit für $\partial_{f^+}\beta$) gegeben und anhand experimenteller Daten für Metalle überprüft. Für alle dort gegebenen Funktionen gilt $\Phi(F = 0) = 0$ und die Funktion F der ursprünglichen Formulierung darf auch bei Erfüllung der Fließbedingung durch $F = f^+$ ersetzt werden. Der Fall einer nicht konstanten Fließspannung kann mit der hier beschriebenen Formulierung ebenfalls behandelt werden.

Formulierungen, die auf anderen Penalty Termen als in (6.1), (6.2) basieren, können analog zu der in diesem Kapitel beschriebenen Vorgehensweise hergeleitet werden. Beispiele hierfür sind Penalty Funktionen, die zur Normierung der Fließbedingung in (6.2) die momentane Fließspannung $f_2(q)$ aus (5.34) statt der Anfangsfließspannung τ_0 verwenden (siehe PERZYNA [1966]), oder Penalty Funktionen, die auf Argumenten des Typs $(f_1/f_2)^\omega - 1$ basieren.

Der Sonderfall des Kriechens mit verschwindender Fließspannung $f_2(q) = \tau_0 = 0$ kann mit der hier beschriebenen Formulierung ebenfalls behandelt werden. Hierzu muß jedoch in (6.1), (6.2) und den daraus abgeleiteten Gleichungen anstelle der Spannung τ_0 eine konstante positive Normierungsspannung $\tau_0^* > 0$ gesetzt werden.

Kapitel 7

Finite Elemente Formulierungen

Die hier beschriebenen Elementformulierungen haben neben der Funktionsfähigkeit für physikalisch nichtlineare Probleme bei großen Deformationen in erster Linie zum Ziel, den volumetrischen Versteifungseffekt zu vermindern, der bei fast inkompressiblem Stoffverhalten in Kombination mit Elementen niedriger Ansatzordnung auftritt. Es erfolgt eine Untergliederung in zwei Teile. Im ersten Teil werden Volumenelemente behandelt. Der zweite Teil dient der Behandlung von Schalenelementen. Grundlegende Lehrbücher zur Thematik der Finiten Elemente sind beispielsweise BATHE [1986], HUGHES [1987], ZIENKIEWICZ & TAYLOR [1989,1991] oder CRISFIELD [1991,1997].

7.1 Volumenelemente

Am Beispiel des Standardverschiebungselementes wird zunächst die Methode der Finiten Elemente (FEM, Finite Element Method) für nichtlineare Problemstellungen erläutert. Anhand des einfachen Q1 Elementes wird das Standardvorgehen beschrieben und die Ursache für die volumetrische Versteifung diskutiert. Bei der Entwicklung von Elementen mit verminderter volumetrischer Versteifung nehmen das selektiv reduziert integrierte Q1/d8v1 Element und das gemischt integrierte Q1/d8v1- ϑ Element die zentrale Stellung ein. Diese Elemente basieren auf den deviatorisch-volumetrischen Zerlegungen des Spannungstensors und des Stofftensors, wie sie in den Kapiteln 4, 5 und 6 hergeleitet wurden. Zum Vergleich mit diesen Elementen werden als alternative Konzepte die sogenannten $\bar{\mathbf{F}}$ Elemente mit modifizierten Deformationsgradienten sowie das Q1/P0 Element mit unabhängiger Dilatation und unabhängigem Druck behandelt. Abschließend erfolgt die Diskussion dieser Elemente vor allem im Hinblick auf isochor-volumetrisch entkoppeltes Stoffverhalten. In diesem Abschnitt erfolgt die Beschränkung auf achtknotige Volumenelemente mit trilinearer Verschiebungsinterpolation.

In den oben angeführten Lehrbüchern liegt bei der Beschreibung der Finiten Elemente der Schwerpunkt auf der totalen Lagrangeschen Formulierung (total Lagrange) bezüglich der Referenzkonfiguration bzw. der umgeformten Lagrangeschen Formu-

lierung (updated Lagrange) bezogen auf die letzte Gleichgewichtskonfiguration. Die räumliche Formulierung (Eulerian, spatial formulation) bezüglich der Momentankonfiguration spielt mit Ausnahme von CRISFIELD [1997] in den Lehrbüchern bislang nur eine untergeordnete Rolle.

Der erste Unterabschnitt 7.1.1 ist bewußt sehr ausführlich gehalten. Ein Grund dafür ist die konsequente räumliche Darstellung, die in den meisten Lehrbüchern bislang nicht etabliert ist. Außerdem müssen im Hinblick auf die nachfolgenden Unterabschnitte 7.1.2–7.2.3 die wesentlichen Terme bereitgestellt werden. Um dabei eine zusammenhängende und verständliche Darstellung zu gewährleisten, sind die grundlegenden Beziehungen in Unterabschnitt 7.1.1 eingeführt und nicht in den Anhang ausgelagert.

7.1.1 FEM am Beispiel des Verschiebungselementes

In diesem Abschnitt werden für das Verschiebungselement die **schwache Form des Gleichgewichtes** und die **Linearisierung der schwachen Form** als Grundgleichungen hergeleitet. Auf der Basis dieser Grundgleichungen erfolgt die Beschreibung der Methode der Finiten Elemente mittels Einführung einer **Diskretisierung** und einer **Isoparametrischen Interpolation**. Aus den **Gleichungen auf Elementebene** werden die **globalen Gleichungen** assembliert und in einer **globalen Gleichgewichtsiteration** gelöst. Die Beschreibung der FEM erfolgt hier exemplarisch. Als übergeordnetes Konzept ist die FEM auf alle verschiedenen Elementformulierungen anwendbar und nicht auf reine Verschiebungselemente beschränkt. Die Ausführungen in diesem Abschnitt beschränken sich jedoch auf dreidimensionale Volumenelemente mit Verschiebungsfreiheitsgraden in der räumlichen Formulierung.

i. Schwache Form des Gleichgewichtes: Die räumliche Form der 1. Cauchyschen Bewegungsgleichung (3.4)₁ ist eine vektorwertige Differentialgleichung und gilt als starke Form des Gleichgewichtes. Durch Bilden des inneren Produktes mit der vektorwertigen Testfunktion $\boldsymbol{\eta}$ und anschließender Integration über das Lösungsgebiet erhält man die schwache Form des Gleichgewichtes:

$$g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\eta}) = \int_{B_t} [\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \rho(\boldsymbol{b}_0 - \ddot{\boldsymbol{x}})] \cdot \boldsymbol{\eta} \, dv = 0 \quad . \quad (7.1)$$

Die Testfunktion $\boldsymbol{\eta}$ ist fest und stetig vorgegeben, aber ansonsten beliebig. Wegen des Fundamentallemmas der Variationsrechnung sind die beiden Formen des Gleichgewichtes (3.4)₁ und (7.1) einander äquivalent, d.h. die schwache Form (7.1) ist exakt und beinhaltet keine Näherungen. Sobald man eine spezielle Testfunktion aus der Menge aller zugelassenen Testfunktionen auswählt, ist die Lösung von (7.1) im allgemeinen nur eine Näherungslösung der ursprünglichen Differentialgleichung (3.4)₁. Die Methode der Finiten Elemente basiert auf der schwachen Form des Gleichgewichtes. Die Spannungen werden aus alleiniger Kenntnis der Bewegung $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}_t$ berechnet (siehe Abschnitt 5.3.1 und folgende). Setzt man Massenerhaltung und massenspezifische Kräfte $\boldsymbol{b}_0 = \boldsymbol{b}_0(\boldsymbol{x})$ voraus, so ist die starke Form (3.4)₁ ausschließlich eine Funktion der Bewegung. Die schwache Form $g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\eta})$ ist dann von der Bewegung \boldsymbol{x} und der

Testfunktion $\boldsymbol{\eta}$ abhängig. Die Anwendung des Divergenztheorems, der Rechenregeln für Gradient und Divergenz, des Cauchy Theorems (2.37) und der räumlichen Form der 2. Cauchyschen Bewegungsgleichung (3.5)₁ auf (7.1) führt auf die Gleichgewichtsbedingung

$$g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\eta}) = \int_{\mathcal{B}_t} \boldsymbol{\sigma} : \partial_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{\eta} \, dv - \int_{\mathcal{B}_t} \rho(\boldsymbol{b}_0 - \ddot{\boldsymbol{x}}) \cdot \boldsymbol{\eta} \, dv - \int_{\partial \mathcal{B}_t} \boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{\eta} \, da = 0 \quad . \quad (7.2)$$

Es sei angemerkt, daß die Umformung von (7.1) nach (7.2) im eindimensionalen Fall der partiellen Integration entspricht.

ii. Linearisierung der schwachen Form: Da die Gleichgewichtsbedingung (7.2) im allgemeinen nichtlinear ist, muß im Rahmen eines iterativen Newton-Raphson Lösungsverfahrens deren Linearisierung

$$\begin{aligned} & \text{Lin}[g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\eta})]_{\bar{\boldsymbol{x}}, \Delta \boldsymbol{x}} = \\ & \left[g(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\eta}) + \int_{\mathcal{B}_t} (\boldsymbol{c}^* : \text{sym}[\partial_{\boldsymbol{x}} \Delta \boldsymbol{x}] + \partial_{\boldsymbol{x}} \Delta \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{\sigma}) : \partial_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{\eta} \, dv - \right. \\ & \left. \int_{\mathcal{B}_t} \rho(\Delta \boldsymbol{b}_0 - \Delta \ddot{\boldsymbol{x}}) \cdot \boldsymbol{\eta} \, dv - \int_{\partial \mathcal{B}_t} \Delta \boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{\eta} \, da - \int_{\partial \mathcal{B}_t} \boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{\eta} \, \Delta(da) \right]_{\boldsymbol{x}=\bar{\boldsymbol{x}}} = 0 \end{aligned} \quad (7.3)$$

um den Linearisierungspunkt $\bar{\boldsymbol{x}}$ in Richtung $\Delta \boldsymbol{x}$ durchgeführt werden. Die Linearisierung räumlicher Größen erfolgt in Analogie zur Oldroydschen Ableitung, d.h. räumliche Größen der Momentankonfiguration werden zunächst mittels einer Pull-Back Operation in die Referenzkonfiguration transformiert, dort linearisiert und anschließend mittels einer Push-Forward Operation in die Momentankonfiguration zurücktransformiert. Diese Vorgehensweise führt zu wesentlichen Vereinfachungen bei der Linearisierung, weil die unveränderlichen Größen der Referenzkonfiguration nicht linearisiert werden müssen (z.B. $\Delta(dV) = 0$ statt $\Delta(dv)$ oder $\Delta(\partial_{\boldsymbol{X}} \boldsymbol{\eta}) = \mathbf{0}$ statt $\Delta(\partial_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{\eta})$). Für Problemstellungen mit konstanter massenspezifischer Kraft $\Delta \boldsymbol{b}_0 = \mathbf{0}$ und konstanter Belastung $d\boldsymbol{f}_a = \textit{konstant}$ auf dem Rand (d.h. unveränderliche 1. Piola-Kirchhoff Spannungen auf dem Rand) vereinfacht sich (7.3) zu

$$\begin{aligned} & \left[\int_{\mathcal{B}_t} (\boldsymbol{c}^* : \text{sym}[\partial_{\boldsymbol{x}} \Delta \boldsymbol{x}] + \partial_{\boldsymbol{x}} \Delta \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{\sigma}) : \partial_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{\eta} \, dv \right]_{\boldsymbol{x}=\bar{\boldsymbol{x}}} + \left[\int_{\mathcal{B}_t} \rho \Delta \ddot{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dv \right]_{\boldsymbol{x}=\bar{\boldsymbol{x}}} = \\ & g_{ext}(\boldsymbol{\eta}) + \left[\int_{\mathcal{B}_t} \rho \boldsymbol{b}_0 \cdot \boldsymbol{\eta} \, dv - \int_{\mathcal{B}_t} \boldsymbol{\sigma} : \partial_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{\eta} \, dv - \int_{\mathcal{B}_t} \rho \ddot{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{\eta} \, dv \right]_{\boldsymbol{x}=\bar{\boldsymbol{x}}} \quad (7.4) \\ & \text{mit } g_{ext}(\boldsymbol{\eta}) = \int_{\partial \mathcal{B}_t} \boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{\eta} \, da \quad . \end{aligned}$$

Für quasistatische Problemstellungen entfallen zusätzlich die Terme mit $\ddot{\boldsymbol{x}} = \Delta \ddot{\boldsymbol{x}} = \mathbf{0}$. Der Term $g_{ext}(\boldsymbol{\eta})$ beinhaltet die externe Belastung auf dem Rand. Da die Belastung als konstant vorausgesetzt ist, besteht keine Abhängigkeit dieses Termes von der Momentankonfiguration \boldsymbol{x} . Die bislang aufgestellten Gleichungen zur räumlichen Formulierung sind ebenfalls in den Arbeiten von WRIGGERS [1988] oder REESE [1994] gegeben.

Da die materiellen Punkte \mathbf{X} fest vorgegeben sind, können wegen (2.2) die schwache Form des Gleichgewichtes (7.2) und deren Linearisierung (7.4) alternativ in Abhängigkeit der Verschiebungen \mathbf{u} anstatt in Abhängigkeit der Bewegung \mathbf{x} geschrieben werden. Beide Darstellungen sind äquivalent. Deshalb wird im folgenden implizit keine Unterscheidung getroffen. Insbesondere gelten $\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{u}}$, $\Delta\mathbf{x} = \Delta\mathbf{u}$ und $\Delta\bar{\mathbf{x}} = \Delta\bar{\mathbf{u}}$. Statt $\bar{\mathbf{x}}$ kann alternativ $\bar{\mathbf{u}}$ als Linearisierungspunkt angesehen werden.

Rückblickend sei darauf hingewiesen, daß in der Gleichgewichtsbedingung (7.2) und in der Linearisierung der Gleichgewichtsbedingung (7.4) der Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ auftritt. In der Linearisierung tritt zusätzlich der inkrementelle Stofftensor $\boldsymbol{\epsilon}^*$ auf, der durch die algorithmische Ableitung der Spannungen nach den Verzerrungen entsteht. Das Stoffgesetz geht ausschließlich in diese beiden Größen ein. In den Tafeln 4.3, 5.1 und 6.1 erfolgte deshalb vorrangig die Berechnung von $\boldsymbol{\sigma}$ und $\boldsymbol{\epsilon}^*$.

iii. Diskretisierung: Um die linearisierte Gleichung (7.4) einer numerischen Lösung zugänglich zu machen, erfolgt eine Diskretisierung des Lösungsgebietes. Dabei reduziert sich die Zahl unbekannter Verschiebungen, da anstatt der unendlich vielen materiellen Punkte \mathbf{X} des Lösungsgebietes nur endlich viele diskrete Punkte $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_K, \dots, \mathbf{X}_I$, die sogenannten Knoten, berücksichtigt werden. Die diskreten Knotenverschiebungen \mathbf{u}_K sind dann die Unbekannten des Problems. Die Gesamtanzahl der Knoten sei I . Die Festlegung der Knoten erfolgt in der Referenzkonfiguration. Die Teilgebiete $\mathcal{B}_{0_e}^h$ zwischen den Knoten werden Finite Elemente genannt. Der untere Index e kennzeichnet ein einzelnes Finites Element (zu unterscheiden vom oberen Index e für den elastischen Anteil). Für die insgesamt nel Finiten Elemente gilt

$$\mathcal{B}_0 \approx \mathcal{B}_0^h = \bigcup_{e=1}^{nel} \mathcal{B}_{0_e}^h \quad \text{und} \quad \mathcal{B}_{0_{e1}}^h \cap \mathcal{B}_{0_{e2}}^h = \emptyset \quad \text{für} \quad e1 \neq e2 \quad .$$

Die Diskretisierung hat im allgemeinen einen Approximationsfehler in der Geometriebeschreibung zur Folge. Zur Unterscheidung von den exakten Größen werden approximierten Größen mit h indiziert. Aus den diskreten Knotenverschiebungen \mathbf{u}_K folgen unmittelbar die Lage

$$\mathbf{x}_K = \mathbf{X}_K + \mathbf{u}_K$$

der Knoten in der Momentankonfiguration sowie die Teilgebiete \mathcal{B}_t^h . Bei den hier behandelten Finiten Elementen handelt es sich aus Gründen der Klarheit ausschließlich um dreidimensionale Volumenelemente mit je $I_e = 8$ Eckknoten.

iv. Isoparametrische Interpolation: Zur besseren Handhabung der Vektoren/Tensoren (Fettschrift) erfolgt der Übergang auf Matrizen (Unterstreichung), z.B.

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3 \longrightarrow \underline{x} = [x_1, x_2, x_3]^T \quad .$$

Die Orte \underline{x}_e^h der materiellen Punkte im Inneren eines Finiten Elementes werden mit Hilfe der Ansatzfunktionen $N_k(\underline{\xi})$ aus den diskreten Knotenkoordinaten \underline{x}_K interpo-

liert (siehe beispielsweise HUGHES [1987], 3.3):

$$\begin{aligned} \underline{x}_e^h(\underline{\xi}) &= \sum_{k=1}^{I_e} N_k(\underline{\xi}) \underline{x}_K = \sum_{k=1}^{I_e} N_k(\underline{\xi}) [\underline{X}_K + \underline{u}_K] \\ &= \sum_{k=1}^{I_e} N_k(\underline{\xi}) \underline{X}_K + \sum_{k=1}^{I_e} N_k(\underline{\xi}) \underline{u}_K = \underline{X}_e^h(\underline{\xi}) + \underline{u}_e^h(\underline{\xi}) \quad \text{mit } K = K_e(k) . \end{aligned} \quad (7.5)$$

Bei der Summation in (7.5) wird vorausgesetzt, daß die lokale Elementknotennummer k mittels der Elementtopologie K_e zur globalen Knotennummer K zugeordnet wird. Isoparametrie bedeutet, daß im Elementinnern sowohl die Referenzgeometrie \underline{X}_e^h als auch die Verschiebungen \underline{u}_e^h durch dieselben Ansatzfunktionen interpoliert werden. Die Ansatzfunktionen $N_k(\underline{\xi})$ sind im Einheitsgebiet \mathcal{B}_\square durch die orthogonalen Einheitskoordinaten

$$\underline{\xi} = [\xi, \eta, \zeta]^T \quad \text{mit } \mathcal{B}_\square = \{(\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \leq \xi, \eta, \zeta \leq +1\}$$

parametrisiert und müssen eine stetige und eineindeutige Abbildung sicherstellen. Dann ist die Umkehrung von (7.5) möglich:

$$\underline{X}_e^h = \underline{X}_e^h(\underline{\xi}) \quad , \quad \underline{\xi} = \hat{\underline{\xi}}(\underline{X}_e^h) \quad \text{und} \quad \underline{x}_e^h = \underline{x}_e^h(\underline{\xi}) \quad , \quad \underline{\xi} = \tilde{\underline{\xi}}(\underline{x}_e^h) . \quad (7.6)$$

Es sei angemerkt, daß die Abbildungen (7.6)_{2,4} der Elementreferenzkonfiguration und der Elementmomentankonfiguration auf die Einheitskoordinaten unterschiedlich sind. Die Approximation der Bewegung und deren Umkehrung ergeben schließlich

$$\varphi_t(\mathbf{X}) \longrightarrow \underline{x}_e^h = \underline{x}_e^h(\underline{X}_e^h) \quad , \quad \varphi_t^{-1}(\mathbf{x}) \longrightarrow \underline{X}_e^h = \underline{X}_e^h(\underline{x}_e^h) . \quad (7.7)$$

Aufgrund der Kenntnis von (7.6) und (7.7) ist es je nach Parametrisierung möglich die Ableitungen nach $\underline{\xi}$, \underline{X}_e^h oder \underline{x}_e^h zu bilden. Beispielsweise können der Deformationsgradient (2.6) und die Determinante (2.11)₃ im Innern eines Finiten Elementes zu

$$\underline{F}_e^h = \partial_{\underline{x}_e^h} \underline{x}_e^h = [\partial_{\underline{\xi}} \underline{x}_e^h][\partial_{\underline{\xi}} \underline{X}_e^h]^{-1} \quad \text{und} \quad J_e^h = \det \underline{F}_e^h \quad (7.8)$$

berechnet werden.

Die Ansatzfunktionen müssen insbesondere die Bedingungen

$$N_k(\underline{\xi} = \underline{\xi}_j) = \delta_{kj} \quad \text{mit} \quad \underline{\xi}_j = [\pm 1, \pm 1, \pm 1]^T \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{I_e} N_k(\underline{\xi}) = 1 \quad (7.9)$$

erfüllen. Die Bedingung (7.9)₁ sichert, daß an den diskreten Knoten ausschließlich die diskreten Knotenwerte vorliegen. Hierin beinhaltet (7.9)₂ die Einheitskoordinaten des lokalen j -ten Eckknotens des Einheitsgebietes \mathcal{B}_\square . Die Bedingung (7.9)₃ ermöglicht die korrekte Beschreibung von Starrkörperbewegungen im Elementinnern. Abschließend seien die trilinearen Ansatzfunktionen

$$N_k(\underline{\xi}) = \frac{1}{2}[1 + \xi_k \xi] \frac{1}{2}[1 + \eta_k \eta] \frac{1}{2}[1 + \zeta_k \zeta] \quad (7.10)$$

gegeben (siehe beispielsweise HUGHES [1987], 3.5), die alle geforderten Bedingungen erfüllen.

Als Testfunktion

$$\boldsymbol{\eta} = \delta \mathbf{u} = \delta \mathbf{x} \quad (7.11)$$

wird das virtuelle Verschiebungsfeld $\delta \mathbf{u}$ verwendet. Die schwache Form des Gleichgewichtes ist dann identisch mit dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen. Damit sind automatisch die wesentlichen Randbedingungen erfüllt (Methode nach Galerkin-Bubnov). Im Randintegral der schwachen Formulierung des Gleichgewichtes muß nur der eventuell belastete freie Rand $\partial \mathcal{B}_{t\sigma}$ berücksichtigt werden, da auf dem Rand $\partial \mathcal{B}_{tu}$ Verschiebungsrandbedingungen vorgegeben sind und dort das virtuelle Verschiebungsfeld verschwindet:

$$\partial \mathcal{B}_t = \partial \mathcal{B}_{tu} \cup \partial \mathcal{B}_{t\sigma} \quad \text{und} \quad \partial \mathcal{B}_{tu} \cap \partial \mathcal{B}_{t\sigma} = \emptyset .$$

Die Interpolation der Testfunktion

$$\underline{\boldsymbol{\eta}}_e^h(\underline{\xi}) = \delta \underline{\mathbf{u}}_e^h(\underline{\xi}) = \sum_{k=1}^{I_e} N_k(\underline{\xi}) \delta \underline{\mathbf{u}}_K \quad \text{mit} \quad K = K_e(k)$$

erfolgt analog zu (7.5). Durch diese Festlegung auf eine spezielle Testfunktion aus der Menge aller zulässigen Testfunktionen (7.11) liefert die schwache Form des Gleichgewichtes nun eine Näherungslösung.

v. Gleichungen auf Elementebene: Wie aus der Interpolation (7.5) ersichtlich ist, gehen bei der Approximation des Verschiebungsfeldes im Elementinnern alle I_e diskreten Knotenverschiebungen ein. Deshalb wird die Spaltenmatrix der Elementknotenverschiebungen

$$\underline{\mathbf{d}}_e = [\underline{\mathbf{u}}_{K_e(1)}^T, \underline{\mathbf{u}}_{K_e(2)}^T, \dots, \underline{\mathbf{u}}_{K_e(I_e)}^T]^T \quad (7.12)$$

eingeführt. Nachfolgend werden die Einzeltermine aus den Gleichungen (7.2) und (7.4) unter Berücksichtigung der Diskretisierung und der isoparametrischen Interpolation in Matrixschreibweise dargestellt. Auf Details wird hierbei verzichtet und auf das Standardschrifttum verwiesen. Es ist zu beachten, daß die Gleichungen zunächst elementweise ausgewertet werden, d.h. die Integration erfolgt über die Elementgebiete \mathcal{B}_{te} und nicht über das Gesamtgebiet \mathcal{B}_t .

Als externe Belastung wirken auf die Ecken des Einzelementes fiktive Schnittkräfte, die durch Freischnitte zwischen den Knoten und dem Element freigelegt werden:

$$\left[g_{ext}(\delta \mathbf{u}) \right]^h = \left[\int_{\partial \mathcal{B}_{t\sigma e}} \mathbf{t} \cdot \delta \mathbf{u} \, da \right]^h = \delta \underline{\mathbf{d}}_e^T \underline{\mathbf{f}}_{e,schnitt} . \quad (7.13)$$

Die Schnittkräfte werden elementweise in einer Spaltenmatrix $\underline{\mathbf{f}}_{e,schnitt}$ zusammengefaßt. Die Auswertung von

$$\left[\int_{\mathcal{B}_{te}} \rho \mathbf{b}_0 \cdot \delta \mathbf{u} \, dv - \int_{\mathcal{B}_{te}} \boldsymbol{\sigma} : \partial_x \delta \mathbf{u} \, dv - \int_{\mathcal{B}_{te}} \rho \ddot{\mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{u} \, dv \right]_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}}^h = - \delta \underline{\mathbf{d}}_e^T \underline{\mathbf{f}}_{e,int} \quad (7.14)$$

führt auf die Spaltenmatrix der internen Elementkräfte $\underline{f}_{e,int}$, in der die massenspezifischen Kräfte, die Rückstellkräfte aufgrund der Deformation und die Trägheitskräfte zusammengefaßt sind. Aus

$$\left[\int_{B_{te}} (\mathbf{c}^* : \text{sym}[\partial_x \Delta \mathbf{u}] + \partial_x \Delta \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}) : \partial_x \delta \mathbf{u} \, dv \right]_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}}^h = \delta \underline{d}_e^T \underline{k}_e \Delta \underline{d}_e \quad (7.15)$$

resultiert die Elementsteifigkeit gegen eine Änderung des Verschiebungsfeldes. Hierin ist \underline{k}_e die symmetrische Elementsteifigkeitsmatrix. Der Term

$$\left[\int_{B_{te}} \rho \Delta \ddot{\mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{u} \, dv \right]_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}}^h = \delta \underline{d}_e^T \underline{m}_e \Delta \ddot{\underline{d}}_e \quad (7.16)$$

beinhaltet die Elementträgheit gegen eine Änderung des Beschleunigungsfeldes. Hierin ist \underline{m}_e die symmetrische Elementmassenmatrix. Auf die Durchführung der Integration in (7.14)–(7.16) wird in Abschnitt 7.1.2 ausführlich eingegangen. Die Knotenverschiebungen bzw. Knotenbeschleunigungen dürfen, da sie an diskreten Punkten vorliegen, aus den Integralen gezogen werden. Die Matrizen \underline{k}_e , \underline{m}_e und $\underline{f}_{e,int}$ sind am Linearisierungspunkt $\underline{d}_e = \bar{\underline{d}}_e$, $\ddot{\underline{d}}_e = \bar{\ddot{\underline{d}}}_e$ auszuwerten. Die Reihenfolge der Einträge erfolgt analog zu (7.12).

Die virtuellen Knotenverschiebungen $\delta \underline{d}_e$ sind zulässig aber ansonsten beliebig wählbar. Mit den Beziehungen (7.13)–(7.16) folgen aus der Gleichgewichtsbedingung (7.2) und der linearisierten Gleichgewichtsbedingung (7.4) unmittelbar deren diskrete Formen

$$\underline{f}_{e,schnitt} = \underline{f}_{e,int} \quad \text{und} \quad \underline{f}_{e,schnitt} = \underline{k}_e \Delta \underline{d}_e + \underline{m}_e \Delta \ddot{\underline{d}}_e + \underline{f}_{e,int} \quad (7.17)$$

auf Elementebene. Damit sind die virtuellen Knotenverschiebungen $\delta \underline{d}_e$ eliminiert.

vi. Globale Gleichungen: Um das Gleichungssystem für den gesamten Körper zu erhalten, müssen die elementweisen Gleichungen (7.17) assembliert werden. Hierzu erfolgt die Kräftebilanz

$$\underline{F}_{ext}^K + \sum_{e=1}^{nel} [-\underline{f}_{e,schnitt}^K] = \underline{0} \quad (7.18)$$

am freigeschnittenen globalen Knoten K (siehe beispielsweise ZIENKIEWICZ & TAYLOR [1989], 1.3). Dort müssen die externen Knotenkräfte \underline{F}_{ext}^K mit den negativen Schnittkräften $-\underline{f}_{e,schnitt}^K$ der angrenzenden Elemente im Gleichgewicht stehen. Das negative Vorzeichen ist bedingt durch das Axiom „Actio gleich Reactio“, d.h. die Schnittkraft am Knoten wirkt entgegengesetzt zur Schnittkraft am Element. Bei der Summation über alle Elemente wird implizit vorausgesetzt, daß Elemente, die nicht an den Knoten K angrenzen, keinen Beitrag liefern. Die Berücksichtigung von (7.17) in (7.18) ergibt

$$\underline{F}_{ext}^K - \sum_{e=1}^{nel} \underline{f}_{e,int}^K = \underline{0} \quad \text{und} \quad \sum_{e=1}^{nel} [\underline{k}_e \Delta \underline{d}_e]^K + \sum_{e=1}^{nel} [\underline{m}_e \Delta \ddot{\underline{d}}_e]^K = \underline{F}_{ext}^K - \sum_{e=1}^{nel} \underline{f}_{e,int}^K \quad (7.19)$$

Nach Einführung der globalen Spaltenmatrix der Knotenverschiebungen

$$\underline{d} = [\underline{u}_1^T, \underline{u}_2^T, \dots, \underline{u}_K^T, \dots, \underline{u}_I^T]^T \quad (7.20)$$

erhält man durch Anwendung der Vorschrift (7.19) auf alle Knoten $1, 2, \dots, K, \dots, I$ die globalen diskreten Gleichungen

$$\underline{F}_{ext} - \underline{F}_{int} = \underline{0} \quad \text{und} \quad \underline{K}_{ges} \Delta \underline{d} + \underline{M}_{ges} \Delta \dot{\underline{d}} = \underline{F}_{ext} - \underline{F}_{int} \quad (7.21)$$

sowie die Assemblierungsvorschriften für die Gesamtsteifigkeitsmatrix \underline{K}_{ges} , die Gesamtmassenmatrix \underline{M}_{ges} und die Spaltenmatrix \underline{F}_{int} der gesamten inneren Knotenkräfte. Die Reihenfolge der Einträge erfolgt analog zu (7.20). Die Assemblierung der Elementmatrizen (7.17) zu den Gesamtmatrizen (7.21) ist gleichbedeutend mit der Integration

$$\int_{\mathcal{B}_t^h} (\dots) dv = \bigcup_{e=1}^{nel} \int_{\mathcal{B}_{te}^h} (\dots) dv$$

der Gleichungen (7.2) und (7.4). Die Randbedingungen, d.h. festgehaltene Knotenverschiebungen, werden üblicherweise bereits bei der Assemblierung mittels der direkten Steifigkeitsmethode berücksichtigt.

vii. Globale Gleichgewichtsiteration: Ein Gleichgewichtszustand ist erreicht, wenn die nichtlineare Gleichgewichtsbedingung (7.2) bzw. deren diskrete Form (7.21)₁ erfüllt sind. Die linearisierte Gleichgewichtsbedingung (7.4) bzw. deren diskrete Form (7.21)₂ sind lediglich Hilfsmittel, um im Rahmen eines globalen iterativen Lösungsverfahrens einen Gleichgewichtszustand zu finden.

In Tafel 7.1 ist der Newton-Raphson Algorithmus zusammengefaßt. Hierbei wird angenommen, daß die externe Belastung $\underline{F}_{ext}(t)$ im betrachteten Zeitbereich $t \in [t_0, T] \subset \mathbb{R}_+$ gegeben ist (Laststeuerung). Die Vorgabe von Verschiebungen (Verschiebungssteuerung) kann im Algorithmus berücksichtigt werden, indem die gegebenen Verschiebungsinkremente und die daraus resultierenden Beschleunigungsinkremente mittels der Steifigkeits- und Massenmatrix in Lastinkremente umgerechnet werden und dann auf die rechte Seite der Gleichung (7.21)₂ gebracht werden. Die Berechnung des skalaren Residuums RES in Tafel 7.1, 3.(f) erfolgt analog zur schwachen Form des Gleichgewichtes (7.2). Hierbei übernimmt $\Delta \underline{d}_{n+1}^{i+1}$ die Rolle der diskreten virtuellen Knotenverschiebungen (Testfunktion), so daß RES die Einheit einer Energie besitzt. Es sei darauf hingewiesen, daß in den inneren Knotenkräften \underline{F}_{int} die Trägheitsanteile enthalten sind (vgl. (7.14)).

In Abschnitt 2.3 wurden die kontinuierlichen und die inkrementellen Stofftensoren definiert. Wie in den Arbeiten von SIMO & TAYLOR [1985] und SIMO & TAYLOR [1986] festgestellt wurde, sichert nur die Verwendung der inkrementellen Stofftensoren die quadratische Konvergenz des globalen Newton-Raphson Verfahrens in der Nähe der Lösung, d.h. bei der Berechnung der Elementsteifigkeitsmatrix (7.15) muß immer der inkrementelle Stofftensor \mathfrak{c}_{n+1}^* aus der Definition (2.50) verwendet werden.

1. Anfangszustand:
Zur Zeit $t = t_n$ mit $n = 0$ sei die Gleichgewichtsbedingung (7.21)₁ erfüllt.
Berechne \underline{M}_{ges} vorab.
2. Lastschleife (Index n):
Setze $t_{n+1} = t_n + \Delta t_{n+1}$ mit $\Delta t_{n+1} \in \mathbb{R}_+$.
Für $t_{n+1} \leq T$: berechne $\underline{F}_{ext,n+1} = \underline{F}_{ext}(t = t_{n+1})$.
Für $t_{n+1} > T$: gehe zu 4.
3. Gleichgewichtsiteration (Index i):
 - (a) Setze $i = 0$, $\underline{d}_{n+1}^i = \underline{d}_n$, $\underline{\ddot{d}}_{n+1}^i = \underline{\ddot{d}}_n$.
 - (b) Berechne $\underline{K}_{ges,n+1}^i$, $\underline{F}_{int,n+1}^i$ (hierbei eventuell Iteration im plastischen/viskoplastischen Fall erforderlich) und setze $\underline{M}_{ges,n+1}^i = \underline{M}_{ges}$.
 - (c) Löse (7.21)₂ nach $\Delta \underline{d}_{n+1}^{i+1}$, $\Delta \underline{\ddot{d}}_{n+1}^{i+1}$ (z.B. mittels Newmark-Verfahren).
 - (d) Berechne $\underline{d}_{n+1}^{i+1} = \underline{d}_{n+1}^i + \Delta \underline{d}_{n+1}^{i+1}$, $\underline{\ddot{d}}_{n+1}^{i+1} = \underline{\ddot{d}}_{n+1}^i + \Delta \underline{\ddot{d}}_{n+1}^{i+1}$.
 - (e) Berechne $\underline{F}_{int,n+1}^{i+1}$.
 - (f) Überprüfe Gleichgewichtsbedingung (7.21)₁, z.B. mittels

$$RES = [\Delta \underline{d}_{n+1}^{i+1}]^T [\underline{F}_{ext,n+1} - \underline{F}_{int,n+1}^{i+1}] .$$

Für $RES \leq TOL$: setze $\underline{d}_{n+1} = \underline{d}_{n+1}^{i+1}$, $\underline{\ddot{d}}_{n+1} = \underline{\ddot{d}}_{n+1}^{i+1}$, $n \rightarrow n + 1$ und gehe zu 2.
Für $RES > TOL$: setze $i \rightarrow i + 1$ und gehe zu 3.(b).
4. Ende.

Tafel 7.1: Globales Newton-Raphson Verfahren zur Lösung nichtlinearer Probleme der Strukturmechanik.

7.1.2 Standardverschiebungselement Q1

Die Grundgleichungen für Verschiebungselemente sind in Abschnitt 7.1.1.v aufgeführt. Die bisher nicht behandelte Durchführung der Integrationen in (7.14)–(7.16) ist Hauptthema dieses Abschnitts. Die zu integrierenden Funktionen, die von der Momentankonfiguration \underline{x}_e^h abhängen, werden stellvertretend mit $\underline{g}(\underline{x}_e^h)$ abgekürzt. Da in (7.14)–(7.16) die virtuellen Knotenverschiebungen und die Inkremente der Knotenverschiebungen aus dem Integral gezogen werden, ist \underline{g} im allgemeinen eine Matrixfunktion. Ziel ist es, diese Funktion über das Elementgebiet \mathcal{B}_{te}^h in der Momentankonfiguration zu integrieren. Zunächst erfolgt eine Substitution des Integrationsgebietes, d.h. unter Berücksichtigung der stetig differenzierbaren Abbildung (7.6)₃ und der Jacobischen Determinante erfolgt die Integration über das Einheitsgebiet \mathcal{B}_\square . Da die Funktion \underline{g} im allgemeinen nicht analytisch integrierbar ist, muß eine näherungsweise

numerische Integration erfolgen. Hierzu wird das Verfahren nach Gauß angewendet, bei dem das Integral durch eine Summe approximiert wird. Die einzelnen Summenglieder werden an den diskreten Punkten $\underline{\xi}_l^L$, den sogenannten Integrationspunkten, ausgewertet und mit einem Faktor w_l^L gewichtet. Die Vorgehensweise kann durch

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}_{te}^h} \underline{g}(\underline{x}_e^h) dv &= \int_{\mathcal{B}_\square} \underline{g}(\underline{x}_e^h(\underline{\xi})) \det[\partial_{\underline{\xi}} \underline{x}_e^h(\underline{\xi})] d\underline{\square} \\ &\approx \sum_{l=1}^L w_l^L \left[\underline{g}(\underline{x}_e^h(\underline{\xi}_l^L)) \det[\partial_{\underline{\xi}} \underline{x}_e^h(\underline{\xi}_l^L)] \right]_{\underline{\xi}=\underline{\xi}_l^L} \quad (7.22) \\ &\text{mit } \sum_{l=1}^L w_l^L = \int_{\mathcal{B}_\square} d\underline{\square} = 8 \end{aligned}$$

symbolisch beschrieben werden. Die Wahl der Integrationspunkte und der Wichtungsfaktoren ist wesentlich für den Integrationsfehler. Der hochgestellte Index L dient zur Unterscheidung verschiedener Integrationsordnungen. Die Beziehung (7.22)₂ folgt aus der Forderung, daß bei konstanten Integranden kein Integrationsfehler auftritt.

Bei dem Standardverschiebungselement, das im Fall der Verwendung linearer Ansatzfunktionen durch Q1 abgekürzt wird, erfolgt die Integration auf Elementebene mit Hilfe folgender Integrationspunkte und Wichtungsfaktoren:

$$\underline{\xi}_l^8 = \left[\pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \right]^T \quad \text{und} \quad w_l^8 = 1 \quad \text{mit} \quad l = 1, 2, \dots, 8 \quad \text{und} \quad L = 8 \quad . \quad (7.23)$$

Die verschiedenen Vorzeichenkombinationen führen auf insgesamt acht Integrationspunkte. Bei elastoplastischen oder elastoviskoplastischen Problemstellungen müssen als Anfangsbedingungen des elastischen Prädiktors (siehe Abschnitte 5.3 und 6.2) an jedem Integrationspunkt der elastische Linke Cauchy-Green Tensor \mathbf{b}^e sowie die inneren Variablen ξ und $\boldsymbol{\xi}$ abgespeichert werden.

Abschließend erfolgt eine kurze Diskussion der volumetrischen Versteifung. Inkompressibilität ist wegen (2.11)₂ gekennzeichnet durch die Zwangsbedingung $J = 1$. Da das Verhalten eines idealen homogenen inkompressiblen Werkstoffes in jedem materiellen Punkt inkompressibel ist, muß diese Bedingung an jedem Ort eines Finiten Elementes erfüllt sein. Die Determinante J_e^h aus (7.8)₂ wird mittels der Interpolation (7.5) und der Ansatzfunktionen (7.10) aus den Knotenkoordinaten \underline{x}_K und \underline{X}_K berechnet. Wählt man zu den gegebenen Referenzkoordinaten \underline{X}_K die momentanen Koordinaten \underline{x}_K volumenerhaltend, d.h. das Elementvolumen ist in beiden Konfigurationen identisch, dann ist in allen Punkten des Elementes die Bedingung $J_e^h = 1$ zu fordern. Diese Bedingung ist für die gegebene Interpolation nicht erfüllt, wenn nichthomogene Deformationszustände zugrunde gelegt werden. Bei fast inkompressiblem Stoffverhalten ist der mit der kleinen Volumenänderung assoziierte Energiedichteanteil aufgrund des sehr hohen Druckes ebenfalls groß. Die numerische Auswertung der Integration an Punkten mit $J_e^h \neq 1$ führt daher zur sogenannten volumetrischen Versteifung, da dort der zu große volumetrische Energiedichteanteil nicht mehr für

weitere Deformationen zur Verfügung steht. Zur Vermeidung der volumetrischen Versteifung kommen verschiedene Methoden zur Anwendung. In dieser Arbeit werden zwei Methoden aufgegriffen. (i) Im Element wird zur Berechnung von $J_e^h = \textit{konstant}$ nur der homogene Deformationsanteil verwendet, der konform zur inkompressiblen Zwangsbedingung ist. Diese Vorgehensweise entspricht der Auswertung der volumetrischen Anteile am Elementmittelpunkt (siehe Abschnitte 7.1.3 und 7.1.5). (ii) Im Element wird zur Berechnung von $J_e^h = \textit{konstant}$ das Verhältnis aus momentanem Volumen und Referenzvolumen gebildet. Diese Methode wird in den Abschnitten 7.1.5 und 7.1.6 besprochen.

7.1.3 Selektiv reduziert integriertes Verschiebungselement Q1/d8v1

Unter Voraussetzung isochor-volumetrisch entkoppelten Stoffverhaltens können der Spannungstensor und der inkrementelle Stofftensor additiv in deviatorische und volumetrische Anteile zerlegt werden (siehe Abschnitte 4.3.3, 4.4.3, 5.5 und 6.4 in Kombination mit Tafeln 4.3, 5.1 und 6.1). Damit ergeben sich aus dem Term

$$\begin{aligned} \left[\int_{\mathcal{B}_{te}} \boldsymbol{\sigma} : \partial_x \delta \mathbf{u} \, dv \right]_{x=\bar{x}}^h &= \left[\int_{\mathcal{B}_{te}} \boldsymbol{\sigma}^{\text{dev}} : \partial_x \delta \mathbf{u} \, dv \right]_{x=\bar{x}}^h + \\ &\left[\int_{\mathcal{B}_{te}} \boldsymbol{\sigma}^{\text{vol}} : \partial_x \delta \mathbf{u} \, dv \right]_{x=\bar{x}}^h \end{aligned} \quad (7.24)$$

(siehe interne Elementkräfte in (7.14)) und aus dem Term

$$\begin{aligned} &\left[\int_{\mathcal{B}_{te}} (\boldsymbol{\epsilon}^* : \text{sym}[\partial_x \Delta \mathbf{u}] + \partial_x \Delta \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}) : \partial_x \delta \mathbf{u} \, dv \right]_{x=\bar{x}}^h = \\ &\left[\int_{\mathcal{B}_{te}} (\boldsymbol{\epsilon}^{\text{dev}*} : \text{sym}[\partial_x \Delta \mathbf{u}] + \partial_x \Delta \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{\text{dev}}) : \partial_x \delta \mathbf{u} \, dv \right]_{x=\bar{x}}^h + \\ &\left[\int_{\mathcal{B}_{te}} (\boldsymbol{\epsilon}^{\text{vol}*} : \text{sym}[\partial_x \Delta \mathbf{u}] + \partial_x \Delta \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{\text{vol}}) : \partial_x \delta \mathbf{u} \, dv \right]_{x=\bar{x}}^h \end{aligned} \quad (7.25)$$

(siehe Elementsteifigkeitsmatrix in (7.15)) die additiven Aufspaltungen in deviatorische und volumetrische Anteile. Beim selektiv reduziert integrierten Verschiebungselement, das durch Q1/d8v1 abgekürzt wird, werden die deviatorischen Terme in (7.24) und (7.25) mittels der acht Integrationspunkte und Wichtungsfaktoren (7.23) integriert. Die volumetrischen Anteile in (7.24) und (7.25) werden mittels der Einfeldintegration am Elementmittelpunkt

$$\underline{\xi}_1^1 = [0, 0, 0]^T \quad \text{und} \quad w_1^1 = 8 \quad \text{mit} \quad L = 1 \quad (7.26)$$

ausgewertet (siehe auch LIU, HOFSTETTER & MANG [1992,1994]). Diese Vorgehensweise kann durch

$$\int_{\mathcal{B}_{\square}} [(\dots)^{\text{dev}} + (\dots)^{\text{vol}}] d\Box \approx \sum_{l=1}^8 w_l^8 [(\dots)^{\text{dev}}]_{\underline{\xi}=\underline{\xi}_l^8} + w_1^1 [(\dots)^{\text{vol}}]_{\underline{\xi}=\underline{\xi}_1^1}$$

symbolisch beschrieben werden. Die verbleibenden Terme in (7.14)–(7.16), die von der deviatorisch-volumetrischen Aufspaltung unberührt bleiben, werden unverändert mittels (7.23) integriert.

In der in dieser Arbeit durchgeführten Implementierung des Q1/d8v1 Elementes werden bei elastoplastischen oder elastoviskoplastischen Problemstellungen die Größen \mathbf{b}^e , ξ und $\boldsymbol{\xi}$ standardmäßig an den acht Integrationspunkten (7.23) und am zusätzlichen Integrationspunkt (7.26) abgespeichert. Die programmtechnische Umsetzung des Q1/d8v1 Elementes ist daher sehr einfach, da bei unveränderter Elementstruktur lediglich ein zusätzlicher Integrationspunkt eingeführt werden muß. An den insgesamt neun Integrationspunkten werden dann entsprechend die deviatorischen bzw. die volumetrischen Anteile des Spannungstensors und des Stofftensors eingesetzt. Es sei angemerkt, daß am zusätzlichen Integrationspunkt (7.26) die Speicherung der Größen \mathbf{b}^e , ξ und $\boldsymbol{\xi}$ prinzipiell nicht erforderlich ist. Aufgrund der plastischen Inkompressibilität $J^p = 1$ mit $J = J^e$ können dort die volumetrische Spannung (5.63)₃ sowie die volumetrischen Moduli (5.64), (5.65)₃ direkt berechnet werden, d.h. der elastische Prädiktor und der plastische Korrektor müssen nicht ermittelt werden. Diese Vereinfachung wird aus folgenden Gründen hier nicht verwendet. Die Implementierung wäre aufwendiger, da ein weiteres Unterprogramm bereit gestellt werden müßte, obwohl im Algorithmus aus Abschnitt 5.5 der volumetrische Anteil auch im allgemeinen entkoppelten Fall berechnet werden muß. Nach der Erfahrung des Autors reagiert die Konvergenzrate der globalen Newton-Raphson Iteration sehr sensitiv auf Ungenauigkeiten bei der Eigenvektorberechnung. Ohne elastischen Prädiktorschritt, in dem die Eigenvektoren \mathbf{n}_i^{trial} aus (5.39)₂ berechnet werden, müßten die Eigenvektoren \mathbf{n}_i aus (2.28)₂ bestimmt werden, was trotz der Identität (5.40) aus numerischer Sicht nicht konsistent ist. Für erhöhte Genauigkeitsanforderungen bei der numerischen Nachbearbeitung kann die Ausgabe abgeleiteter Größen am Elementmittelpunkt vorteilhaft sein (siehe beispielsweise BARLOW [1976]). Zur Spannungsberechnung am Elementmittelpunkt ist wiederum die Kenntnis der Größe \mathbf{b}^e erforderlich.

Analog zur Namensgebung des Q1/d8v1 Elementes, kann das Q1 Element auch als Q1/d8v8 Element aufgefaßt werden, d.h. sowohl die deviatorischen als auch die volumetrischen Anteile werden mittels acht Punkten integriert. Das vollständig reduziert integrierte Q1/d1v1 Element mit einem Integrationspunkt wird im folgenden nicht betrachtet, da es zu viele Kinematiken aufweist.

7.1.4 Gemischt integriertes Element Q1/d8v1- ϑ

Analog zum selektiv reduzierten Q1/d8v1 Element wird auch hier eine isochor-volumetrisch entkoppelte Energiefunktion vorausgesetzt. Die Aufspaltungen (7.24) und (7.25) können deshalb direkt übernommen werden. Das gemischt integrierte Element kombiniert über einen volumetrischen Wichtungsfaktor $\vartheta \in [0, 1]$ das Q1 Element mit dem Q1/d8v1 Element. Im Unterschied zum selektiv reduziert integrierten Verschiebungselement wird beim Q1/d8v1- ϑ Element nicht der gesamte volumetrische Anteil mittels der Einpunktintegration (7.26) ausgewertet, sondern nur der mit ϑ multiplizierte Anteil. Der verbleibende mit $(1 - \vartheta)$ multiplizierte Anteil der volu-

metrischen Terme sowie die deviatorischen Terme werden mittels der acht Integrationspunkte (7.23) ausgewertet. Diese Vorgehensweise kann durch

$$\int_{\mathcal{B}_\square} [(\dots)^{\text{dev}} + (\dots)^{\text{vol}}] d\mathbf{\square} \approx \sum_{l=1}^8 w_l^8 [(\dots)^{\text{dev}} + (\dots)^{\text{vol}}(1 - \vartheta)]_{\underline{\xi}=\underline{\xi}_l^8} + w_1^1 [(\dots)^{\text{vol}}\vartheta]_{\underline{\xi}=\underline{\xi}_1^1}$$

symbolisch beschrieben werden. Um die quadratische Konvergenz des globalen Newton-Raphson Verfahrens zu gewährleisten, muß die gemischte Integration sowohl bei der numerischen Berechnung der internen Elementkräfte als auch bei der numerischen Berechnung der Elementsteifigkeitsmatrix verwendet werden. Die verbleibenden Terme in (7.14)–(7.16), die von der deviatorisch-volumetrischen Aufspaltung unberührt bleiben, werden unverändert mittels (7.23) integriert. Mit $\vartheta = 0$ erhält man als Grenzfall das Q1 Element. Der volumetrische Wichtungsfaktor $\vartheta = 1$ führt auf das Q1/d8v1 Element. Die Einführung des volumetrischen Wichtungsfaktors erfolgt in Analogie zur Einführung des Stabilisierungsparameters in MORAN, ORTIZ & SHIH [1990] (siehe auch BELYTSCHKO, TSAY & LIU [1981], KAVANAGH & KEY [1972]). Die Vorteile, die sich daraus ergeben, werden in Abschnitt 8.2.2 diskutiert.

7.1.5 Elemente mit modifizierten Deformationsgradienten $\overline{\mathbf{F}}$

In diesem Abschnitt werden Elementformulierungen besprochen, die einen modifizierten Deformationsgradienten zugrunde legen. Die hier behandelten Modifikationen sind auf den volumetrischen Anteil des Deformationsgradienten beschränkt. Formulierungen, bei denen ebenfalls der isochore Anteil des Deformationsgradienten verändert wird, werden hier nicht diskutiert. Zu letzteren zählen die Elemente mit erweiterten Verzerrungen (EAS, Enhanced Assumed Strain), die auf der Arbeit von SIMO & ARMERO [1992] basieren und von SIMO, ARMERO & TAYLOR [1993], KORELC [1996], KORELC & WRIGGERS [1996], NAGTEGAAL & FOX [1996], GLASER & ARMERO [1997] und anderen weiterentwickelt wurden. Der Standarddeformationsgradient aus Abschnitt 2.1.2 wird dabei auf Elementebene additiv durch inkompatible Anteile erweitert. Grundlegende Arbeiten zu diesem Konzept sind von WILSON, TAYLOR, DOHERTY & GHABOUSSI [1973], TAYLOR, BERESFORD & WILSON [1976] und SIMO & RIFAI [1990].

Ausgangspunkt der Modifikation des volumetrischen Anteils ist die Aufspaltung (2.13) des Deformationsgradienten. Der isochore Anteil $\widehat{\mathbf{F}}$ bleibt unverändert erhalten und der volumetrische Anteil $J^{\frac{1}{3}}$ wird durch $\overline{J}^{\frac{1}{3}}$ ersetzt:

$$\overline{\mathbf{F}} = \overline{J}^{\frac{1}{3}} \widehat{\mathbf{F}} = \left(\frac{\overline{J}}{J} \right)^{\frac{1}{3}} \mathbf{F} \quad \text{mit} \quad \widehat{\mathbf{F}} = J^{-\frac{1}{3}} \mathbf{F} . \quad (7.27)$$

Es ist offensichtlich, daß die isochoren Anteile aller daraus folgenden Größen, wie z.B. $\widehat{\mathbf{b}}$, $\widehat{\mathbf{b}}^e$ oder $\widehat{\mathbf{W}}$, von dieser Modifikation unbeeinflusst bleiben. Setzt man ein isochor-volumetrisch entkoppeltes Stoffverhalten voraus, so muß in den volumetrischen Anteilen U der Energiefunktionen (4.14) bzw. (5.59)₁ lediglich die Standarddeterminante J durch \overline{J} ersetzt werden, d.h. $U(\overline{J})$ statt $U(J)$.

Um den modifizierten Deformationsgradienten (7.27) in der schwachen Form des Gleichgewichtes (7.2) berücksichtigen zu können, muß das vordere Integral in (7.2) umgeformt werden. Mit Hilfe der Beziehungen aus Kapitel 2 erhält man

$$\int_{\mathcal{B}_t} \boldsymbol{\sigma} : \partial_{\mathbf{x}} \delta \mathbf{u} \, dv = \int_{\mathcal{B}_0} \boldsymbol{\sigma} : (J \partial_{\mathbf{x}} \delta \mathbf{u}) \, dV = \int_{\mathcal{B}_0} \boldsymbol{\tau} : \partial_{\mathbf{x}} \delta \mathbf{u} \, dV = \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{P} : \delta \mathbf{F} \, dV \quad (7.28)$$

Durch Verwendung der virtuellen Verschiebungen als Testfunktionen (7.11) entsprechen die spezifischen virtuellen Energieausdrücke in den Integralen (7.28) den spezifischen Leistungsausdrücken in (3.9) mit dem Unterschied, daß anstelle der Zeitableitungen der Verschiebungen $\dot{\mathbf{u}}$ die virtuellen Verschiebungen $\delta \mathbf{u}$ treten. Bei Finiten Elemente Formulierungen, die auf dem modifizierten Deformationsgradienten (7.27) beruhen, wird anstelle des Integrals (7.28) das modifizierte Integral

$$\int_{\mathcal{B}_0} \overline{\mathbf{P}} : \delta \overline{\mathbf{F}} \, dV \quad \text{mit} \quad \delta \overline{\mathbf{F}} = (\partial_J \overline{\mathbf{F}}) \delta J + (\partial_{\overline{\mathbf{J}}} \overline{\mathbf{F}}) \delta \overline{\mathbf{J}} + (\partial_{\mathbf{F}} \overline{\mathbf{F}}) : \delta \mathbf{F} \quad (7.29)$$

und $\overline{\mathbf{P}} = \overline{\mathbf{P}}(\overline{\mathbf{F}})$

verwendet. Auf die Linearisierung dieses Integrals wird hier aus Gründen der Übersichtlichkeit verzichtet und auf die Arbeit von FREISCHLÄGER [1998] verwiesen. Es ist jedoch erkennbar, daß durch Anwendung der Kettenregel sowohl bei der Bildung des virtuellen modifizierten Deformationsgradienten (7.29)₂ als auch bei der Linearisierung des Integrals (7.29)₁ zusätzliche Terme entstehen. Dadurch wird die Aufstellung der Spaltenmatrix der internen Elementkräfte in (7.14) und der Elementsteifigkeitsmatrix in (7.15) wesentlich umfangreicher und somit zeitaufwendiger. Es sei darauf hingewiesen, daß in die Werkstoffalgorithmen der Kapitel 4, 5 und 6 der modifizierte Deformationsgradient eingeht. Somit müssen der Spannungstensor und der Stofftensor implizit als Funktion von $\overline{\mathbf{F}}$ aufgefaßt werden. Desweiteren wird für alle Pull-Back und Push-Forward Operationen der modifizierte Deformationsgradient $\overline{\mathbf{F}}$ verwendet. Die Beziehung (2.11)₂ bleibt davon unberührt, d.h. die Transformation des Referenzvolumens in das Momentanvolumen und umgekehrt erfolgt geometrisch korrekt.

Auf der Basis des modifizierten Deformationsgradienten (7.27) und des modifizierten Integrals (7.29) der schwachen Form des Gleichgewichtes werden nachfolgend zwei Beispiele gegeben. Die schwache Form wird dabei elementweise mittels 8-Punkt-Integration ausgewertet. Die modifizierte Determinante $\overline{\mathbf{J}}$ ist im Element konstant.

- **$\overline{\mathbf{F}}_{\text{Nag}}$ Element:**

Das sogenannte $\overline{\mathbf{F}}_{\text{Nag}}$ Element basiert auf der Methode des gemittelten Volumenverhältnisses (mean dilatation approach) nach NAGTEGAAL, PARKS & RICE [1974]. Hierbei wird die modifizierte Determinante

$$\bar{J}_{e,\text{Nag}}^h = \frac{v_{te}^h}{V_{0e}^h} = \frac{\text{momentanes Elementvolumen}}{\text{Referenzelementvolumen}} \quad \text{mit}$$

$$v_{te}^h = \int_{\mathcal{B}_{te}^h} dv = \int_{\mathcal{B}_\square} \det[\partial_{\underline{\xi}} \underline{x}_e^h(\underline{\xi})] d\underline{\square} = \sum_{l=1}^8 w_l^8 \left[\det[\partial_{\underline{\xi}} \underline{x}_e^h(\underline{\xi})] \right]_{\underline{\xi}=\underline{\xi}_l^8}, \quad (7.30)$$

$$V_{0e}^h = \int_{\mathcal{B}_{0e}^h} dV = \int_{\mathcal{B}_\square} \det[\partial_{\underline{\xi}} \underline{X}_e^h(\underline{\xi})] d\underline{\square} = \sum_{l=1}^8 w_l^8 \left[\det[\partial_{\underline{\xi}} \underline{X}_e^h(\underline{\xi})] \right]_{\underline{\xi}=\underline{\xi}_l^8}$$

verwendet.

- **$\bar{\mathbf{F}}_{\text{Mor}}$ Element:**

Das sogenannte $\bar{\mathbf{F}}_{\text{Mor}}$ Element benutzt als modifizierte Determinante

$$\bar{J}_{e,\text{Mor}}^h = J_{0e}^h = \det \underline{F}_{0e}^h = \det \left[\partial_{\underline{\xi}} \underline{x}_e^h(\underline{\xi}) [\partial_{\underline{\xi}} \underline{X}_e^h(\underline{\xi})]^{-1} \right]_{\underline{\xi}=\underline{\xi}_1^8} \quad (7.31)$$

die am Elementmittelpunkt ausgewertete Determinante des Deformationsgradienten (vgl. (7.8)). Dieser Ansatz geht auf MORAN, ORTIZ & SHIH [1990] zurück. Von DE SOUZA NETO, PERIĆ, DUTKO & OWEN [1996] wird bei unveränderter Elementkinematik basierend auf demselben Ansatz lediglich der Spannungstensor modifiziert. Diese inkonsistente Vorgehensweise führt im Gegensatz zum konsistenten $\bar{\mathbf{F}}_{\text{Mor}}$ Element zu einer unsymmetrischen Steifigkeitsmatrix und wird in dieser Arbeit nicht weiter verfolgt.

7.1.6 Element Q1/P0 mit konstanter Dilatation

Das Q1/P0 Element basiert auf der Arbeit von SIMO, TAYLOR & PISTER [1985]. Anstatt der Determinante des Deformationsgradienten J wird die Dilatation θ als zusätzliche freie Feldvariable eingeführt. Die Beziehungen (2.11)_{2,3} bleiben von der Einführung der Dilatation als Feldvariable unberührt. Die volumetrische Cauchy Spannung $\text{tr}\boldsymbol{\tau}/(3J)$ wird durch die volumetrische Spannung p ersetzt, die ebenfalls als zusätzliche Feldvariable eingeführt wird. Mittels der Nebenbedingungen

$$J - \theta = 0 \quad \text{und} \quad p - \frac{1}{3\theta} \text{tr}\boldsymbol{\tau} = 0 \quad (7.32)$$

werden die freien Feldvariablen \mathbf{u} , θ und p gekoppelt. Hierbei wird die Spannung implizit als Funktion der Verschiebungen und der Dilatation aufgefaßt. Die Nebenbedingungen (7.32) dürfen, da sie identisch zu null sind, zur starken Form (3.4)₁ oder nach der Multiplikation mit Testfunktionen und anschließender Integration zur schwachen Form (7.2) des Gleichgewichtes hinzuaddiert werden. Es ergibt sich:

$$g^*(\mathbf{u}, \theta, p, \boldsymbol{\eta}, \eta_\theta, \eta_p) = \int_{\mathcal{B}_t} \boldsymbol{\sigma} : \partial_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\eta} dv - \int_{\mathcal{B}_t} \rho(\mathbf{b}_0 - \ddot{\mathbf{u}}) \cdot \boldsymbol{\eta} dv - \int_{\partial \mathcal{B}_t} \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\eta} da +$$

$$\int_{\mathcal{B}_t} \frac{1}{J} [J - \theta] \eta_p dv + \int_{\mathcal{B}_t} \frac{1}{J} [p - \frac{1}{3\theta} \text{tr}\boldsymbol{\tau}] \eta_\theta dv = 0 \quad . \quad (7.33)$$

Hierin sind die skalaren Testfunktionen η_θ und η_p fest und stetig vorgegeben, aber ansonsten beliebig. Da die Nebenbedingungen (7.32) damit exakt erfüllt sind, ist (7.33) mit (7.2) identisch. Als Testfunktionen werden nun

$$\boldsymbol{\eta} = \delta \mathbf{u} \quad , \quad \eta_\theta = \delta \theta \quad \text{und} \quad \eta_p = \delta p \quad (7.34)$$

verwendet. Zusätzlich zur virtuellen Verschiebung (7.11) treten die virtuelle Dilatation $\delta \theta$ und der virtuelle Druck δp auf. Damit ist gesichert, daß alle Terme in (7.33) dieselbe Dimension besitzen. Aufgrund der Unabhängigkeit der virtuellen Größen müssen in Gleichung (7.33) alle Terme, die entweder $\delta \mathbf{u}$, $\delta \theta$ oder δp enthalten, unabhängig voneinander verschwinden. Nimmt man im Element eine konstante Dilatation θ_e^h und einen konstanten Druck p_e^h an, d.h. im Element sind die virtuelle Dilatation und der virtuelle Druck ebenfalls konstant, so können die beiden hinteren Integrale in der schwachen Form des Gleichgewichtes (7.33) ausgewertet werden:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}_{te}^h} \frac{1}{J} [J - \theta] \delta p \, dv = 0 &\quad \rightarrow \quad \theta_e^h = \frac{v_{te}^h}{V_{0e}^h} \quad , \\ \int_{\mathcal{B}_{te}^h} \frac{1}{J} \left[p - \frac{1}{3\theta} \text{tr} \boldsymbol{\tau} \right] \delta \theta \, dv = 0 &\quad \rightarrow \quad p_e^h = \frac{1}{v_{te}^h} \int_{\mathcal{B}_{te}^h} \frac{1}{3J} \text{tr} \boldsymbol{\tau} \, dv . \end{aligned} \quad (7.35)$$

Es ist offensichtlich, daß θ_e^h ausschließlich von den Verschiebungen abhängt. Damit ist p_e^h ebenfalls ausschließlich eine Funktion der Verschiebungen. Die Annahme einer konstanten Dilatation θ_e^h und eines konstanten Druckes p_e^h im Element kann als Interpolation eines elementinternen Dilatationsfreiheitsgrades θ_e und eines elementinternen Druckfreiheitsgrades p_e mittels der Ansatzfunktion $N(\underline{\xi}) = 1$ aufgefaßt werden, d.h.

$$\theta_e^h(\underline{\xi}) = N(\underline{\xi}) \theta_e = \textit{konstant} \quad \text{und} \quad p_e^h(\underline{\xi}) = N(\underline{\xi}) p_e = \textit{konstant} \quad \text{mit} \quad N(\underline{\xi}) = 1 \quad .$$

Durch die Festlegung auf spezielle Testfunktionen $\delta \theta$, $\delta p = \textit{konstant}$ aus der Menge aller zulässigen Testfunktionen (7.34)_{2,3} liefert die schwache Form (7.33) nun eine Näherungslösung und ist somit nicht mehr identisch mit (7.2).

Die hier beschriebene Vorgehensweise liefert mit (7.35) eingesetzt in (7.33) in der schwachen Form des Gleichgewichtes eine reine Verschiebungsformulierung, d.h. $g^* = g^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\eta})$. Die Linearisierung der schwachen Form führt damit ebenfalls auf eine reine Verschiebungsformulierung, die mittels der 8-Punkt-Integration ausgewertet wird. Betrachtet man den allgemeineren Fall mit nicht konstanter Dilatation und nicht konstantem Druck, dann müssen θ und p bei der Linearisierung als freie Feldgrößen behandelt werden. Nach Einführung der Ansatzfunktionen für θ und p kann abschließend eine reine Verschiebungsformulierung durch elementweise Elimination der Dilatations- und Druckfreiheitsgrade erhalten werden (statische Kondensation). Das Q1/P0 Element wird häufig für Berechnungen bei fast inkompressiblem Stoffverhalten eingesetzt. Alternative Beschreibungen des Konzeptes sind beispielsweise in MÜLLER-HOEPPE [1990], LIU, HOFSTETTER & MANG [1992,1994], SCHELLEKENS & PARISCH [1994a] oder FREISCHLÄGER [1998] gegeben.

7.1.7 Diskussion der Volumenelemente

Es ist bekannt, daß das Q1 Element zu starker volumetrischer Versteifung führt, sobald der verwendete Werkstoff fast oder vollständig inkompressibel ist. Beispiele für fast inkompressibles Werkstoffverhalten sind Gummi-Elastizität und Metall-Elastoplastizität. Gummi ist durch ein hohes Verhältnis $K/\mu \gg 1$ von Kompressionsmodul zu Schubmodul charakterisiert. Bei Metallen wird die plastische Deformation als isochor, d.h. vollkommen inkompressibel, angenommen. Der kompressible Anteil stammt allein aus dem elastischen Deformationsanteil, der in vielen praktischen Anwendungen im Vergleich zum plastischen Anteil relativ klein ist. Finite Element Rechnungen mit dem Q1 Element führen für beide Werkstoffe auf keine brauchbaren Ergebnisse. Die in diesem Kapitel behandelten Elemente Q1/d8v1, $\overline{\mathbf{F}}$ und Q1/P0 beinhalten geeignete Modifikationen, um den volumetrischen Versteifungseffekt zu verringern.

Die Hauptvorteile des Q1/d8v1 Elementes gegenüber dem $\overline{\mathbf{F}}$ oder Q1/P0 Element sind die einfache Implementierung in ein Finite Element Programm und der geringe Mehraufwand bei der Berechnung. Die Grundstruktur der Elementkinematik bleibt von der deviatorisch-volumetrischen Aufspaltung unbeeinflusst. Bei der Aufstellung der Spaltenmatrix der internen Elementkräfte und der Elementsteifigkeitsmatrix liegt der einzige Unterschied in der Verwendung von σ^{dev} , $\epsilon^{\text{dev}*}$ an den acht Integrationspunkten statt der Verwendung von σ^{vol} , $\epsilon^{\text{vol}*}$ am Elementmittelpunkt. Der Mehraufwand ist relativ gering, da nur ein einziger Integrationspunkt im Elementmittelpunkt hinzu kommt. Anstatt an acht Punkten sind die benötigten Matrizen an neun Punkten aufzustellen. Dies entspricht einem Mehraufwand von 12.5% bei der Durchführung der Integration. Hinzu kommt der Mehraufwand zur additiven Aufspaltung des Spannungs- und des Stofftensors. Dieser Mehraufwand ist ebenfalls als gering einzustufen. Es sind lediglich die Tensorkomponenten additiv aufzuspalten, während die Tensorbasen sowohl für den deviatorischen als auch den volumetrischen Anteil unverändert übernommen werden können. Der Nachteil des Q1/d8v1 Elementes gegenüber den $\overline{\mathbf{F}}$ oder Q1/P0 Elementen liegt in der Beschränkung auf isochor-volumetrisch entkoppelte Werkstoffe. Für Gummi-Elastizität und Metall-Plastizität ist dieser Nachteil jedoch nicht gravierend, da in den meisten praktischen Anwendungen eine isochor-volumetrische Entkopplung angenommen werden kann.

Die Elemente $\overline{\mathbf{F}}$ oder Q1/P0 besitzen den Vorteil, daß sie bezüglich der verwendeten Werkstoffe nicht eingeschränkt sind. Wie in den Abschnitten 7.1.5 und 7.1.6 beschrieben ist, erfolgt eine Modifizierung der schwachen Form des Gleichgewichtes. Aufgrund dieser Modifizierung treten bei der Linearisierung durch Anwendung der Produktregel zusätzliche Terme auf. Diese Terme müssen bei der Aufstellung der Elementsteifigkeitsmatrizen berücksichtigt werden. Zum einen wird dadurch die Implementierung in Finite Element Programme erschwert, zum anderen ist der Aufwand zur Aufstellung der Elementmatrizen im allgemeinen höher als beim selektiv reduziert integrierten Q1/d8v1 Element. Es sei angemerkt, daß sich bei Voraussetzung eines isochor-volumetrisch entkoppelten Stoffgesetzes die $\overline{\mathbf{F}}$ oder Q1/P0 Elemente im Vergleich zum allgemeinen Fall deutlich vereinfachen lassen.

Die Vorteile einer selektiv reduzierten Integration sind bereits seit langem bekannt. Zwei Zitate sollen dies belegen: „... the underintegrated displacement model can be implemented more simply and economically ...“ (siehe HUGHES [1977]) und „... selective integration procedures are very simple ways of attaining the performance of the mixed formulation without engendering the additional complications ...“ (siehe HUGHES [1987], Seite 221). Die Autoren FRIED [1974], MALKUS [1976] und HUGHES [1977] untersuchten die selektiv reduzierte Integration für den fast inkompressiblen linear elastischen Fall. Von MALKUS & HUGHES [1978] wurde „... the equivalence of certain mixed finite element methods with displacement methods employing the reduced/selective integration concept in both linear and nonlinear problems ...“, nachgewiesen.

Um die Vergleichbarkeit der verwendeten Elemente Q1/d8v1, $\overline{\mathbf{F}}$ und Q1/P0 zu ermöglichen, wird im folgenden ein isochor-volumetrisch entkoppeltes Werkstoffverhalten vorausgesetzt. Vergleiche mit EAS Elementen werden nicht durchgeführt, da im Gegensatz zu den zuerst genannten Elementen die EAS Modifikationen nicht auf den volumetrischen Anteil beschränkt sind.

Zunächst wird das Q1/P0 Element für den elastischen Fall betrachtet. Der deviatorische Anteil \widehat{W} der Energiefunktion (4.14) wird identisch übernommen und der volumetrische Anteil wird durch $U(\theta)$ ersetzt. Aus der Berechnungsvorschrift der volumetrischen Kirchhoff Spannung (4.57)₃ folgt damit $\tau^{\text{vol}} = \text{tr}\boldsymbol{\tau}/3 = \theta\partial_{\theta}U$. Da die Dilatation θ elementweise als konstant vorausgesetzt ist, ergibt sich aus (7.35)₄ der konstante Cauchysche Druck

$$p = \partial_{\theta}U = \theta^{-1}\tau^{\text{vol}} \quad (7.36)$$

(siehe auch (4.33)). Es ist naheliegend, die Dilatation (7.35)₂ zu berechnen und damit die Beziehung (7.36) statt der Beziehung (7.35)₄ auszuwerten.

Die $\overline{\mathbf{F}}$ Elemente basieren im elastischen Fall auf der Energiefunktion (4.14) mit unverändertem deviatorischen Anteil \widehat{W} und modifiziertem volumetrischen Anteil $U(\overline{J})$. Die volumetrische Kirchhoff Spannung berechnet sich dann zu $\tau^{\text{vol}} = \overline{J}\partial_{\overline{J}}U$ und der Cauchysche Druck berechnet sich zu

$$p = \partial_{\overline{J}}U = \overline{J}^{-1}\tau^{\text{vol}} \quad (7.37)$$

Der Vergleich von (7.30) mit (7.35)₂ liefert die Identität $\theta = \overline{J}_{\text{Nag}}$, d.h. die volumetrischen Spannungsanteile (7.36) und (7.37) sind ebenfalls gleich. Das Q1/P0 und das $\overline{\mathbf{F}}_{\text{Nag}}$ Element sind also bezüglich der volumetrischen Elementkinematik und des volumetrischen Stoffverhaltens übereinstimmend. Da die in den Abschnitten 7.1.5 und 7.1.6 beschriebenen Modifikationen das deviatorische Elementverhalten nicht beeinflussen, kann insgesamt auf die Identität des Q1/P0 Elementes mit dem $\overline{\mathbf{F}}_{\text{Nag}}$ Element geschlossen werden. Alternativ zur Darstellung (7.27) gilt dann

$$\overline{\mathbf{F}}_{\text{Nag}} = \theta^{\frac{1}{3}} \widehat{\mathbf{F}} \quad .$$

Dieses Ergebnis ist auch auf den isochor-volumetrisch entkoppelten elastoplastischen oder elastoviskoplastischen Fall übertragbar. Wegen der plastischen Inkompressibi-

lität $\theta^p = \bar{J}_{\text{Nag}}^p = 1$ gilt dann $\theta = \bar{J}_{\text{Nag}} = \theta^e = \bar{J}_{\text{Nag}}^e$ und die Identität der volumetrischen Anteile ist erneut gegeben.

Nachfolgend wird das Q1/d8v1 Element für den elastischen Fall untersucht. Die Energiefunktion (4.14) gilt zunächst unverändert. Da der volumetrische Anteil jedoch nur am Elementmittelpunkt ausgewertet wird, kann $U(J)$ alternativ als $U(J_0)$ aufgefaßt werden. Der Cauchysche Druck bestimmt sich damit zu

$$p = \partial_{J_0} U = J_0^{-1} \tau^{\text{vol}} \quad \text{mit} \quad \tau^{\text{vol}} = J_0 \partial_{J_0} U \quad . \quad (7.38)$$

Wie aus (7.31) sowie dem Vergleich von (7.37) und (7.38) ersichtlich ist, stimmen beim Q1/d8v1 Element und beim $\bar{\mathbf{F}}_{\text{Mor}}$ Element die volumetrischen Anteile im Prinzip überein. Die Integration der volumetrischen Anteile erfolgt jedoch unterschiedlich. Beim Q1/d8v1 Element wird eine 1-Punkt-Integration und beim $\bar{\mathbf{F}}_{\text{Mor}}$ eine 8-Punkt-Integration angewendet. Wie den Ausführungen von FREISCHLÄGER [1998] entnommen werden kann, wirkt sich dieser Unterschied kaum aus und beide Elemente können in der praktischen Anwendung als äquivalent angesehen werden (siehe auch Kapitel 8). Bei isochor-volumetrisch entkoppeltem Stoffverhalten ist auch bei der $\bar{\mathbf{F}}_{\text{Mor}}$ Formulierung der volumetrische Anteil separierbar. Wird dieser Anteil auch mit einer 1-Punkt-Integration ausgewertet, sind die Elemente Q1/d8v1 und $\bar{\mathbf{F}}_{\text{Mor}}$ völlig identisch. Diese Identität gilt analog bei plastischer Inkompressibilität.

Eine ausführliche Diskussion und der Vergleich der genannten Elemente für den nichtlinearen elastischen Fall ist in FREISCHLÄGER [1998] gegeben.

7.2 Schalenelemente

In den Kapiteln 4, 5 und 6 sind die Algorithmen zur Beschreibung des Stoffverhaltens für den dreidimensionalen Fall zusammengestellt. Diese Algorithmen können in Schalenelementen nur dann eingesetzt werden, wenn der vollständige dreidimensionale Spannungszustand dargestellt werden kann. Klassische Schalenkonzepte mit verschwindender Normalspannung in Dickenrichtung lassen sich damit aber nicht verbinden. Daher werden in jüngster Zeit Schalenelemente entwickelt, die auch Dickendeformationen beschreiben können. Damit sind die obigen Einschränkungen auf den degenerierten Spannungszustand aufgehoben. In den Arbeiten von HAUPTMANN [1997] und HAUPTMANN & SCHWEIZERHOF [1998] erfolgt eine umfassende Behandlung dieser Thematik für den elastischen Fall auf der Basis des St.-Venant-Kirchhoffschen Stoffgesetzes. Insbesondere in HAUPTMANN [1997], Seite 2 ist ein kurzer Überblick mit den entsprechenden Verweisen auf das Schrifttum gegeben.

Aus der genannten Arbeit von HAUPTMANN [1997] wird stellvertretend für alle Schalenelemente mit dreidimensionalem Spannungszustand das ANS3Dq Element herausgegriffen. Mit Hilfe dieses Elementes soll in Kapitel 8 der Einfluß der bei den Volumenelementen erprobten selektiv reduzierten Integration auch bei den „Volumen“-Schalenelementen untersucht werden. Im Rahmen einer sinnvollen Einführung wird zunächst basierend auf den Ausführungen in Abschnitt 7.1.1 das ANS3D Element

beschrieben. Zur Vermeidung der Querschubversteifung werden die Querschubverzerrungen gesondert interpoliert. Um die Dickenversteifung zu eliminieren, erfolgt dann die Erweiterung mit einem quadratischen Ansatz für die Verschiebung in Dickenrichtung zum ANS3Dq Element. Schließlich wird mittels selektiv reduzierter Integration bei isochor-volumetrisch entkoppeltem Stoffverhalten die volumetrische Versteifung vermindert und das ANS3Dq/d4v1 Element eingeführt.

7.2.1 Element ANS3D

Für die Betrachtung von Volumenelementen als „Quasi“-Schalenelemente ist es zweckmäßig, die in Abschnitt 7.1.1.iv für Volumenelemente aufgestellte isoparametrische Interpolation in eine andere Darstellung zu überführen. Die approximierten Referenzgeometrie (7.5) des Volumenelementes mit trilinearen Ansatzfunktionen (7.10) wird umgeschrieben zu

$$\begin{aligned} \underline{X}_e^h(\underline{\xi}) &= \sum_{k=1}^4 N_k(\underline{\xi}) \underline{X}_K + \sum_{k=5}^8 N_k(\underline{\xi}) \underline{X}_K \\ &= \frac{1}{2}[1 - \zeta] \underline{X}_e^{hu}(\xi, \eta) + \frac{1}{2}[1 + \zeta] \underline{X}_e^{ho}(\xi, \eta) \quad \text{mit } K = K_e(k) . \end{aligned}$$

Dabei wird vorausgesetzt, daß die lokalen Knoten $k = 1, \dots, 4$ die untere Fläche und die lokalen Knoten $k = 5, \dots, 8$ die obere Fläche des Volumenelementes repräsentieren:

$$\underline{X}_e^{hu}(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^4 N_k(\xi, \eta) \underline{X}_K \quad , \quad \underline{X}_e^{ho}(\xi, \eta) = \sum_{k=5}^8 N_{k-4}(\xi, \eta) \underline{X}_K \quad (7.39)$$

$$\text{mit } N_k(\xi, \eta) = \frac{1}{2}[1 + \xi_k \xi] \frac{1}{2}[1 + \eta_k \eta] \quad \text{und } \xi_k = \pm 1 \quad , \quad \eta_k = \pm 1 .$$

Das heißt, analog zur bekannten Darstellung des degenerierten Schalenkonzeptes lassen sich die ursprünglichen trilinearen Ansatzfunktionen $N_k(\underline{\xi})$ aus (7.10) aufgespalten in einen bilinearen Anteil $N_k(\xi, \eta)$, der eine Fläche parametrisiert, und einen linearen Anteil $(1 \pm \zeta)/2$, der die Dickenrichtung parametrisiert. Damit ist es möglich, die Referenzgeometrie des Volumenelementes mit Hilfe einer gedachten Mittelfläche (Index m) mit den vier Knotenkoordinaten \underline{X}_K^m , den zugehörigen vier Dickenvektoren \underline{D}_K^m und den Dicken h_K^m zu beschreiben:

$$\begin{aligned} \underline{X}_e^{hu}(\xi, \eta) &= \sum_{k=1}^4 N_k(\xi, \eta) \left[\underline{X}_K^m - \frac{h_K^m}{2} \underline{D}_K^m \right] , \\ \underline{X}_e^{ho}(\xi, \eta) &= \sum_{k=1}^4 N_k(\xi, \eta) \left[\underline{X}_K^m + \frac{h_K^m}{2} \underline{D}_K^m \right] . \end{aligned} \quad (7.40)$$

Die Dickenvektoren sind auf die Einheitslänge normiert. Um Elementüberschneidungen zu vermeiden, wird zugelassen, daß die Dickenvektoren nicht senkrecht auf der Mittelfläche stehen.

Der Vorteil der Darstellung (7.40) liegt in der expliziten Einführung einer Mittelfläche, wie sie in der Schalentheorie üblich ist. Somit können die folgenden Betrachtungen analog zur üblichen Schalentheorie erfolgen, d.h. das ANS3D Element kann faktisch wie ein degeneriertes Schalenelement behandelt werden. Es sei jedoch angemerkt, daß die ursprüngliche Darstellung (7.39) ohne Mittelfläche beispielsweise bei der Berechnung geschichteter Strukturen vorzuziehen ist, da damit mehrere übereinanderliegende Elementschichten besser modelliert werden können.

Bei der Beschreibung der momentanen Elementgeometrie ist die Vorgehensweise analog:

$$\begin{aligned}\underline{x}_e^h(\underline{\xi}) &= \underline{X}_e^h(\underline{\xi}) + \underline{u}_e^h(\underline{\xi}) \\ \underline{u}_e^h(\underline{\xi}) &= \frac{1}{2}[1 - \zeta] \underline{u}_e^{hu}(\xi, \eta) + \frac{1}{2}[1 + \zeta] \underline{u}_e^{ho}(\xi, \eta) \\ \underline{u}_e^{hu}(\xi, \eta) &= \sum_{k=1}^4 N_k(\xi, \eta) \underline{u}_K^{mu} \quad , \quad \underline{u}_e^{ho}(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^4 N_k(\xi, \eta) \underline{u}_K^{mo} \quad .\end{aligned}\tag{7.41}$$

Die Verschiebungen $\underline{u}_e^h(\underline{\xi})$ im Element werden in Dickenrichtung aus den Verschiebungen der unteren Fläche und den Verschiebungen der oberen Fläche interpoliert. Jedem diskreten Referenzknoten \underline{X}_K^m der Mittelfläche sind die diskreten Knotenverschiebungen \underline{u}_K^{mu} der unteren Fläche und \underline{u}_K^{mo} der oberen Fläche zugeordnet. Anstatt der acht Knoten mit je drei Verschiebungsfreiheitsgraden des ursprünglichen Volumenelementes liegen nun vier Knoten mit je zwei mal drei Verschiebungsfreiheitsgraden vor. Diese schalentypische Darstellung ist jedoch nur sinnvoll, wenn flache Volumenelemente zugrunde gelegt werden, d.h. die Dicke des Elementes deutlich kleiner als seine Länge oder Breite ist.

Bei Schalenelementen niedriger Ansatzordnung tritt im allgemeinen das Problem der Querschubversteifung auf. Bekanntermaßen führt die einfache Elementkinematik bei bilinearen Ansätzen für reine Biegebeanspruchung unkorrekterweise zu Querschubspannungen und in der Folge zur Versteifung. Die Querschubversteifung läßt sich anschaulich so begründen, daß der mit dem unkorrekten Querschub assoziierte Energieanteil dem Anteil der Biegung entzogen wird und somit die Deformation infolge Biegung zu gering ausfällt. Ziel ist es, die ungewünschte Kopplung von Biege- und Querschubanteilen zu vermeiden. Ein effizientes Konzept ist die Methode der angenommenen Querschubverzerrungen nach DVORKIN & BATHE [1984].

Die Komponenten des Green-Lagrangeschen Verzerrungstensors sind bezüglich des globalen Koordinatensystems berechenbar und können aufgrund der Kenntnis von (7.6) in das lokale Einheitskoordinatensystem $\underline{\xi}$ transformiert werden. Bei Schalenelementen mit bilinearen Ansatzfunktionen in der $\xi\eta$ -Schalenebene, werden für die Querschubverzerrungen

$$\begin{aligned}E_{\xi\zeta}^{ANS}(\eta, \zeta) &= \frac{1}{2}[1 - \eta] E_{\xi\zeta}(\xi = 0, \eta = -1, \zeta) + \frac{1}{2}[1 + \eta] E_{\xi\zeta}(\xi = 0, \eta = +1, \zeta), \\ E_{\eta\zeta}^{ANS}(\xi, \zeta) &= \frac{1}{2}[1 - \xi] E_{\eta\zeta}(\xi = -1, \eta = 0, \zeta) + \frac{1}{2}[1 + \xi] E_{\eta\zeta}(\xi = +1, \eta = 0, \zeta)\end{aligned}\tag{7.42}$$

in die lokalen Koordinatenrichtungen entweder konstante oder lineare Verläufe angenommen. Die angenommenen Querschubverzerrungen sind mit ANS (assumed natural shear strain) indiziert. Die Auswertung von (7.42) im lokalen ξ -Koordinatensystem hat den Vorteil, daß dort die Querrichtung durch die Koordinate ζ auf natürliche Weise gegeben ist. Im globalen Koordinatensystem besitzt die Querrichtung im allgemeinen Fall Komponenten in alle drei Koordinatenrichtungen. Nach der Berechnung von (7.42) erfolgt die Rücktransformation auf das globale Koordinatensystem. Bei Verwendung der ANS Methode ist es zweckmäßig, mit den Green-Lagrangeschen Verzerrungen \mathbf{E} zu arbeiten, da diese bezüglich der Referenzkonfiguration definiert sind. Bei den Transformationen der Verzerrungen vom globalen ins lokale Koordinatensystem und zurück geht die approximierte Referenzgeometrie ein. Diese Transformationen müssen, da die Referenzgeometrie unabhängig von den Verschiebungen ist, bei der Linearisierung nicht berücksichtigt werden. Durch Verwendung der Green-Lagrangeschen Verzerrungen ist die Verwendung der energetisch konjugierten 2. Piola-Kirchhoff Spannungen \mathbf{S} impliziert. Eine Elementformulierung in der Momentankonfiguration in Kombination mit der Methode der angenommenen Querschubverzerrungen ist für eine algorithmische Umsetzung nicht vorteilhaft, da die Koordinatentransformationen dann verschiebungsabhängig sind und bei der Linearisierung berücksichtigt werden müssen.

Wie im vorangegangenen Abschnitt begründet, ist für Schalenelemente die materielle Formulierung, d.h. Verwendung des Green-Lagrangeschen Verzerrungstensors \mathbf{E} und des 2. Piola-Kirchhoff Spannungstensors \mathbf{S} , vorteilhaft. Als Folge der Wahl der Energiefunktion in Abhängigkeit des elastischen Linken Cauchy-Green Tensors (siehe Abschnitt 5.2.1) ergibt sich jedoch die räumliche Formulierung der Elastoplastizität und Elastoviskoplastizität als sinnvoll. Den in den Tafeln **4.3**, **5.1** und **6.1** vorgestellten Werkstoffalgorithmen kommt deshalb nachträglich eine zentrale Bedeutung zu, da dort bereits ein einfacher Weg angegeben wurde, um die in der Momentankonfiguration hergeleiteten Spannungs- und Stofftensoren in die Referenzkonfiguration zu transformieren.

In der algorithmischen Formulierung der Plastizität und Viskoplastizität in den Kapiteln 5 und 6 ist der Deformationsgradient \mathbf{F} zum Zeitpunkt t_{n+1} die treibende Größe (siehe (5.31)₁). Wie aus der Definition des Green-Lagrangeschen Verzerrungstensors (2.15) ersichtlich ist, impliziert die Modifikation \mathbf{E}^{ANS} in (7.42) auch den modifizierten Deformationsgradienten \mathbf{F}^{ANS} . Bei Verwendung des ANS3D Elementes muß als Eingangsgröße für die Werkstoffalgorithmen also \mathbf{F}^{ANS} statt \mathbf{F} bestimmt werden. Dieser Schritt ist im Vergleich zur Transformation des Spannungs- und des Stofftensors allerdings sehr aufwendig. Ein umständlicher, aber gangbarer Weg ist die Anwendung der Berechnungsvorschrift

$$\mathbf{F}^{ANS} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}^{ANS} \quad \text{mit} \quad \mathbf{R} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{U}^{-1} \quad \text{und} \quad \mathbf{U}^{ANS} = [2\mathbf{E}^{ANS} + \mathbf{G}]^{\frac{1}{2}} .$$

Diese Vorgehensweise wurde von EBERLEIN [1997], Abschnitt 6.3.1 vorgeschlagen und ist wie folgt begründet. Der Green-Lagrangesche Verzerrungstensor \mathbf{E} ist frei von Starrkörperbewegungen. Der modifizierte Tensor \mathbf{E}^{ANS} muß dann ebenfalls frei von Starrkörperbewegungen sein, d.h. es wird lediglich der Rechtsstrecktensor \mathbf{U}^{ANS}

modifiziert, während der Rotationstensor \mathbf{R} , der die Starrkörperbewegung beinhaltet, unverändert bleibt. Die grundlegenden Beziehungen wurden bereits in den Abschnitten 2.1.2 und 2.1.3 gegeben. Ein alternativer Weg, der auf der polaren Zerlegung in Kombination mit dem modifizierten Hencky Verzerrungstensor basiert, ist in DVORKIN, PANTUSO & REPETTO [1995] aufgezeigt.

Aufgrund des linearen Ansatzes $[1 \pm \zeta]/2$ in Dickenrichtung weist das ANS3D Element eine sogenannte Dickenversteifung auf (siehe HAUPTMANN [1997], Abschnitt 9.2.1). Die Beseitigung der Dickenversteifung ist Thema des folgenden Abschnitts. Bei Schalenelementen niedriger Ansatzordnung, wie dem ANS3D Element, tritt außerdem das Problem der Membranversteifung auf. Im Vergleich zu den anderen Versteifungseffekten (Querschub-, Dicken- und Volumenversteifung) ist die Membranversteifung jedoch zweitrangig und wird deshalb im folgenden nicht weiter berücksichtigt. Ein geeignetes Konzept zur Vermeidung der Membranversteifung wäre beispielsweise die Methode der erweiterten Verzerrungen.

7.2.2 Element ANS3Dq

Um die Dickenversteifung zu vermeiden, wird zur Verschiebungsapproximation die Ordnung der Ansatzfunktionen in Dickenrichtung erhöht (siehe GRUTTMANN [1996] und HAUPTMANN [1997], Abschnitt 9.3.2). Der momentane Dickenvektor wird hier als Einheitsnormale

$$\underline{d}_e^{hm}(\xi, \eta) = [\partial_\xi \underline{x}_e^{hm} \times \partial_\eta \underline{x}_e^{hm}] [| \partial_\xi \underline{x}_e^{hm} \times \partial_\eta \underline{x}_e^{hm} |]^{-1}$$

auf der Schalenmittelfläche

$$\underline{x}_e^{hm}(\xi, \eta) = \underline{x}_e^h(\xi, \eta, \zeta = 0)$$

der Momentankonfiguration (7.41) definiert. Das Verschiebungsfeld (7.41)₂ wird nun hierarchisch um einen quadratischen Term in Dickenrichtung erweitert:

$$\underline{u}_e^h(\underline{\xi}) = \frac{1}{2}[1 - \zeta] \underline{u}_e^{hu}(\xi, \eta) + \frac{1}{2}[1 + \zeta] \underline{u}_e^{ho}(\xi, \eta) + \frac{1}{2}[1 - \zeta^2] \Upsilon_e^{hm}(\xi, \eta) \underline{d}_e^{hm}(\xi, \eta)$$

$$\text{mit } \Upsilon_e^{hm}(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^4 N_k(\xi, \eta) \Upsilon_K^m .$$

Jedem Knoten K der Mittelfläche (Index m) ist außer den zwei mal drei Verschiebungsfreiheitsgraden \underline{u}_K^{mu} und \underline{u}_K^{mo} ein zusätzlicher siebter Freiheitsgrad Υ_K^m zugeordnet. Wegen der Einführung eines zusätzlichen Freiheitsgrades muß zwischen der Interpolation der Referenzgeometrie und der Interpolation des Verschiebungsfeldes unterschieden werden, d.h. es liegt keine Isoparametrie sondern Subparametrie vor. Dies hat allerdings keine weiteren Folgen. Für Hinweise zum Schrifttum und die ausführliche Diskussion der Schalthematik sei auf HAUPTMANN [1997] verwiesen.

Von weiterem Interesse ist die Durchführung der Integration. Auf die Herleitung der Linearisierung der schwachen Form in der Referenzkonfiguration wird hier verzichtet und auf GRUTTMANN [1996], Abschnitt 2.3 verwiesen. An die Stelle von (7.22)

tritt dann das Integrationsschema

$$\int_{\mathcal{B}_e^h} \underline{G}(\underline{u}_e^h) dV = \int_{\mathcal{B}_\square} \underline{G}(\underline{u}_e^h(\underline{\xi})) \det[\partial_{\underline{\xi}} \underline{X}_e^h(\underline{\xi})] d\underline{\square}$$

$$\approx \sum_{p=1}^P w_p^P \sum_{l=1}^L w_l^L \left[\underline{G}(\underline{u}_e^h(\underline{\xi})) \det[\partial_{\underline{\xi}} \underline{X}_e^h(\underline{\xi})] \right]_{\underline{\xi}=\underline{\xi}_l^L (\zeta=\zeta_p^P)}$$

$$\text{mit } \sum_{p=1}^P \sum_{l=1}^L w_p^P w_l^L = \int_{\mathcal{B}_\square} d\underline{\square} = 8 \quad , \quad \sum_{l=1}^L w_l^L = 4 \quad , \quad \sum_{p=1}^P w_p^P = 2 \quad .$$

Die Integration erfolgt über das Referenzgebiet. Bei der Bildung der Jacobischen Determinante muß die Referenzgeometrie zugrunde gelegt werden. Es wird explizit zwischen der Integration in der $\xi\eta$ -Schalenebene (Index l) mit

$$\underline{\xi}_l^4(\zeta) = \left[\pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \zeta \right]^T \quad \text{und } w_l^4 = 1 \quad \text{mit } l = 1, 2, 3, 4 \quad \text{und } L = 4 \quad (7.43)$$

und der Integration in Dickenrichtung (Index p) mit den Integrationspunkten ζ_p^P und den Wichtungsfaktoren w_p^P unterschieden. Die zugehörigen Werte für die verschiedenen Integrationsordnungen sind dem Standardschrifttum zu entnehmen (z.B. ZIENKIEWICZ & TAYLOR [1989], Table 8.1). Das so erhaltene Schalenelement wird mit ANS3Dq bezeichnet. In der $\xi\eta$ -Ebene mit bilinearer Verschiebungsinterpolation entspricht die Lage der Integrationspunkte in (7.43) der Lage der bereits in (7.23) angegebenen Integrationspunkte. Aufgrund der quadratischen Verschiebungsinterpolation in Dickenrichtung ist in dieser Richtung eine höhere numerische Integrationsordnung erforderlich als in der Schalenebene. Zudem kann bekanntermaßen bei plastischem Stoffverhalten die Spannungsverteilung in der Schale nur ausreichend genau beschrieben werden, wenn in Dickenrichtung, wo große Spannungsgradienten vorliegen können, eine höhere Zahl (z.B. $P \geq 5$) an Integrationspunkten gewählt wird. Bei Volumenelementen, die vorwiegend in dreidimensionalen Kontinuap Problemen ohne geometrisch ausgezeichnete Richtungen eingesetzt werden, ist die Erhöhung der Integrationsordnung nicht sinnvoll, da in einem Element in keiner Richtung derartige Spannungsgradienten zu erwarten sind. Eine höhere Genauigkeit wird bei Volumenelementen dann wesentlich sinnvoller durch Verfeinerung der Diskretisierung (bzw. durch Erhöhung der Ansatzordnung) erzielt.

7.2.3 Element ANS3Dq/d4v1

Bei fast inkompressiblem Stoffverhalten tritt das Problem der volumetrischen Versteifung auf. Dieser Versteifungseffekt soll nun im folgenden mit Hilfe der selektiv reduzierten Integration vermindert werden.

Bei isochor-volumetrisch entkoppeltem Stoffverhalten ergeben sich für den materiellen Spannungstensor \mathbf{S} und den materiellen Stofftensor \mathfrak{C} die Aufspaltungen in einen deviatorischen und einen volumetrischen Anteil. Die Terme in der linearisierten

Gleichung der schwachen Form des Gleichgewichtes, die entweder \mathbf{S} oder \mathcal{C} enthalten, können also in einen deviatorischen und einen volumetrischen Anteil aufgespalten werden. Die deviatorischen Anteile werden in der Schalenebene unverändert an den Integrationspunkten (7.43) ausgewertet. Die selektiv reduzierte Integration der volumetrischen Anteile erfolgt analog zum Q1/d8v1 Element aus Abschnitt 7.1.3 mittels der Einpunktintegration

$$\underline{\xi}_1^1(\zeta) = [0, 0, \zeta]^T \quad \text{und} \quad w_1^1 = 4 \quad \text{mit} \quad L = 1$$

in der $\xi\eta$ -Schalenebene. Diese Vorgehensweise kann durch

$$\int_{\mathcal{B}_\square} [(\dots)^{\text{dev}} + (\dots)^{\text{vol}}] d\Omega \approx \sum_{p=1}^P w_p^P \left\{ \sum_{l=1}^4 w_l^4 [(\dots)^{\text{dev}}]_{\underline{\xi}=\underline{\xi}_l^4(\zeta=\zeta_p^P)} + w_1^1 [(\dots)^{\text{vol}}]_{\underline{\xi}=\underline{\xi}_1^1(\zeta=\zeta_p^P)} \right\}$$

symbolisch beschrieben werden. Die Dickenintegration (Index p) ist für die deviatorischen und volumetrischen Anteile identisch. Das so erhaltene Element wird mit ANS3Dq/d4v1 abgekürzt. Eine Einpunktintegration der volumetrischen Anteile über die Dicke scheint nicht sinnvoll zu sein. Zum einen ist die Ansatzordnung in Dickenrichtung erhöht und zum anderen sollen die fast inkompressiblen plastischen Zonen im Randbereich der Schale erfaßt werden können.

Die programmtechnische Umsetzung des ANS3Dq/d4v1 Elementes ist sehr einfach, da bei unveränderter Grundstruktur des Elementes lediglich P zusätzliche Integrationspunkte in Dickenrichtung eingeführt werden müssen. An den insgesamt $P \times (4 + 1)$ Integrationspunkten werden dann wahlweise die deviatorischen oder die volumetrischen Anteile des Spannungstensors und des Stofftensors eingesetzt. Die Implementierung der zusätzlichen Integrationspunkte erfolgt analog zum Q1/d8v1 Element in Abschnitt 7.1.3.

Wie in Abschnitt 7.1.7 ausgeführt wurde, können die Elemente Q1/d8v1 und $\overline{\mathbf{F}}_{\text{Mor}}$ in der praktischen Anwendung als äquivalent angesehen werden. Die Durchführung der selektiv reduzierten Integration der volumetrischen Anteile im ANS3Dq/d4v1 Element entspricht im übertragenen Sinn der Verwendung des modifizierten Deformationsgradienten $\overline{\mathbf{F}}_{\text{Mor}}$ in der Schalenebene.

Analog zum Q1/d8v1- ϑ Element aus Abschnitt 7.1.4 kann auch ein ANS3Dq/d4v1- ϑ Element entwickelt werden. Da die numerischen Beispiele 8.4 und 8.5 diesen Schritt nicht erfordern, wird an dieser Stelle nicht näher auf die Einführung eines volumetrischen Wichtungsfaktors ϑ eingegangen. Allerdings ist nicht ausgeschlossen, daß stark druckbelastete Schalenstrukturen bei großen Deformationen dies erforderlich machen, wengleich der Fall sehr viel seltener auftritt als bei dreidimensionalen Kontinua.

Kapitel 8

Numerische Beispiele

In Kapitel 7 wurden als Hauptvorteile der selektiv reduzierten Integration die einfache Implementierung und der geringe numerische Mehraufwand genannt. Anhand der numerischen Beispiele dieses Kapitels werden die mit der selektiv reduzierten Integration erzielten Ergebnisse diskutiert. Dabei ist isochor-volumetrisch entkoppeltes Stoffverhalten vorausgesetzt und große Deformationen sind zugelassen. Zunächst werden die Volumenprobleme behandelt (siehe auch DOLL, HAUPTMANN, SCHWEIZERHOF & FREISCHLÄGER [1998]). Am Beispiel **Stauchung eines Quaders** werden für den elastoplastischen Fall die grundlegenden Ergebnisse der Methode besprochen. Das Beispiel **Einschnürung eines runden Zugstabes** dient in einer groben Diskretisierung der Diskussion des viskoplastischen Falls und in einer feinen Diskretisierung der Vermeidung entstehender Kinematiken. Das Beispiel **Dehnung eines Latex Streifens** unterscheidet sich von den beiden oben genannten Beispielen dadurch, daß in Ergänzung zum vollkommen inkompressiblen plastischen Stoffverhalten zusätzlich der elastische Anteil als fast inkompressibel angenommen wird. Um auch Biegeprobleme zu untersuchen, die mit den hier verwendeten Volumenelementen aufgrund von Biegeversteifung nur schlecht beschreibbar sind, werden dann typische Schalenprobleme wie **Biegung einer dünnen quadratischen Platte** und **Beidseitig gedrückter Zylinder** behandelt (siehe auch HAUPTMANN, SCHWEIZERHOF & DOLL [1998]). Soweit nicht anders vermerkt, wird in allen Beispielberechnungen eine quadratische Konvergenzrate in der globalen Newton-Raphson Iteration (siehe Tafel 7.1) erzielt.

8.1 Stauchung eines Quaders

In den Veröffentlichungen von VAN DEN BOGERT, DE BORST, LUITEN & ZEILMAKER [1991] und LIU, HOFSTETTER & MANG [1992,1994] wird die Stauchung eines Quaders für den rein elastischen Fall untersucht. Anhand dieses Beispiels soll das selektiv reduziert integrierte Q1/d8v1 Element für den elastoplastischen Fall untersucht werden. Vergleichslösungen werden für das Q1, $\overline{\mathbf{F}}_{\text{Mor}}$ und Q1/P0 Element angegeben.

Der in dieser Arbeit betrachtete Quader besitzt die Abmessungen $10 \times 10 \times 10$ mm. Das isochor-volumetrisch entkoppelte Stoffverhalten wird durch die Energiefunktion (5.35) mit dem elastischen Anteil W^e aus (4.42) und dem plastischen Anteil W^p aus (5.11) sowie der Fließbedingung (5.22) vorgegeben. Die zugehörigen Stoffkonstanten sind in Tafel 8.1 gegeben. Das isotrope plastische Verfestigungsgesetz ist linear.

Konstante	μ	K	τ_0	H
Wert	80.1938*	164.21*	0.45*	0.1*

Tafel 8.1: Stoffkonstanten für den gestauchten Quader (* \equiv N/mm²).

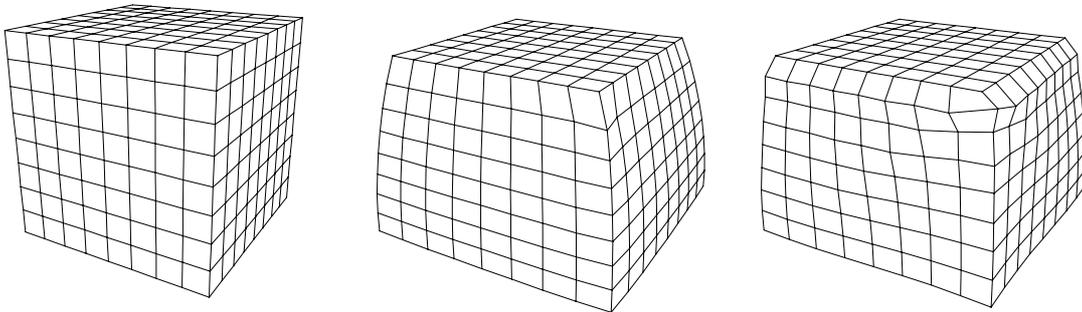


Bild 8.1: Gestauchter Quader, $8 \times 8 \times 8$ Diskretisierung. (links) Achtel des anfangs unverformten Quaders. (Mitte) Achtel des verformten Quaders bei 20% Stauchung, Q1 Element. (rechts) Achtel des verformten Quaders bei 20% Stauchung, Q1/d8v1 Element.

Die Berechnungen werden mit jeweils gleichmäßigen Diskretisierungen durchgeführt. Dabei wird unter Ausnutzung der Symmetrie ein Achtel des Quaders, wie in Bild 8.1(links) dargestellt, mit $n \times n \times n$ Volumenelementen vernetzt. Die Stauchung wird durch eine konstante vertikale Verschiebung der Quaderoberseite aufgebracht. Dort werden die horizontalen Verschiebungen festgehalten. In den Symmetrieebenen sind die Verschiebungen in Normalenrichtung festgehalten und die tangentialen Verschiebungen sind frei. Die vertikale Endstauchung von 20% wird in 10 Verschiebungsincrementen je 2% aufgebracht. Wie aus Bild 8.2 ersichtlich ist, sind die mit dem Q1 Element erhaltenen Lastkurven für alle betrachteten Diskretisierungen deutlich oberhalb der Lastkurven des Q1/d8v1 Elementes. Das heißt, wie erwartet verhält sich das vollständig integrierte Element steifer als das selektiv reduziert integrierte Element. Die Verfeinerung des Netzes von $n = 4$ auf 8 oder 16 führt für das Q1 Element zwar zu niedriger verlaufenden Lastkurven, aber es liegt keine auskonvergierte Lösung vor. Für das Q1/d8v1 Element führt die Verfeinerung des Netzes von $n = 4$ auf 8 zu fast identischen Lastkurven und somit zu einer nahezu auskonvergierten Lösung, d.h. bereits relativ grobe Netze liefern in Kombination mit dem Q1/d8v1 Element schon sehr gute Lösungen.

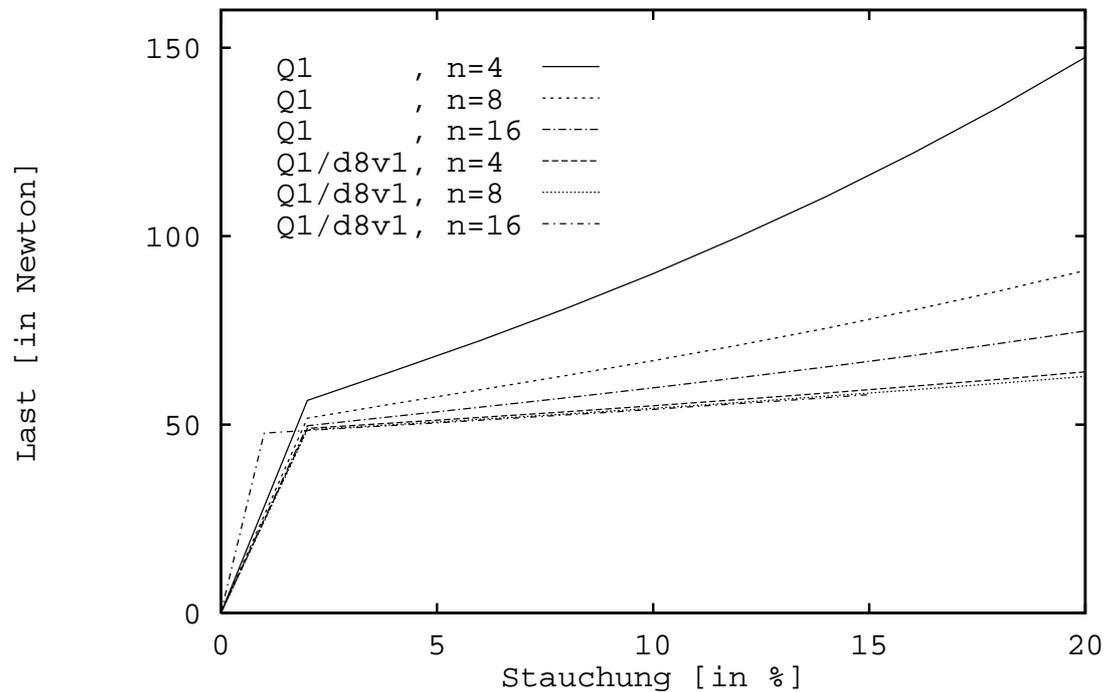


Bild 8.2: Gestauchter Quader. Vertikale Gesamtlast an der Quaderoberseite aufgetragen über der vertikalen Stauchung erhalten mit dem Q1 Element und dem Q1/d8v1 Element für unterschiedliche Diskretisierungen.

Für die Diskretisierung $n = 16$ konvergiert das Q1/d8v1 Element in der globalen Newton-Raphson Iteration nicht. Das Q1/d8v1 Element scheint damit auf Netzverfeinerungen sensitiver zu reagieren als das Q1 Element. Diese Feststellung kann wie folgt veranschaulicht werden. Bei Verfeinerung der Diskretisierung nimmt die konstante Größe der Verschiebungsinckremente von 2% relativ zur charakteristischen Länge eines Einzelementes zu. Bei Verwendung des Q1/d8v1 Elementes mit verminderter volumetrischer Versteifung sind im Vergleich zum versteifenden Q1 Element größere Verformungen im Einzelement möglich. Dadurch kann die Konvergenzrate verschlechtert werden. Die Verkleinerung der Verschiebungsinckremente auf 1% hat bei Verwendung des Q1/d8v1 Elementes und des feinen Netzes mit $n = 16$ eine konvergente Lösung im Anfangsbereich bis 15% Stauchung zur Folge. Die erhaltene Lastkurve ist nahezu identisch mit den Kurven für die Diskretisierungen $n = 4, 8$ mit dem Q1/d8v1 Element. Die größere Steigung der Kurve im ersten Lastschritt und der Knick bei 1% ist für den Vergleich der Kurven ohne Relevanz. Für beide Schrittweiten von 1% und 2% liegt der erste Schritt bereits im plastischen Bereich, d.h. der Knick in der Lastkurve ist lediglich eine Folge der geänderten Schrittweite und gibt nicht die elastoplastische Grenze an. Bei einer Stauchung von 15% wird trotz kleinerem Inkrement keine konvergente Lösung erhalten. Der Grund hierfür liegt im Verlust

der Konvexität der Elementgeometrie des verformten Eckelementes. Zur Veranschaulichung des Verformungsverhaltens des Eckelementes kann Bild 8.1(rechts) dienen, welches jedoch der groberen Diskretisierung mit $n = 8$ zugeordnet ist. Wird die Stauchung erhöht, so beginnt die anfangs vertikale Kante des Eckelementes sich nach oben zu drehen. Sobald diese Kante die horizontale Lage überschreitet, ist das Eckelement nicht mehr konvex und es ist keine eindeutige Lösung mehr möglich. Im betrachteten Bereich bis 20% Stauchung tritt dieser Effekt in Kombination mit dem Q1 Element nicht auf. Wie aus Bild 8.1(Mitte) ersichtlich ist, werden durch die volumetrische Versteifung derart große Deformationen des Eckelementes verhindert. Das Q1/d8v1 Element hingegen erlaubt derart große Verformungen bereits für relativ grobe Netze. Die Konvexität der Elemente kann beispielsweise durch Kontaktrandbedingungen erzwungen werden. Die Stauchung erfolgt dann durch die vertikale Verschiebung einer starren Kontaktfläche, mit der außer den Knoten der Quaderoberseite auch die Knoten der Quaderseitenflächen in Kontakt treten können.

Alternative Berechnungen mit dem $\overline{\mathbf{F}}_{\text{Mor}}$ Element führen im Rahmen der Genauigkeitsanforderungen auf identische Ergebnisse, wie sie mit dem Q1/d8v1 Element erzielt werden. Diese Feststellung untermauert die bereits in Abschnitt 7.1.7 theoretisch begründete praktische Äquivalenz beider Elementformulierungen für den isochorvolumetrisch entkoppelten Sonderfall. Weitere Berechnungen mit dem Q1/P0 Element, welches identisch zum $\overline{\mathbf{F}}_{\text{Nag}}$ Element ist, liefern im Vergleich zum Q1/d8v1 Element fast dieselben Ergebnisse (siehe auch LIU, HOFSTETTER & MANG [1992,1994] für den elastischen Fall). Die berechneten Lastkurven sind im Rahmen der zeichnerischen Genauigkeit nicht von den in Bild 8.2 dargestellten Kurven zu unterscheiden und deshalb nicht eingezeichnet.

Vergleicht man die Bilder 8.1(Mitte) und 8.1(rechts) genauer, so scheint im Netz des Q1/d8v1 Elementes im Vergleich zum Netz des Q1 Elementes eine geringe Kinetik (hour-glassing) sichtbar zu sein. Auf dieses Phänomen wird in Beispiel 8.2.2 ausführlich eingegangen.

Wie bereits erwähnt, wird die selektiv reduzierte Integration von LIU, HOFSTETTER & MANG [1992,1994] für fast inkompressible elastische Werkstoffe mit $K/\mu \gg 1$ verwendet, d.h. für Fälle mit großem Kompressionsmodul im Vergleich zum Schubmodul. Die in Tafel 8.1 aufgelisteten Stoffkonstanten führen aber auf ein Verhältnis $K/\mu \approx 2$, welches nicht als groß bezeichnet werden kann. Für die angegebenen Konstanten kann das elastische Stoffverhalten also nicht als fast inkompressibel angesehen werden. Die in diesem Beispiel auftretende volumetrische Versteifung hat ihre Ursachen im plastischen Deformationsanteil, der deviatorisch und somit vollkommen inkompressibel ist. Der plastische Deformationsanteil verringert die „Schub“-Steifigkeit des Werkstoffes. Im eindimensionalen linear elastischen Fall ist der Schubmodul $\mu = \tau/\gamma$ als Verhältnis zwischen Schubspannung τ und Gleitwinkel γ definiert. Im elastoplastischen Fall, hier mit additiver Aufspaltung der Gleitwinkel, kann diese Formel als $\mu^* = \Delta\tau/(\Delta\gamma^e + \Delta\gamma^p)$ geschrieben werden. Hierin kann μ^* als „lokaler elastoplastischer“ Schubmodul aufgefaßt werden. Sobald plastisches Fließen auftritt, hat normalerweise ein kleiner Spannungszuwachs $\Delta\tau$ eine große Zunahme des plastischen Gleitwinkels $\Delta\gamma^p$ zu Folge, d.h. der Modul μ^* wird klein. Verwendet man nun

das Verhältnis K/μ^* als Maß für die Inkompressibilität, so wird offensichtlich, daß K/μ^* groß werden kann, obwohl K/μ klein ist. Dabei ist zu beachten, daß bei deviatorischem plastischem Fließen der kompressible Deformationsanteil rein elastisch ist und somit der Kompressionsmodul K vom plastischen Fließen nicht beeinflusst wird.

8.2 Einschnürung eines runden Zugstabes

Dieses Beispiel ist unter anderen den Veröffentlichungen von SIMO [1988b], MÜLLER-HOEPPE [1990], SIMO & ARMERO [1992], SIMO [1992], SCHELLEKENS & PARISCH [1994b], MIEHE [1996] und DE SOUZA NETO, PERIĆ, DUTKO & OWEN [1996] entnommen. Die spezielle Geometrie des hier betrachteten runden Stabes ist wie folgt gewählt: Gesamtlänge 53.334 mm, Radius 6.413 mm an den Stabenden und Radius 6.105 mm in der Stabmitte. Der Radius wird ausgehend von den Stabenden linear entlang der Stabachse verringert und erreicht schließlich in der Stabmitte den minimalen Wert. Diese geometrische Abweichung vom perfekt gleichförmigen Stab ruft plastisches Fließen erstmals in der Stabmitte hervor und vermeidet einen anfangs homogenen Spannungszustand. Damit wird das Verzweigungsproblem des homogenen Falls umgangen. Problemstellungen, bei denen die Einschnürung eines Stabes nicht durch eine geometrische Imperfektion sondern durch die thermomechanische Kopplung hervorgerufen wird, sind beispielsweise in WRIGGERS, MIEHE, KLEIBER & SIMO [1992], SIMO & MIEHE [1992], SIMO, ARMERO & TAYLOR [1993], MIEHE [1993], MIEHE [1995] behandelt. In der vorliegenden Arbeit erfolgt jedoch die Beschränkung auf den isothermen Fall mit imperfektem Stab.

Konstante	μ	K	τ_0	H	τ_∞	δ
Wert	80.1938*	164.21*	0.45*	0.12924*	0.715*	16.93

Tafel 8.2: Stoffkonstanten für den eingeschnürten Zugstab (* \equiv N/mm²).

Das Werkstoffverhalten wird durch die Energiefunktion (5.35) mit dem elastischen Anteil W^e aus (4.42) und dem plastischen Anteil W^p aus (5.13) beschrieben. Als Fließbedingung wird (5.22) und als Penalty Funktion wird (6.12) vorgegeben. Die gewählten Stoffkonstanten können der Tafel 8.2 entnommen werden. Die Viskosität η , für die kein Wert in Tafel 8.2 angegeben ist, wird im folgenden Abschnitt 8.2.1 noch ausführlich diskutiert.

Die nachfolgenden Berechnungen werden mit zwei verschiedenen Netzen durchgeführt. Aufgrund der Symmetrie genügt die Diskretisierung eines Achtels des Stabes. Zuerst wird eine grobe Diskretisierung mit 120 Volumenelementen verwendet. Damit wird der elastoviskoplastische Fall mit variabler Viskosität η gerechnet. Anschließend wird ein feines Netz bestehend aus 960 Volumenelementen benutzt, welches identisch mit dem von SIMO & ARMERO [1992] verwendeten Netz ist. Damit werden die von den genannten Autoren festgestellten Kinematiken für den elastoplastischen Grenzfall untersucht.

8.2.1 Zugstab mit grober Diskretisierung (120 Elemente)

Das verwendete Netz besteht aus 12 Volumenelementen im Stabquerschnitt und 10 Volumenelementen in Stablängsrichtung. Die Diskretisierung ist in Bild 8.3(links) dargestellt. Die Zugbelastung wird durch gleichförmige axiale Verschiebungen w der Stabenden aufgebracht. Dort sind die Verschiebungen in Stabquerrichtung frei. Die Verschiebung w ist identisch mit dem Längenzuwachs des halben Stabes. Ausgehend vom Zeitpunkt $t = 0$ s bis zum Zeitpunkt $t = 0.7$ s wird die axiale Verschiebung $w = \dot{w}t$ innerhalb 70 äquidistanter Zeitschritte $\Delta t = 0.01$ s mit einer konstanten Geschwindigkeit $\dot{w} = 10$ mm/s aufgebracht. Für $t > 0.7$ s wird die axiale Verschiebung bei $w = 7$ mm festgehalten, so daß die viskosen Spannungen durch Relaxation abgebaut werden können. Die Zeitschrittweite $\Delta t = 0.01$ s bleibt dabei ungeändert. Massenträgheitseffekte werden vernachlässigt.

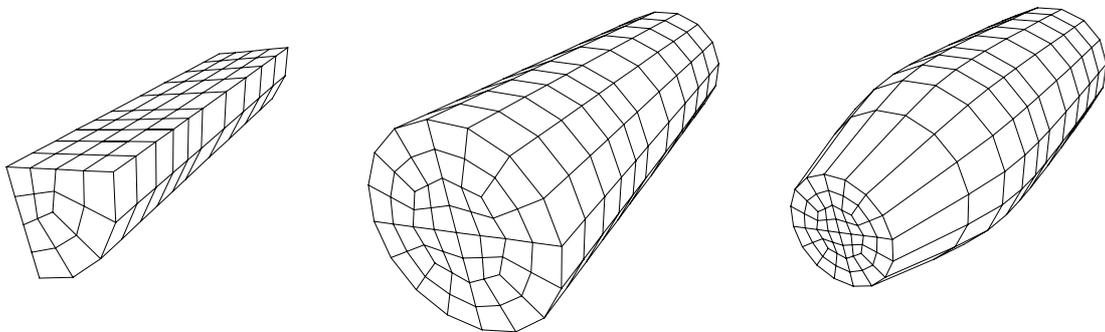


Bild 8.3: Eingeschnürter Zugstab, grobe Diskretisierung. (links) Achtel des anfangs unverformten Stabes. (Mitte) Hälfte des verformten Stabes bei $t = 0.7$ s, Q1 Element, $\eta = 10^{-8}$. (rechts) Hälfte des verformten Stabes bei $t = 0.7$ s, Q1/d8v1 Element, $\eta = 10^{-8}$.

Ziel dieser Untersuchung ist es, die mit dem Q1 und dem Q1/d8v1 Element in Kombination mit viskoplastischem Stoffverhalten erzielten Ergebnisse zu vergleichen. Von vordergründigem Interesse ist hierbei der Einfluß der Viskosität auf die Numerik der untersuchten Elemente und weniger die physikalische Sinnhaftigkeit der gewählten Viskositäten. Für die der Viskosität η zugeordneten Werte wird hier und im folgenden immer die Einheit Ns/mm^2 zugrunde gelegt. In den Bildern 8.4 und 8.5 sind die Last-Zeit-Kurven gegeben. Die Last berechnet sich als Summe aller in einem Stabquerschnitt wirkenden axialen Kräfte. Die mit dem Q1 Element berechneten Lastkurven sind in Bild 8.4 dargestellt. Die unterste Kurve, die der Viskosität $\eta = 10^{-8}$ zugeordnet ist, kann als Grenzkurve der zeitunabhängigen Plastizität angesehen werden. Alle anderen Lastkurven für Viskositäten $\eta > 10^{-8}$ liegen oberhalb dieser Grenzkurve, weil mit anwachsender Viskosität die viskose Überspannung zunimmt und deshalb die Last größer wird. Für relativ große Werte $\eta = 10^{-1}$ oder $\eta = 10^{-2}$ wird die Relaxation der Last bzw. der Überspannung für $t > 0.7$ s deutlich sichtbar. Es fällt auf, daß für alle betrachteten Viskositäten die relaxierten Lasten fast identisch sind. Die Kurven für $\eta = 10^{-3} \dots 10^{-8}$ sind im Rahmen der zeichneri-

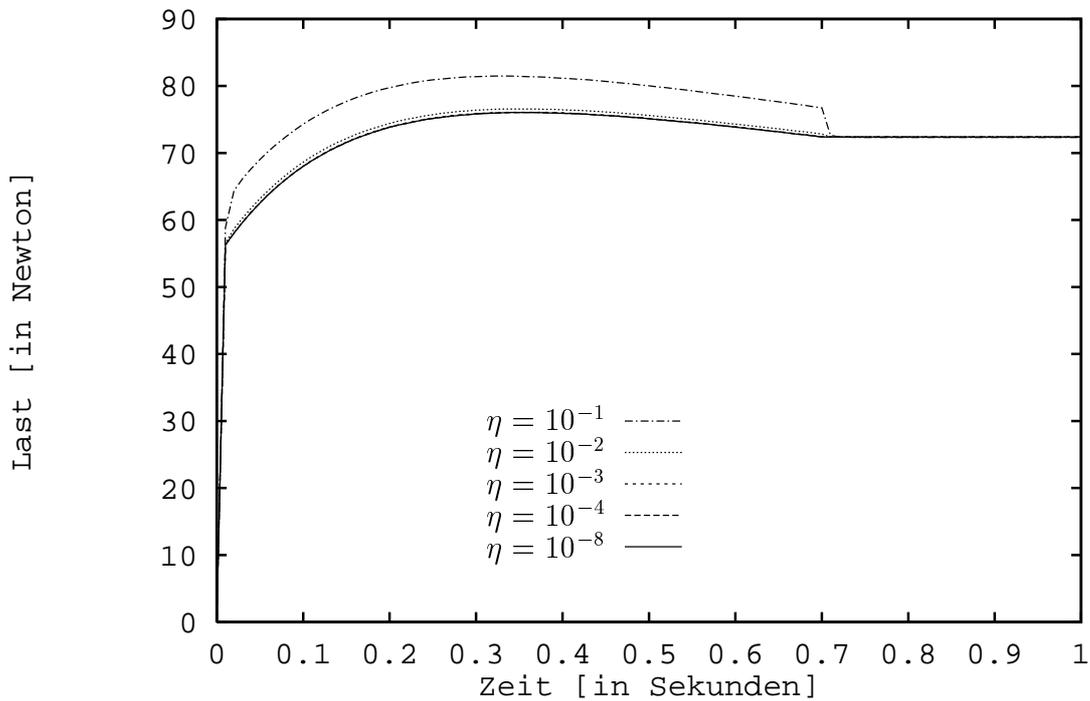


Bild 8.4: Eingeschnürter Zugstab, grobe Diskretisierung, Q1 Element. Axiale Last aufgetragen über der Zeit für verschiedene Viskositäten η .

schen Genauigkeit nicht unterscheidbar, d.h. der plastische Grenzfall ist bereits für moderate Werte der Viskosität erreicht. Wie aus den Lastkurven in Bild 8.4 und dem verformten Netz in Bild 8.3(Mitte) ersichtlich ist, verhält sich das Q1 Element so steif, daß keine Einschnürung eintritt. Eine Einschnürung des Zugstabes würde in der Lastkurve zu einem steilen Abfall führen, nachdem das Maximum überschritten ist. In Bild 8.5 sind die mit dem Q1/d8v1 Element erhalten Lastkurven dargestellt. Es sei angemerkt, daß die Lastkurve des zeitunabhängigen plastischen Grenzfalls mit $\eta = 10^{-8}$ gut mit dem in SIMO & ARMERO [1992] dargestellten Resultat übereinstimmt. Wie aus den Lastkurven in Bild 8.5 und dem verformten Netz in Bild 8.3(rechts) ersichtlich ist, ermöglicht die selektiv reduzierte Integration im Gegensatz zur vollständigen Integration die Einschnürung des Zugstabes. Nach Beseitigung der volumetrischen Versteifung verhält sich das Q1/d8v1 Element viel weicher als das Q1 Element. Der Vergleich der Kurven in den Bildern 8.4 und 8.5 zeigt, daß die viskosen Effekte bei Verwendung des Q1/d8v1 Elementes wesentlich ausgeprägter sind als bei Verwendung des Q1 Elementes. Zum einen unterscheiden sich die Kurven für verschiedene Viskositäten deutlicher. Zum anderen ist die Relaxation der viskosen Überspannung für $t > 0.7$ s höher und die relaxierten Lasten nehmen aufgrund der Einschnürung unterschiedliche Werte an. Beispielsweise liegt die Kurve für $\eta = 10^{-2}$ in Bild 8.4 wesentlich dichter an der plastischen Grenzkurve als die entsprechende

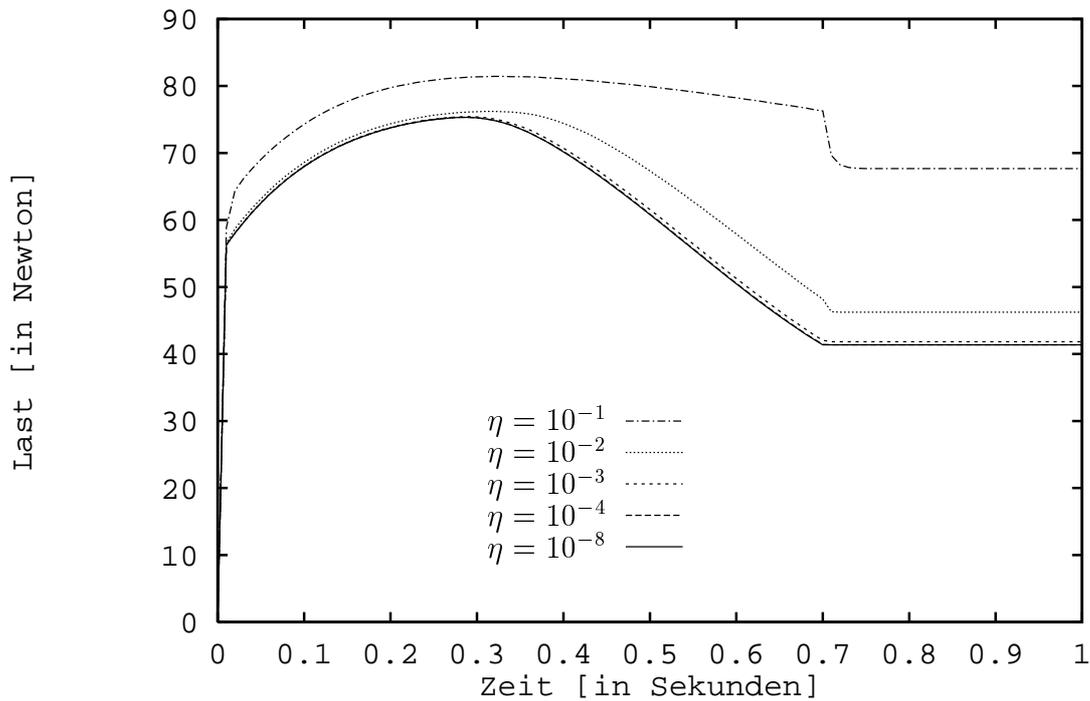


Bild 8.5: Eingeschnürter Zugstab, grobe Diskretisierung, Q1/d8v1 Element. Axiale Last aufgetragen über der Zeit für verschiedene Viskositäten η .

Kurve in Bild 8.5. Die Kurve für $\eta = 10^{-3}$ in Bild 8.4 liegt bereits auf der plastischen Grenzkurve, wohingegen die entsprechende Kurve in Bild 8.5 noch von der plastischen Grenzkurve unterscheidbar ist. Abschließend sei angemerkt, daß die Verwendung des groben Netzes mit 120 Elementen in Kombination mit dem Q1/d8v1 Element noch zu keinen nennenswerten Kinematiken führt (siehe beispielsweise Bild 8.3(rechts) für den plastischen Grenzfall).

8.2.2 Zugstab mit feiner Diskretisierung (960 Elemente)

Das in Bild 8.6(links) dargestellte Netz besteht aus 48 Elementen im Stabquerschnitt und 20 Elementen in axialer Richtung. Um die Einschnürung in der Stabmitte korrekt erfassen zu können, wurde dort die Netzdichte erhöht. Das feine Netz dient der Untersuchung des ratenunabhängigen plastischen Grenzfalls. Die Viskosität $\eta = 10^{-6}$ ist im Vergleich zur verwendeten Zeitschrittweite sehr klein gewählt, so daß der Beitrag des viskosen Anteils auf das Endergebnis vernachlässigbar klein ist. Die Zugbelastung

wird durch gleichförmige axiale Verschiebungen w der Stabenden wie folgt aufgebracht: 5 äquidistante Inkremente $\Delta w = 0.56$ mm bis $w = 2.8$ mm, 15 äquidistante Inkremente $\Delta w = 0.08$ mm bis $w = 4$ mm und schließlich 10 äquidistante Inkremente $\Delta w = 0.3$ mm bis $w = 7$ mm.

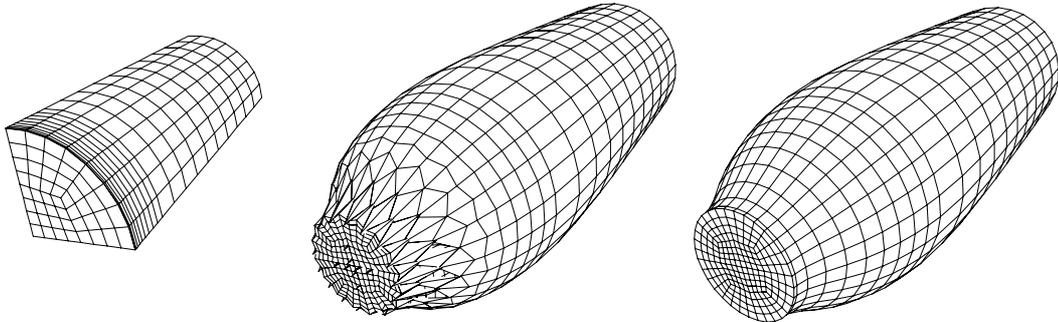


Bild 8.6: Eingeschnürter Zugstab, feine Diskretisierung. (links) Achtel des anfangs unverformten Stabes. (Mitte) Hälfte des verformten Stabes bei $w = 7$ mm, Q1/d8v1 Element. (rechts) Hälfte des verformten Stabes bei $w = 7$ mm, Q1/d8v1-0.99 Element.

Wie sich bei der Verwendung der groben Diskretisierung in Abschnitt 8.2.1 gezeigt hat, gelingt es mit dem voll integrierten Q1 Element nicht, die Einschnürung des Zugstabes korrekt zu erfassen. Deshalb wird für die Berechnungen mit der feinen Diskretisierung das selektiv reduziert integrierte Q1/d8v1 Element benutzt. In Bild 8.7 sind die Lastkurven gegeben. Die Last berechnet sich als Summe aller in einem Stabquerschnitt wirkenden axialen Kräfte. Die Längenänderung des halben Stabes ist durch die Verschiebung w der Stabenden gegeben. Das Q1/d8v1 Element liefert die niedrigste Lastkurve. Diese Kurve ist nahezu identisch mit der Kurve, die von SIMO & ARMERO [1992] mit dem Q1/P0 Element erhalten wurde. Wie bereits erwähnt, führt das $\overline{\mathbf{F}}_{\text{Mor}}$ Element zu identischen Ergebnissen wie das Q1/d8v1 Element und das $\overline{\mathbf{F}}_{\text{Nag}}$ Element führt zu identischen Ergebnissen wie das Q1/P0 Element. Alle diese Elemente besitzen die gemeinsame Eigenschaft, daß die volumetrischen Anteile im Element als konstant angenommen werden. Wie in Bild 8.6(Mitte) zu sehen ist, führt das Q1/d8v1 Element zu starker Kinematik (unphysikalische Null-Energie-Moden), wie sie bereits vom Q1/P0 Element bekannt ist (siehe SIMO & ARMERO [1992]). Der Grund dafür liegt in einem Rangabfall der Steifigkeitsmatrix, der durch die vereinfachende Annahme konstanter volumetrischer Anteile im Element verursacht wird. Dieser Rangabfall kann als Folge der Verletzung der Babuška-Brezzi-Bedingung angesehen werden. Ausgehend vom Rand des Berechnungsgebietes, wo die Elementkanten festgehalten sind (z.B. in der Symmetrieebene in der Stabmitte), ist ein feines Netz erforderlich, damit Kinematiken entstehen können. Die Verwendung der Q1/P0 Implementierung führt bis zu einer Verschiebung von $w = 5.8$ mm auf eine nahezu identische Lastkurve wie das Q1/d8v1 Element. Die Kurve ist aus Gründen der Übersichtlichkeit in Bild 8.7 jedoch nicht dargestellt. Für größere Verschiebungen treten

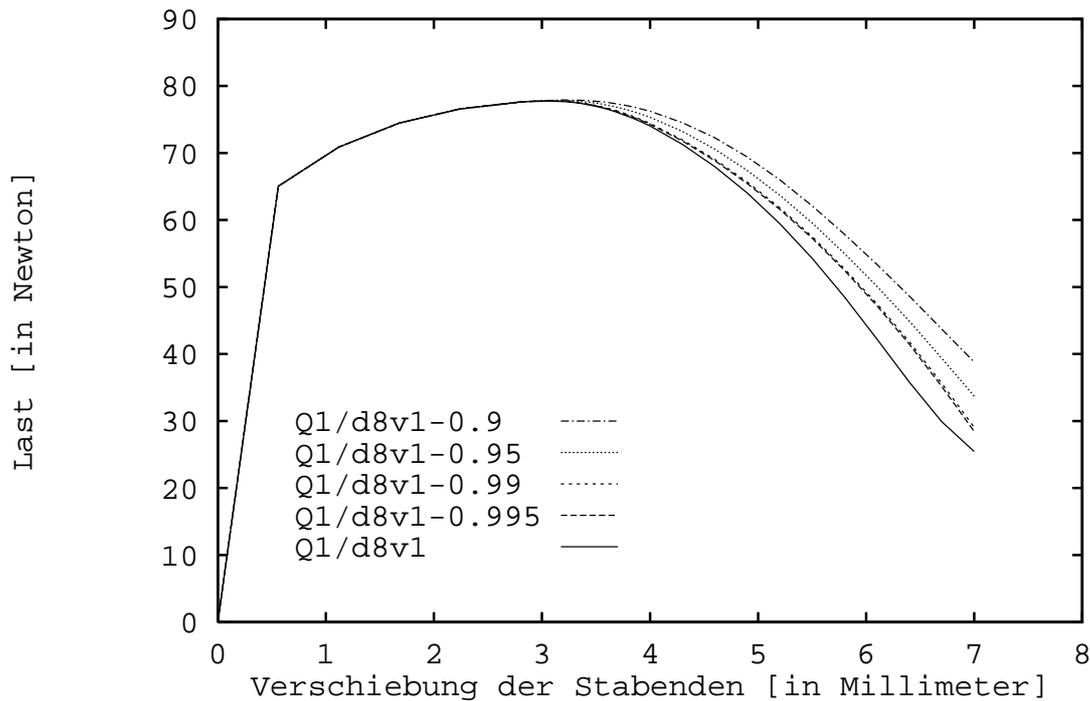


Bild 8.7: Eingeschnürter Zugstab, feine Diskretisierung, $Q1/d8v1-\vartheta$ Element. Axiale Last aufgetragen über der axialen Verschiebung der Stabenden für unterschiedliche volumetrische Wichtungsfaktoren ϑ .

schwerwiegende Kinematiken auf, so daß die Endverschiebung von $w = 7\text{ mm}$ mit den verwendeten Verschiebungsinkrementen nicht erreicht werden kann.

Vermeidung von Kinematiken durch gemischte Integration: Die Aufgabenstellung besteht nun darin, die auftretenden Kinematiken zu vermeiden. Es ist bekannt, daß das $Q1$ Element zu starker volumetrischer Versteifung führt, aber keine Kinematiken zeigt. Das selektiv reduziert integrierte $Q1/d8v1$ Element vermindert zwar die volumetrische Versteifung, ist aber nicht frei von Kinematiken. Die Absicht ist es, durch Kombination des $Q1$ Elementes mit dem $Q1/d8v1$ Element die Vorteile beider Formulierungen miteinander zu vereinen. Deshalb wird das in Abschnitt 7.1.4 eingeführte gemischt integrierte $Q1/d8v1-\vartheta$ Element verwendet. Der Anteil $(1-\vartheta)$ des volumetrischen Anteils, der vollständig integriert wird, kann dabei als Stabilisierung angesehen werden, die den Rang der Steifigkeitsmatrix erhält.

In Bild 8.7 sind die Lastkurven eingezeichnet, die mit dem gemischt integrierten $Q1/d8v1-\vartheta$ Element für die volumetrischen Wichtungsfaktoren $\vartheta = 0.995, 0.99, 0.95, 0.9$ erhalten werden. Die Verringerung des volumetrischen Wichtungsfaktors führt zur Zunahme der Elementsteifigkeit, was an der Erhöhung der Last erkennbar ist. Umgekehrt führt die Erhöhung des volumetrischen Wichtungsfaktors

zur Abnahme der Elementsteifigkeit. Für alle in Bild 8.7 verwendeten ϑ -Werte sind keine Kinematiken zu erkennen, d.h. die Stabilisierung erhält den Rang der Steifigkeitsmatrix. Im speziellen scheint der Wert $\vartheta = 0.99$ gute Ergebnisse zu liefern. Wie in den Bildern 8.6(rechts) und 8.7 zu erkennen ist, werden die Kinematiken vermieden, ohne daß die Lastkurve zu sehr versteift. Die Verwendung des Q1/d8v1-0.99 Elementes anstelle des Q1/d8v1 Elementes ist vom erzielten Ergebnis phänomenologisch vergleichbar mit der Verwendung des Q1/E4 Elementes anstelle des Q1/P0 Elementes in SIMO & ARMERO [1992]. Es sei jedoch darauf hingewiesen, daß das Q1/d8v1- ϑ Element und das EAS Element auf grundlegend verschiedenen Konzepten basieren. Außerdem sei angemerkt, daß die EAS Elemente im allgemeinen nicht frei von Kinematiken sind (siehe beispielsweise WRIGGERS & REESE [1996] für den zweidimensionalen Fall).

Wie im vorangehenden Absatz beschrieben ist, scheint die Verwendung des Q1/d8v1- ϑ Elementes eine einfache und effektive Strategie zu sein, um die volumetrische Versteifung zu reduzieren und den vollen Rang der Steifigkeitsmatrix zu erhalten. Zur signifikanten Verringerung der volumetrischen Versteifung sollte der volumetrische Wichtungsfaktor nahe eins gewählt werden, z.B. $\vartheta = 0.99$ oder $\vartheta = 0.995$. Wird für das vorliegende Beispiel des eingeschnürten Zugstabes der Wichtungsfaktor zu groß gewählt, hier z.B. $\vartheta = 0.999$, so kann die numerische Rechnung nicht bis zur Endverschiebung $w = 7$ mm durchgeführt werden, weil Konvergenzprobleme in der globalen Lösungsiteration auftreten. Der Einsatz des Q1/d8v1- ϑ Elementes ist also nicht vollkommen problemlos. Ein geeigneter Wert für den Wichtungsfaktor ϑ muß immer vorab gewählt werden. Da der geeignete Wert von der Aufgabenstellung abhängt, erfordert die geeignete Wahl von ϑ ein gewisses Maß an Erfahrung mit ähnlichen Aufgabenstellungen. Der Wert $\vartheta = 0.99$, welcher sich für dieses spezielle Beispiel bewährt hat, muß nicht zwingenderweise für andere Beispiele gleich gut geeignet sein. Um die Genauigkeit und die Zuverlässigkeit der Methode zu verbessern, wäre ein benutzerunabhängiger Algorithmus zur Steuerung des Wichtungsfaktors ϑ wünschenswert. Dieser Algorithmus müßte sowohl den elastischen Anteil als auch den plastischen Anteil der Inkompressibilität berücksichtigen. Eine Verallgemeinerung des Quotienten K/μ^* , der in Abschnitt 8.1 für den eindimensionalen Fall als Maß für die Inkompressibilität eingeführt worden ist, könnte beispielsweise bei der Bestimmung des Wichtungsfaktors ϑ zugrunde gelegt werden. Der diskrete plastische Multiplikator in (5.32) wäre beispielsweise als ein Maß für das inkompressible plastische Fließen verwendbar.

Vermeidung von Kinematiken durch Modifikation der $\bar{\mathbf{F}}$ Elemente: Als Alternative zur Vermeidung von Kinematiken wird die Modifikation $\bar{\mathbf{F}}^* = (\bar{J}/J)^{\nu/3} \mathbf{F}$ mit $\nu \in [0, 1]$ vorgeschlagen. Diese Modifikation führt zu einer gemischten Determinante $\bar{J}^* = \det \bar{\mathbf{F}}^* = \bar{J}^\nu J^{1-\nu}$. Hierin ist die Summe der Exponenten immer gleich eins. Für $\nu = 1$ wird die ursprüngliche Formulierung mit konstanter Determinante $\bar{J}^* = \bar{J}$ im Element erhalten. Wird $\nu = 0$ gewählt, so ergibt sich das Q1 Element. Dieser Ansatz erfolgt in Anlehnung an das gemischt integrierte Q1/d8v1- ϑ Element. Im Element wird ein Teil der volumetrischen Deformation, hier \bar{J}^ν , als konstant angesehen, während der restliche Teil der volumetrischen Deformation, hier $J^{1-\nu}$, als nicht

konstant angesehen wird. Analog zur Wahl des Wertes ϑ scheint es sinnvoll zu sein, den Wert ν ebenfalls in der Nähe der Eins zu wählen. Dann dominiert der konstante Anteil \bar{J} den nicht konstanten Anteil J , z.B. $\nu = 9/10$ führt auf $\bar{J}^* = \bar{J}^{9/10} J^{1/10}$. Die hier vorgeschlagene Modifikation der \bar{F} Elemente kann als multiplikative Version des Stabilisierungskonzeptes von MORAN, ORITZ & SHIH [1990] angesehen werden. Nach Ansicht des Autors sollte durch diese Modifikation die Möglichkeit gegeben sein, für nicht isochor-volumetrisch entkoppelte Stoffgesetze die Reduzierung der volumetrischen Versteifung mit dem vollen Rang der Steifigkeitsmatrix zu vereinen. Es sei aber angemerkt, daß dieser Vorschlag programmtechnisch noch nicht umgesetzt wurde.

Abschließende Bemerkung zum Lösungsverhalten: In diesem Abschnitt wird der plastische Grenzfall als viskoplastischer Fall mit sehr kleiner Viskosität η behandelt. Die Verwendung der reinen plastischen Formulierung in Kombination mit verschiebungsgesteuerter Belastung führt zu Konvergenzproblemen bei der Überwindung des Maximums in der Lastkurve. Das Lösungsverhalten innerhalb der globalen Newton-Raphson Iteration wird durch den kleinen viskosen Anteil jedoch beträchtlich verbessert. Im Vergleich zum rein plastischen Fall kann in der Nähe des Maximums ohne Konvergenzprobleme mit relativ großer Schrittweite gerechnet werden (Regularisierung). Aufgrund dieser auch an anderen Beispielen bestätigten Beobachtung wird empfohlen, Plastizität numerisch als Grenzfall der Viskoplastizität zu behandeln.

8.3 Dehnung eines Latex Streifens

In der Veröffentlichung von REESE & WRIGGERS [1997] wird ein elastoplastischer Werkstoff vom Ogden Typ verwendet, um das ratenunabhängige Verhalten von Latex zu beschreiben. Dabei werden numerische Berechnungen am Beispiel „Thick quadratic Latex plate“ durchgeführt. Anhand dieses Beispiels soll zunächst die Äquivalenz des in der vorliegenden Arbeit verwendeten Stoffgesetzes mit dem ursprünglichen Stoffgesetz der oben genannten Arbeit gezeigt werden.

(i) Zur Beschreibung des Stoffverhaltens von Latex wird von REESE & WRIGGERS [1997] die dreigliedrige elastische Energiefunktion nach OGDEN [1972a] mit kompressibler Erweiterung nach OGDEN [1972b] (siehe (4.41) mit $\theta = -2$) kombiniert mit der Fließbedingung (5.22) nach VON MISES [1913] und dem nichtlinearen isotropen plastischen Verfestigungsgesetz (5.12). (ii) In der vorliegenden Arbeit wird das Stoffverhalten von Latex durch die Energiefunktion (5.35) mit dem elastischen Anteil W^e aus (4.43) und (4.45) sowie dem plastischen Anteil W^p aus (5.12) beschrieben. Als Fließbedingung wird (5.22) und als Penalty Funktion wird (6.12) vorgegeben.

Für hinreichend kleine Viskositäten sind die plastischen Teilwerkstoffgesetze aus (i) und (ii) identisch. Die elastischen Teilwerkstoffgesetze aus (i) und (ii), die auf den ersten Blick unterschiedlich erscheinen, werden für $\Lambda \rightarrow \infty$, $K \rightarrow \infty$, $\chi = 1$, $\phi \rightarrow 1$ mit $\phi > 1$ äquivalent. In Abschnitt 4.2 wurden die Einzelheiten diskutiert, welche den volumetrischen Anteil der Energiefunktion betreffen. Anhand des Beispiels „Thick quadratic Latex plate“ aus REESE & WRIGGERS [1997] kann die Äquivalenz

der Stoffgesetze (i) und (ii) für große Werte des Kompressionsmoduls K bzw. der Laméschen Konstanten Λ und einen kleinen Wert der Viskosität numerisch nachgewiesen werden. Damit ist das in der vorliegenden Arbeit verwendete Gesetz (ii) zur Beschreibung des ratenunabhängigen Stoffverhaltens von Latex geeignet.

Ziel der numerischen Beispiele in diesem Kapitel ist die Untersuchung der selektiv reduzierten Integration im Hinblick auf volumetrische Versteifungseffekte. Da in dem genannten Beispiel „Thick quadratic Latex plate“ die volumetrische Versteifung nur eine untergeordnete Rolle spielt, wird hier das Beispiel „Dehnung eines Latex Streifens“ vorgeschlagen. Damit sollen die Unterschiede zwischen dem Q1 und Q1/d8v1 Element besser verdeutlicht werden.

Die verwendeten Stoffkonstanten sind mit Ausnahme des Kompressionsmoduls K analog zu REESE & WRIGGERS [1997] gewählt und in Tafel 8.3 gegeben. Das Verhältnis $K/\mu > 10^4$ gibt an, daß bereits im elastischen Bereich fast inkompressibles Stoffverhalten vorliegt. Der Schubmodul μ ist dabei durch die Beziehung (4.40) gegeben. Die kleine Viskosität, die konventionsgemäß in der Einheit Ns/mm² gegeben ist, impliziert zeitunabhängige Plastizität.

Konstante	μ_1	α_1	μ_2	α_2	μ_3	α_3	K
Wert	0.9394*	1.3	$-1.6 \cdot 10^{-3}$ *	-3.6	$1.5 \cdot 10^{-4}$ *	7.46	10^4 *

χ	ϕ	τ_0	H	H_2	a	η
1	1.001	3.6*	75*	$1.1 \cdot 10^5$ *	6.83	10^{-4}

Tafel 8.3: Stoffkonstanten für den Latex Streifen (* \equiv N/mm²).

Der dreidimensionale Streifen besitzt die Abmessungen $100 \times 100 \times 10$ mm. Aufgrund der Symmetrie genügt die Diskretisierung eines Achtels des Streifens. Das verwendete Netz besteht aus $25 \times 4 \times 1$ Volumenelementen. Das anfangs unverformte Netz ist in Bild 8.8(a) dargestellt. Die Belastung wird durch gleichförmige horizontale Verschiebungen u der Streifenenden aufgebracht. Zuerst wird innerhalb 300 äquidistanter Schritte die maximale Verschiebung $u = 150$ mm erreicht. Dies entspricht 400% der Anfangslänge. Anschließend wird innerhalb weiterer 300 äquidistanter Schritte in umgekehrter Richtung die ursprüngliche Verschiebung $u = 0$ mm der Streifenenden wiedererhalten. Die Verschiebungen der Streifenenden in die vertikale und normale Richtung sind immer festgehalten.

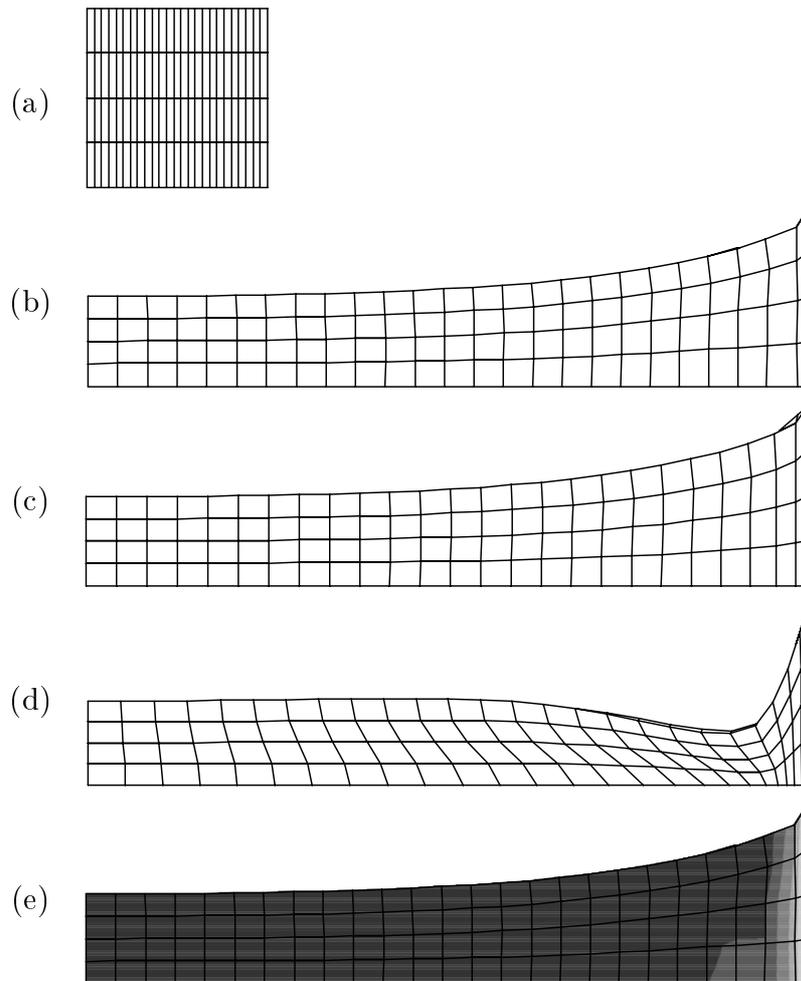


Bild 8.8: Latex Streifen, Diskretisierung eines Achtels. (a) Anfangs unverformter Streifen. (b) Verformter Streifen bei $u = 150$ mm, Q1/d8v1 Element. (c) Verformter Streifen bei $u = 150$ mm, Q1/d8v1-0.99 Element. (d) Verformter Streifen bei $u = 150$ mm, Q1/d8v1-0.7 Element. (e) Äquivalente plastische Verzerrung ξ ($\xi_{min} = 0$ und $\xi_{max} = 0.073$) bei $u = 150$ mm, Q1/d8v1 Element.

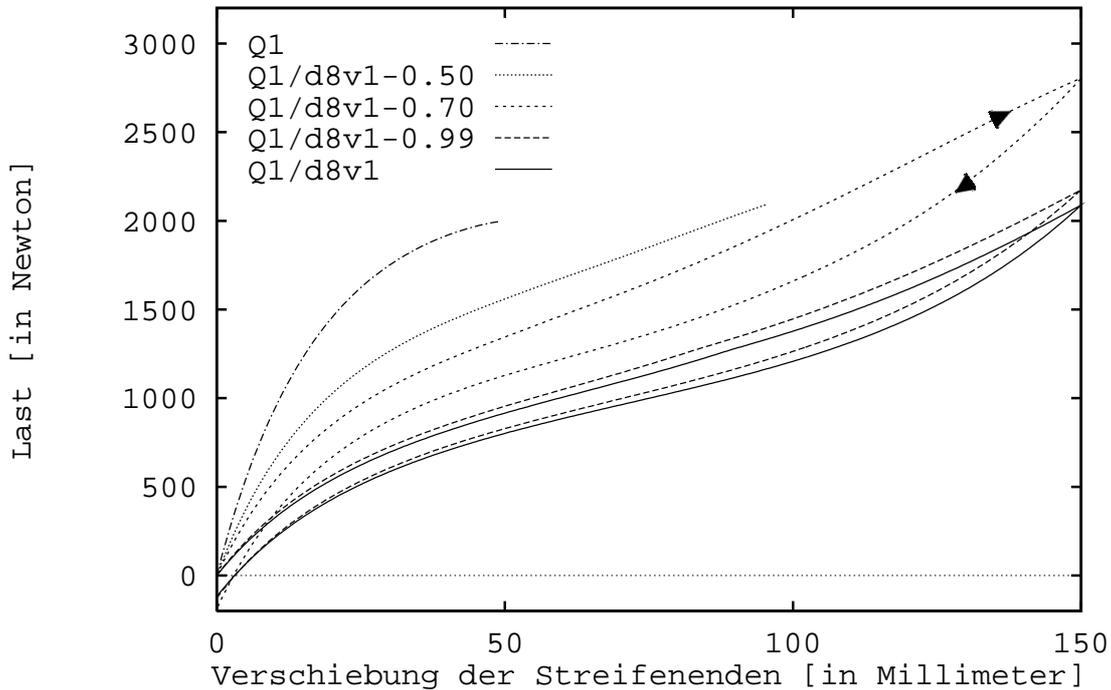


Bild 8.9: Latex Streifen, Kompressionsmodul $K = 10^4 \text{ N/mm}^2$. Horizontale Last aufgetragen über der horizontalen Verschiebung der Streifenenden. Verwendung verschiedener Volumenelemente mit unterschiedlicher Integration.

In Bild 8.9 sind die Lastkurven gegeben. Die Last ist die Summe aller Horizontalkräfte an den Streifenenden. Das selektiv reduziert integrierte $Q1/d8v1$ Element liefert die Kurve mit den kleinsten Lasten. Das gemischt integrierte $Q1/d8v1-\vartheta$ Element führt mit abnehmendem volumetrischem Wichtungsfaktor auf zunehmende Lasten. Für den Wert $\vartheta = 0.7$ ist die Konvergenz des globalen Lösungsverfahrens bis zur maximalen Verschiebung gewährleistet. Für $\vartheta \leq 0.5$ ist es bei der gegebenen Schrittweite nicht möglich, die maximale Verschiebung zu erreichen. Im Bereich $0.5 < \vartheta < 0.7$ scheint die globale Konvergenz verloren zu gehen. Das voll integrierte $Q1$ Element zeigt starke volumetrische Versteifung und hat ebenfalls den Verlust der Konvergenz zur Folge. Wie aus Bild 8.9 für $\vartheta \geq 0.7$ ersichtlich ist, tritt als Folge der plastischen Deformation eine Hystereseschleife auf. Der obere Pfad der Hystereseschleife entspricht dem Belastungspfad. Bei Umkehrung der Belastungsrichtung folgt die Last dem unteren Pfad. Die Hystereseschleife des $Q1/d8v1-0.7$ Elementes umschließt eine größere Fläche als die Schleife des $Q1/d8v1$ Elementes. Der Grund dafür liegt in den größeren Spannungen bedingt durch die volumetrische Versteifung. Im elastoplastischen Bereich sind größere Spannungen jedoch nur zulässig, wenn die äquivalente plastische Verzerrung ξ im Verfestigungsanteil W^p in (5.12) zunimmt und damit die Hysterese ausgeprägter wird. Kurz bevor die ursprüngliche Verschiebung $u = 0 \text{ mm}$ am Ende des Deformationsvorgangs wieder erreicht ist, wird aufgrund des

plastischen Deformationsanteils die Last negativ. In Bild **8.8(e)** ist die äquivalente plastische Verzerrung dargestellt. Die plastischen Deformationen treten im Innern des Streifens auf. Bei Annäherung an das Streifenende, an dem die Verschiebungen in vertikale und normale Richtung festgehalten sind, nimmt der plastische Deformationsanteil ab. Direkt am Streifenende ist die Deformation rein elastisch.

In den Bildern **8.8(b,c,d)** sind drei repräsentative Netze bei $u = 150$ mm dargestellt. Das Deformationsverhalten ist sehr stark vom volumetrischen Wichtungsfaktor ϑ abhängig. Die Verwendung des Q1/d8v1 Elementes oder des Q1/d8v1-0.99 Elementes führt auf ein Verformungsbild, bei dem der Mittelquerschnitt (links im Bild) am kleinsten ist. Bei Verwendung des Q1/d8v1-0.7 Elementes befindet sich der kleinste Querschnitt in der Nähe des Streifenendes (rechts im Bild). Weil die Verschiebungen in die vertikale und normale Richtung am Streifenende festgehalten sind, treten nicht-homogene Deformationen hauptsächlich in diesem Bereich des Streifens auf. Deshalb nimmt dort das Integrationsverfahren für den volumetrischen Anteil eine bedeutende Rolle ein. Aufgrund der volumetrischen Versteifung ist das Q1/d8v1-0.7 Element derart behindert, daß das Deformationsverhalten in der Nähe der Streifenenden physikalisch nicht sinnvoll ist. Im Gegensatz dazu führen das Q1/d8v1 Element oder das Q1/d8v1-0.99 Element zum physikalisch erwarteten Ergebnis. Bei einer Senkung des volumetrischen Wichtungsfaktors $\vartheta < 0.7$ ist das Deformationsverhalten so stark behindert, daß das globale Lösungsverfahren divergiert. In der Nähe des Mittelquerschnitts ist die Deformation nahezu homogen und volumetrische Versteifungseffekte spielen nur eine untergeordnete Rolle.

Die Deformation in Dickenrichtung des Streifens ist aus den Bildern **8.8(b,c,e)** nicht ersichtlich und wird deshalb kurz in Worten geschildert. Ausgehend vom Streifenende, wo die Dicke 10 mm beträgt, ist zunächst eine starke Abnahme der Dicke zu beobachten. In der Nähe des Mittelquerschnitts nimmt die Dicke dann einen annähernd konstanten Wert an. Bedingt durch die dreidimensionale Modellierung und der damit zugelassenen Dickenkontraktion des Streifens sind die von den Netzen in Bild **8.8** eingenommenen Flächen nicht gleich groß.

Bei genauerer Betrachtung des Bildes **8.8(b)** scheint im Netz des Q1/d8v1 Elementes in der zweiten Elementspalte neben dem Streifenende eine geringe Kinematik ersichtlich zu sein. Im Netz des Q1/d8v1-0.99 Elementes in Bild **8.8(c)** ist diese Kinematik nicht mehr erkennbar. Die Elementdeformationen in der Nähe des Streifenendes sind dabei etwas kleiner. Die Lastkurve des Q1/d8v1-0.99 Elementes ist gegenüber der Lastkurve des Q1/d8v1 Elementes (siehe Bild **8.9**) nur geringfügig erhöht. Auch in diesem Beispiel scheint die Verwendung eines volumetrischen Wichtungsfaktors nahe eins, z.B. $\vartheta = 0.99$, geeignet zu sein, um Kinematiken zu vermeiden.

Es sei nochmals darauf hingewiesen, daß aufgrund des fast inkompressiblen Stoffverhaltens im elastischen Bereich in Kombination mit dem inkompressiblen Stoffverhalten im plastischen Bereich insgesamt ein sehr hoher Grad an Inkompressibilität vorliegt. Dieses Beispiel ist deshalb besonders gut geeignet, um das volumetrische Versteifungsverhalten der Elemente zu untersuchen. In den beiden vorangegangenen Beispielen (siehe Abschnitte 8.1 und 8.2) sind keine Probleme bei der Verwendung

des versteifenden Q1 Elementes aufgetreten. Das Q1 Element ist üblicherweise robuster als das selektiv reduziert integrierte Q1/d8v1 Element. Robust heißt in diesem Zusammenhang, daß ohne Verschlechterung des globalen Konvergenzverhaltens mit größerer Schrittweite gerechnet werden kann. In diesem Beispiel ist der Sachverhalt umgekehrt. Das Q1 Element ist deutlich weniger robust als das Q1/d8v1 Element. Aufgrund der starken Versteifung des Q1 Elementes wird sogar das Deformationsverhalten des Streifens vollkommen falsch beschrieben und es wird keine konvergente Lösung erzielt.

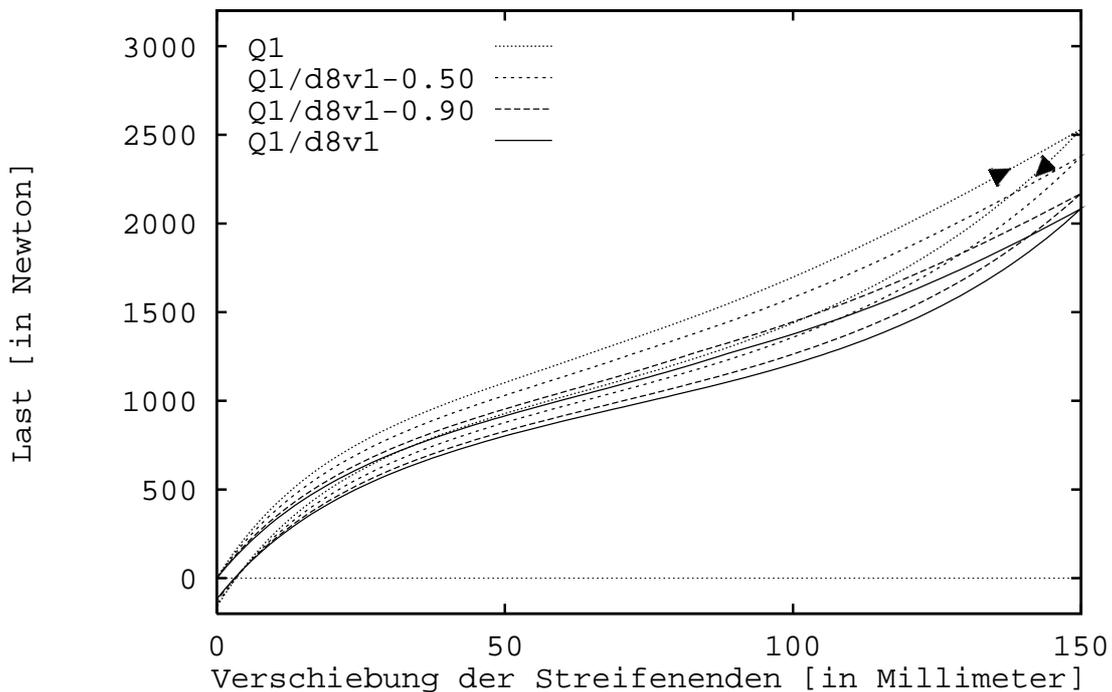


Bild 8.10: Latex Streifen, Kompressionsmodul $K = 10^3 \text{ N/mm}^2$. Horizontale Last aufgetragen über der horizontalen Verschiebung der Streifenenden. Verwendung verschiedener Volumenelemente mit unterschiedlicher Integration.

Um abschließend den Einfluß der InkompRESSIBILITÄT in diesem Beispiel näher zu untersuchen, wird alternativ eine Berechnung mit einem kleineren Kompressionsmodul $K = 10^3 \text{ N/mm}^2$ untersucht. Die anderen Stoffkonstanten aus Tafel 8.3 bleiben dabei unverändert. Die Schrittweite wird verdreifacht, d.h. die Verschiebungsvorgabe erfolgt in 100 plus 100 Schritten. Wie an den Lastkurven in Bild 8.10 zu sehen ist, können bei verringerter InkompRESSIBILITÄT mit dem Q1/d8v1- ϑ Element für alle Werte $\vartheta \in [0, 1]$ konvergente Lösungen erzielt werden. Die volumetrische Versteifung ist nicht mehr so ausgeprägt wie bei erhöhter InkompRESSIBILITÄT. Die in Bild 8.10 dargestellten Lastkurven liegen dichter zusammen als in Bild 8.9. Wird die Inkomp

pressibilität erhöht, tritt der umgekehrte Effekt ein. Die Schrittweite muß verringert werden und die Lastkurven liegen weiter auseinander.

8.4 Biegung einer dünnen quadratischen Platte

Dieses Beispiel ist den Veröffentlichungen von RAMM & MATZENMILLER [1988], BÜCHTER, RAMM & ROEHL [1994], SEIFERT [1996], MIEHE [1997], EBERLEIN [1997] und HAUPTMANN, SCHWEIZERHOF & DOLL [1998] entnommen. Die quadratische Platte besitzt eine Kantenlänge von 508 mm und eine Dicke von 2.54 mm, d.h. das Verhältnis von Dicke zu Länge ist 1/200. Aufgrund der Symmetrie genügt die Diskretisierung eines Viertels der Platte. Das für die Berechnungen verwendete Netz besteht aus 9×9 Schalenelementen und ist in Bild 8.11(links) dargestellt. Als Referenzbelastung wird eine gleichförmig verteilte spezifische Volumenlast $\rho_0 \mathbf{b}_0 = 3.94 \cdot 10^{-3} \text{ N/mm}^3$ senkrecht zur Ausgangsplatte aufgebracht. Diese spezifische Volumenlast entspricht einer Flächenlast von 10^{-2} N/mm^2 dividiert durch die Plattendicke. Als Randbedingungen werden die vertikalen Kantenverschiebungen der unteren Plattenfläche festgehalten, während die horizontalen Kantenverschiebungen frei sind. Die Kantenverschiebungen der oberen Plattenfläche sind alle frei. Somit sind Drehungen um die Plattenkanten möglich.

Konstante	μ	K	τ_0	H	η
Wert	26538*	57500*	248*	0*	$0, 10^{-6}$

Tafel 8.4: Stoffkonstanten für die Platte (* $\equiv \text{N/mm}^2$).

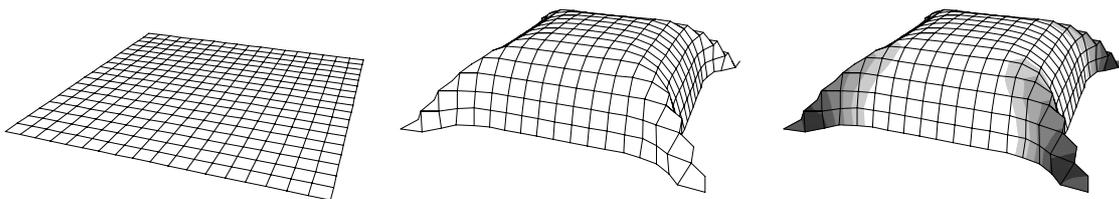


Bild 8.11: Dünne quadratische Platte, ANS3Dq/d4v1 Element. (links) Anfangs unverformte Platte. (Mitte) Verformte Platte bei Lastfaktor $\lambda = 70.5$. (rechts) Äquivalente plastische Verzerrung ξ ($\xi_{min} = 0$ und $\xi_{max} = 0.166$) bei Lastfaktor $\lambda = 70.5$.

Das isochor-volumetrisch entkoppelte Werkstoffverhalten wird durch die Energiefunktion (5.35) mit dem elastischen Anteil W^e aus (4.42) und dem plastischen Anteil W^p aus (5.11) sowie der Fließbedingung (5.22) und der Penalty Funktion (6.12) beschrieben. Die zugehörigen Stoffkonstanten sind in der Tafel 8.4 gegeben. Das isotope plastische Verfestigungsgesetz repräsentiert ideale Plastizität. Mit $\eta \rightarrow 0$ wird

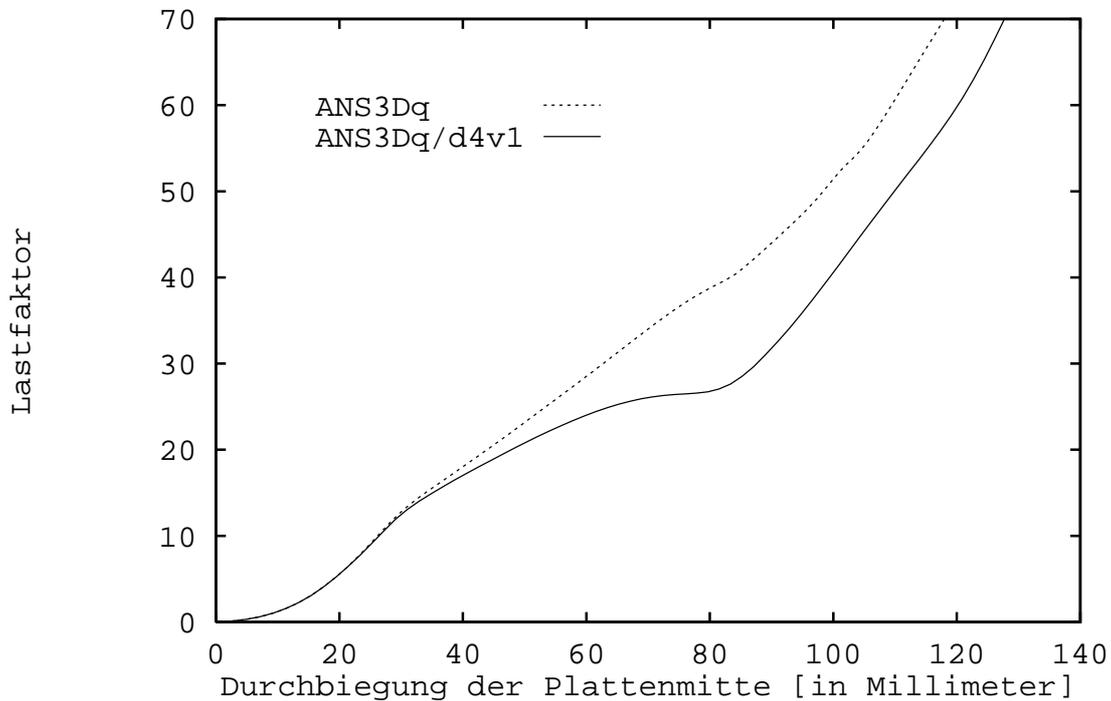


Bild 8.12: Dünne quadratische Platte. Lastfaktor λ aufgetragen über der Vertikalverschiebung der Plattenmitte erhalten mit dem ANS3Dq Element und dem ANS3Dq/d4v1 Element.

der rein plastische Grenzfall betrachtet. Beide für die Viskosität η gegebenen Werte führen auf identische Lösungen und identische globale Konvergenzraten.

Die Belastung $\lambda \rho_0 \mathbf{b}_0$ wird mit Hilfe des Lastfaktors λ aufgebracht, der die Referenzlast skaliert. Als Schalenelemente werden das ANS3Dq Element und das ANS3Dq/d4v1 Element verwendet, die beide mit $P = 6$ Punkten in Dickenrichtung integriert werden. Die nichtlineare Berechnung der Lastkurve erfolgt mittels des Bogenlängenverfahrens. Für die Berechnung mit dem ANS3Dq/d4v1 Element wird das Lastniveau $\lambda \approx 70$ nach 67 ungleichförmigen Schritten erreicht. Beim ANS3Dq ist ungefähr die doppelte Anzahl an Schritten erforderlich, d.h. das ANS3Dq/d4v1 Element ist robuster als das ANS3Dq Element.

In Bild 8.12 sind die Last-Verschiebungs-Kurven dargestellt. Das ANS3Dq/d4v1 Element liefert Ergebnisse, welche gut mit den Ergebnissen aus dem Schrifttum übereinstimmen. Das ANS3Dq Element verhält sich zu steif, was an der überhöhten Lastkurve ersichtlich ist. Für Schalenelemente erweist sich die selektiv reduzierte Integration der volumetrischen Anteile (siehe Abschnitt 7.2.3) als geeignete Methode, um die volumetrische Versteifung zu vermindern. Im rein elastischen Bereich bei kleinen Lastfaktoren sind die Lastkurven beider Elemente fast identisch. Bei einem Verhält-

nis der Konstanten $K/\mu \approx 2$ verhält sich der Werkstoff im elastischen Deformationsbereich kompressibel. Sobald inkompressible plastische Deformationen auftreten, verhält sich der Werkstoff zunehmend inkompressibel und die selektiv reduzierte Integration wird wirksam. Der erste Anstieg der Lastkurven in Bild 8.12 ist auf das geometrische Strukturverhalten der Platte zurückzuführen. An der Stelle, wo sich die beiden dargestellten Kurven trennen, macht sich dann der Einfluß des ideal plastischen Werkstoffverhaltens bemerkbar, d.h. die Steigung der unteren Kurve nimmt ab.

Das Netz der verformten Platte ist in Bild 8.11(Mitte) dargestellt. Es ist deutlich zu erkennen, daß die Elemente in den Plattenecken stark deformiert sind. Wie dem Bild 8.11(rechts) entnommen werden kann, liegen dort plastische Deformationen vor. Die Deformationen in der Plattenmitte bleiben hingegen rein elastisch. In diesem Beispiel sind keine Kinematiken erkennbar und somit ist die Anwendung eines gemischt integrierten Schalenelementes nicht sinnvoll.

Abschließend sei angemerkt, daß die vorliegende Berechnung auf einer relativ groben Diskretisierung basiert. Diese Diskretisierung wurde im Hinblick auf die ursprünglichen Arbeiten von RAMM & MATZENMILLER [1988] und BÜCHTER, RAMM & ROEHL [1994] sowie zur besseren Vergleichbarkeit der Ergebnisse gewählt. Um eine auskonvergierte Lösung zu erhalten, wäre allerdings eine deutlich feinere Diskretisierung notwendig.

8.5 Beidseitig gedrückter Zylinder

Als weiteres Schalenbeispiel wird ein dünnwandiger Zylinder mit starren Endscheiben betrachtet, der mittig durch zwei entgegengesetzt wirkende Einzelkräfte belastet ist. Literaturstellen hierzu sind SIMO & KENNEDY [1992], WRIGGERS, EBERLEIN & REESE [1996], MIEHE [1997], EBERLEIN [1997] und HAUPTMANN, SCHWEIZERHOF & DOLL [1998]. Die Geometrie und die Belastung des Zylinders sind in Bild 8.13 skizziert. Als Abmessungen sind die Gesamtlänge $l = 600$ mm, der mittlere Radius $r = 300$ mm und die Schalendicke $h = 3$ mm gegeben. An den Zylinderenden befinden sich starre Endscheiben, welche lediglich die Verschiebung der Zylinderenden in axiale Richtung zulassen. Aufgrund der Symmetrie genügt die Betrachtung eines Achtels des Zylinders. Den Berechnungen in dieser Arbeit liegt eine Diskretisierung mit 16×16 Schalenelementen zugrunde. Das Stoffverhalten wird durch die Energiefunktionen (5.35) mit (4.42) und (5.11) und durch die Fließbedingung (5.22) beschrieben. Die gewählten Konstanten sind aus der Tafel 8.5 ersichtlich.

Konstante	μ	K	τ_0	H
Wert	1154*	2500*	24.3*	300*

Tafel 8.5: Stoffkonstanten für den Zylinder (* \equiv N/mm²).

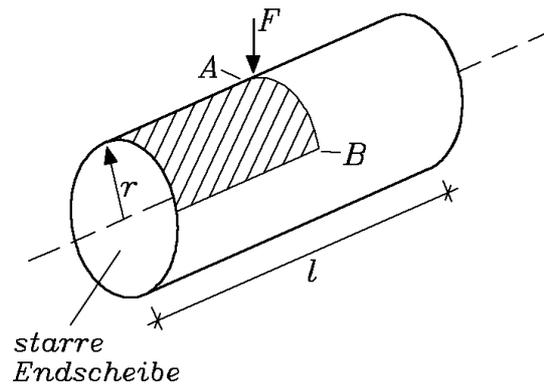


Bild 8.13: Geometrie des Zylinders mit Achtelsegment und Belastung.

Die Berechnungen werden mittels der Schalenelemente ANS3Dq und ANS3Dq/d4v1 mit $P = 6$ Integrationspunkten in Dickenrichtung unter Zuhilfenahme des Bogenlängenverfahrens durchgeführt. Beim robusten ANS3Dq/d4v1 Element sind ca. 120 Schritte und beim weniger robusten ANS3Dq Element ca. doppelt so viele Schritte nötig, um die Verschiebung $w_A = 250$ mm zu erreichen.

Die Ergebnisse aus Beispiel 8.4 können anhand dieses Beispiels bestätigt werden. Die Lastkurven in Bild 8.14 zeigen, daß ohne Anwendung der selektiv reduzierten Integration der volumetrischen Anteile eine Versteifung eintritt. Ausgehend vom elastischen Anfangsbereich der Deformation weichen die beiden dargestellten Lastkurven mit zunehmender Plastifizierung voneinander ab. Die mit dem ANS3Dq/d4v1 Element erhaltene Lastkurve ist vergleichbar mit den Referenzkurven aus dem Schrifttum. In Bild 8.15 sind die Zylinderverformungen sowie die Verteilungen der äquivalenten plastischen Verzerrung für zwei unterschiedliche Verformungsstufen gegeben. Die plastischen Zonen bilden sich im Bereich der „Knicke“ und an den Kraftangriffspunkten aus. Die Wanderung der „Knicke“ während des Deformationsvorganges führt bedingt durch die relativ grobe Diskretisierung zu Schwankungen in den Lastkurven. Letztere lassen sich durch Verwendung feinerer Netze beseitigen. Die Netzverformungen in Bild 8.15 deuten nicht auf Kinematiken hin.

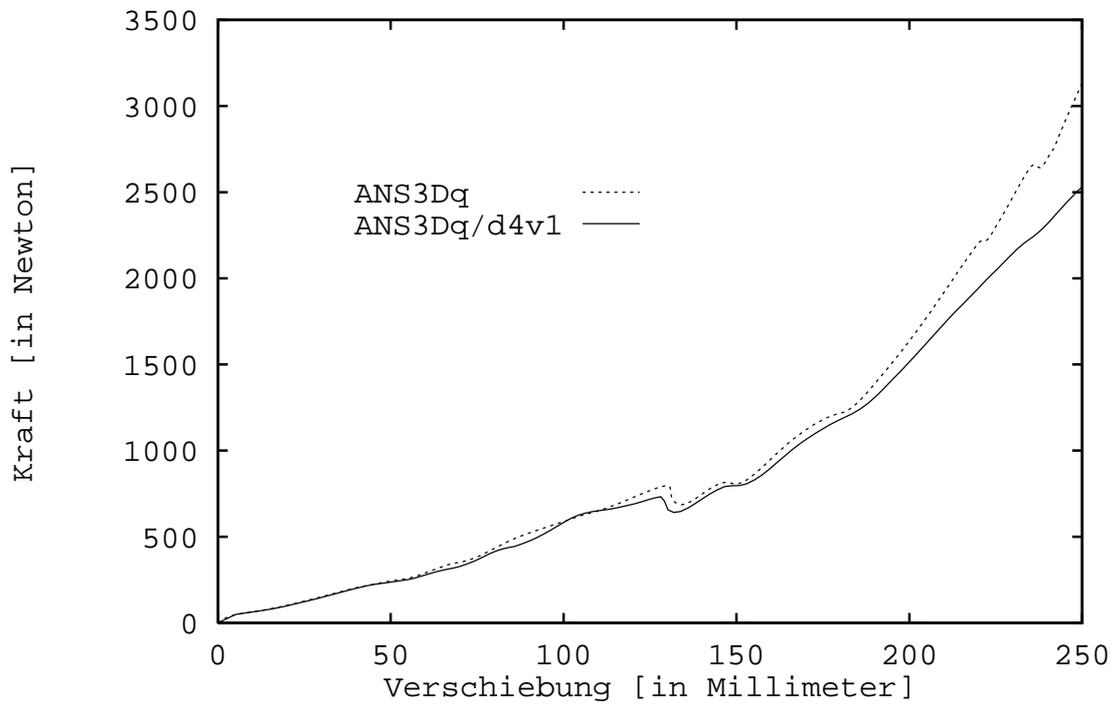


Bild 8.14: Zylinder. Kraft F aufgetragen über der Vertikalverschiebung w_A des Lastangriffspunktes erhalten mit dem ANS3Dq Element und dem ANS3Dq/d4v1 Element.

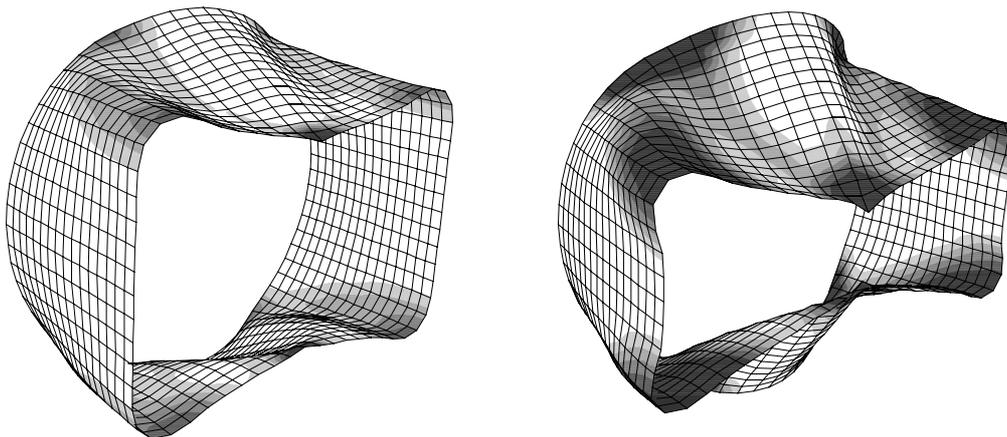


Bild 8.15: Zylinder, ANS3Dq/d4v1 Element. (links) Verformung des halben Zylinders und äquivalente plastische Verzerrung ξ bei $w_A = 150$ mm. (rechts) Verformung des halben Zylinders und äquivalente plastische Verzerrung ξ bei $w_A = 250$ mm.

Kapitel 9

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit nehmen bei der Behandlung der Werkstoffe die **Stoffgesetze mit isochor-volumetrischer Entkopplung** eine zentrale Stellung ein. Der kompressible Deformationsanteil wird dabei ausschließlich durch den elastischen volumetrischen Anteil der Energiefunktion beschrieben. Diese Eigenschaft gilt gleichermaßen sowohl bei Elastizität als auch bei Elastoplastizität oder Elastoviskoplastizität mit deviatorischer Fließbedingung. Auf der Basis von physikalischen Bedingungen wird eine volumetrische Energiefunktion entwickelt. Sie wird mit Energiefunktionen aus dem Schrifttum verglichen und bewertet. Der Hauptvorteil der entwickelten volumetrischen Energiefunktion ist deren Allgemeingültigkeit. Die enthaltenen Konstanten ermöglichen eine gute Parameteranpassung.

Bei isochor-volumetrisch entkoppeltem Werkstoffverhalten ist die **selektiv reduzierte Integration der volumetrischen Anteile** eine geeignete Methode, um bei der Verwendung Finiten Elemente die volumetrische Versteifung zu vermindern. In einer Vielzahl von Veröffentlichungen aus dem Themengebiet der Finiten Elemente wird isochor-volumetrisch entkoppeltes Werkstoffverhalten mit einem hohen Grad an Inkompressibilität vorausgesetzt. Typische Werkstoffe sind beispielsweise Gummi mit einem fast inkompressiblen elastischen Verhalten oder Metalle, die ein vollkommen inkompressibles plastisches Deformationsverhalten aufweisen. Die additive Entkopplung des Stoffverhaltens in einen isochoren und einen volumetrischen Anteil ermöglicht die Verwendung unterschiedlicher Integrationsordnungen für die additiv entkoppelten Anteile. Die Grundstruktur bereits vorhandener Finite Element Implementierungen kann beibehalten werden. Bei der Aufstellung des internen Knotenkraftvektors und der Steifigkeitsmatrix müssen für den zu integrierenden Anteil lediglich die geeigneten Integrationspunkte gewählt werden. Aufwendige Erweiterungen des internen Knotenkraftvektors und der Steifigkeitsmatrix, wie sie bei anderen versteifungsfreien Elementen üblich sind, sind nicht erforderlich. Die mit der selektiv reduzierten Integration erzielten numerischen Ergebnisse zeigen, daß bei fast inkompressiblem entkoppeltem Stoffverhalten die volumetrische Versteifung vermieden werden kann. Somit ist mit der selektiv reduzierten Integration eine gute Kombination

von Berechnungseffizienz und Ergebnisgüte erreicht. Durch die gemischt reduzierte Integration ist zudem die Möglichkeit gegeben, mittels einer einfachen Modifikation unphysikalische Kinematiken (hour-glassing) zu vermeiden.

Der wesentliche Bestandteil der Finiten Element Implementierung des Verfahrens ist die **additive Aufspaltung des Spannungstensors und des Stofftensors** in einen deviatorischen (isochoren) und einen volumetrischen Anteil. Im elastischen Fall führt die Herleitung der additiven Aufspaltungen auf Berechnungsvorschriften, die direkt ausgewertet werden können. Die Aufspaltung des Spannungstensors im elasto-plastischen bzw. elastoviskoplastischen Fall ist ebenfalls direkt durchführbar. Die Herleitung der additiven Aufspaltung des Stofftensors erweist sich jedoch als kompliziert, da der plastische Korrektor im allgemeinen ein numerisches Lösungsverfahren beinhaltet. In der in dieser Arbeit vorgeschlagenen Methode wird zunächst der gesamte Stofftensor auf herkömmlichem Weg bestimmt. Aufgrund der plastischen Inkompresibilität kann davon der volumetrische Anteil abgespalten werden, so daß sich schließlich der deviatorische Anteil des Stofftensors ergibt. Die deviatorisch-volumetrische Aufspaltung des Stofftensors ist also nicht direkt möglich, sondern erfordert den Umweg über den gesamten Stofftensor. Mit Hilfe der vorgeschlagenen Methode ist es möglich, die selektiv reduzierte Integration vom elastischen Fall auf den plastischen bzw. viskoplastischen Fall zu übertragen.

Die deviatorisch-volumetrische Zerlegung des Spannungstensors und somit des Stofftensors wird vorzugsweise in der Momentankonfiguration hergeleitet. Zum einen ist dort die Abspaltung der volumetrischen Anteile einfacher und anschaulicher als in der Referenzkonfiguration. Zum anderen ist es im plastischen Fall vorteilhaft, die Energiefunktion in Abhängigkeit des elastischen Linken Cauchy-Green Tensors aufzustellen, der bezüglich der Momentankonfiguration definiert ist. Ein in dieser Arbeit vorgestellter Algorithmus ermöglicht die einfache Transformation des Spannungstensors und des Stofftensors von der Momentankonfiguration in die Referenzkonfiguration. Die deviatorisch-volumetrische Zerlegung bleibt bei der Transformation erhalten. Der Algorithmus nutzt die Eigenschaft der Pull-Back Operation aus, daß die Tensorkomponenten erhalten bleiben und lediglich die Tensorbasis getauscht wird. Der Ausgangspunkt der Pull-Back Operation ist die Spektraldarstellung der Tensoren in der Momentankonfiguration. Um die Transformation (und den elastischen Prädiktor) durchführen zu können, ist der Deformationsgradient erforderlich. Je nach Elementformulierung kann dessen Bestimmung jedoch aufwendig sein.

Zur **Verbesserung des Elementverhaltens** ist die selektiv reduzierte Integration der volumetrischen Anteile ebenfalls sehr gut in Verbindung mit anderen Methoden einsetzbar. Am Beispiel der Implementierung in ein Schalenelement mit dreidimensionalem Stoffgesetz zeigt sich, daß das Konzept der angenommenen Querschubverzerrungen und die Methode der selektiv reduzierten Integration gut kombiniert werden können. Aufgrund des begrenzten Umfangs dieser Arbeit werden Elemente mit erweiterten Verzerrungsansätzen nicht behandelt. Wie jedoch über den Rahmen dieser Arbeit hinausgehende Tests zeigen (siehe HAUPTMANN, SCHWEIZERHOF & DOLL [1998]), ist die Verwendung der selektiv reduzierten Integration auch in Schalenelementen mit erweiterten Verzerrungsansätzen sehr vielversprechend. Die Imple-

mentierung ist äußerst einfach. Es sei angemerkt, daß die Durchführung der selektiv reduzierten Integration der volumetrischen Anteile im vorgestellten Schalenelement im übertragenen Sinn der Verwendung des modifizierten volumetrischen Anteils des Deformationgradienten in der Schalenebene entspricht.

Nach Meinung des Autors stellt das Verfahren der selektiv reduzierten Integration eine effiziente Ergänzung bereits im Element vorhandener Modifikationen dar, sobald isochor-volumetrisch entkoppeltes Stoffverhalten vorausgesetzt werden kann. Aufgrund der Entkopplung kann die Verminderung der volumetrischen Versteifung sehr effizient und effektiv erhalten werden.

Das **Hauptanwendungsgebiet der beschriebenen Methode** liegt in der numerischen Berechnung großer plastischer Deformationen bei Metallen. Das isochore plastische Fließen von Metallen führt bei großen plastischen Verformungen auf ein fast inkompressibles elastoplastisches Gesamtverhalten. Die deviatorische Fließbedingung ermöglicht den Einsatz der selektiv reduzierten Integration der volumetrischen Anteile zur Verringerung der volumetrischen Versteifung und führt somit zu einem guten numerischen Berechnungsergebnis. Technische Anwendungsmöglichkeiten sind numerische Berechnungen aus dem Bereich der Metallumformung (z.B. Massivumformung, Tiefziehen) oder Versagensanalysen von Metallbauteilen bzw. Metallstrukturen mit lokal auftretenden großen plastischen Deformationen (z.B. Versagenszustände von Silos infolge von Beulen, Crash-Simulation im Automobilbau). Technische Anwendungen mit kleinen plastischen Deformationen (z.B. wissenschaftliche Analyse von Fließgelenken) können als Sonderfälle ebenfalls berechnet werden. Denkbar sind außerdem Anwendungen aus dem Bereich der Kunststoff-Technologie oder dem Bereich der Biomedizin, sofern die viskoelastischen Deformationsanteile vernachlässigbar klein sind und nahezu Volumenkonstanz vorausgesetzt werden kann.

Für Werkstoffe mit druckabhängiger Fließbedingung (z.B. Geomaterialien) ist die beschriebene Methode nicht geeignet. Zum einen sind diese Werkstoffe nicht als inkompressibel zu bezeichnen, d.h. es tritt keine volumetrische Versteifung auf, die behoben werden muß. Zum anderen ist die Fließbedingung nicht deviatorisch und die Methode nicht anwendbar.

Schrifttum

- Backhaus, G. [1983]: *Deformationsgesetze*, Akademie-Verlag, Berlin.
- Ball, J.M. [1977]: *Convexity Conditions and Existence Theorems in Nonlinear Elasticity*, Archive for Rational Mechanics and Analysis, **63**, pp. 337–403.
- Barlow, J. [1976]: *Optimal Stress Locations in Finite Element Models*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, **10**, pp. 243–251.
- Bathe, K.J. [1986]: *Finite-Element-Methoden*, Springer-Verlag, Berlin.
- Becker, E.; Bürger, W. [1975]: *Kontinuumsmechanik*, B.G. Teubner, Stuttgart.
- Belytschko, T.; Tsay, C.S.; Liu, W.K. [1981]: *A Stabilization Matrix for the Bilinear Mindlin Plate Element*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, **29**, pp. 313–327.
- Boer, De, R. [1982]: *Vektor- und Tensorrechnung für Ingenieure*, Springer-Verlag, Berlin.
- Bogert, Van den, P.A.J.; Borst, De, R. [1990]: *Constitutive Aspects and Finite Element Analysis of 3D Rubber Specimens in Compression and Shear*, NUMETA 90: Numerical Methods in Engineering: Theory and Applications, Elsevier Applied Science, Swansea, (Eds. G.N. Pande, J. Middleton), pp. 870–877.
- Bogert, Van den, P.A.J.; Borst, De, R.; Luiten, G.T.; Zeilmaker, J. [1991]: *Robust Finite Elements for 3D-Analysis of Rubber-Like Materials*, Engineering Computations, **8**, pp. 3–17.
- Büchter, N.; Ramm, E.; Roehl, D. [1994]: *Three-Dimensional Extension of Non-Linear Shell Formulation Based on the Enhanced Assumed Strain Concept*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, **37**, pp. 2551–2568.
- Chadwick, P.; Ogden, R.W. [1971a]: *On the Definition of Elastic Moduli*, Archive for Rational Mechanics and Analysis, **44**, pp. 41–53.
- Chadwick, P.; Ogden, R.W. [1971b]: *A Theorem of Tensor Calculus and its Application to Isotropic Elasticity*, Archive for Rational Mechanics and Analysis, **44**, pp. 54–68.

- Chang, T.Y.; Saleeb, A.F.; Li, G. [1991]: *Large Strain Analysis of Rubber-Like Materials Based on a Perturbed Lagrangian Variational Principle*, Computational Mechanics, **8**, pp. 221–233.
- Ciarlet, P.G. [1988]: *Mathematical Elasticity. Volume 1: Three Dimensional Elasticity*, Elsevier, Amsterdam.
- Coleman, B.D.; Noll, W. [1963]: *The Thermodynamics of Elastic Materials with Heat Conduction and Viscosity*, Archive for Rational Mechanics and Analysis, **13**, pp. 167–178.
- Coleman, B.D.; Gurtin, M.E. [1967]: *Thermodynamics with Internal State Variables*, Journal of Chemical Physics, **47**(2), pp. 597–613.
- Crisfield, M.A. [1991]: *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures. Volume 1: Essentials*, John Wiley, Chichester.
- Crisfield, M.A. [1997]: *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures. Volume 2: Advanced Topics*, John Wiley, Chichester.
- Cuitiño, A.M.; Ortiz, M. [1992]: *A Material-Independent Method for Extending Stress Update Algorithms from Small-Strain Plasticity to Finite Plasticity with Multiplicative Kinematics*, Engineering Computations, **9**, pp. 437–451.
- Dacorogna, B. [1989]: *Direct Methods in the Calculus of Variations*, Applied Mathematical Sciences, Volume 78, Springer-Verlag, Berlin.
- Doll, S.; Schweizerhof, K. [1997]: *On the Development of Volumetric Strain Energy Functions*, eingereicht in Journal of Applied Mechanics.
- Doll, S.; Hauptmann, R.; Schweizerhof, K.; Freischläger, C. [1998]: *Selective Reduced Integration and Volumetric Locking in Finite Deformation Elastoviscoplasticity*, eingereicht in Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering.
- Doyle, T.C.; Ericksen, J.L. [1956]: *Nonlinear Elasticity*, Advances in Applied Mechanics, **4**, pp. 53–115.
- Drucker, D.C. [1951]: *A More Fundamental Approach to Plastic Stress-Strain Relations*, Proc. 1st National Congress of Applied Mechanics, ASME, Chicago, pp. 487–491.
- Drucker, D.C. [1960]: *Plasticity*, Structural Mechanics, Pergamon Press, London, (Eds. J.N. Goodier, N.J. Hoff), pp. 407–455.
- Duvaut, G.; Lions, J.L. [1972]: *Les Inéquations en Mécanique et en Physique*, Dunod, Paris.
- Dvorkin, E.N.; Bathe, K.J. [1984]: *A Continuum Mechanics Based Four-Node Shell Element for General Nonlinear Analysis*, Engineering Computations, **1**, pp. 77–88.

- Dvorkin, E.N.; Pantuso, D.; Repetto, E.A. [1995]: *A Formulation of the MITC4 Shell Element for Finite Strain Elasto-Plastic Analysis*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, **125**, pp. 17–40.
- Eberlein, R. [1997]: *Finite-Elemente-Konzepte für Schalen mit großen elastischen und plastischen Verzerrungen*, Dissertation, Fachbereich Mechanik, Technische Hochschule Darmstadt, Germany.
- Eterovic, A.L.; Bathe, K.J. [1990]: *A Hyperelastic-Based Large Strain Elasto-Plastic Constitutive Formulation with Combined Isotropic-Kinematic Hardening Using the Logarithmic Stress and Strain Measures*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, **30**, pp. 1099–1114.
- Falk, G.; Ruppel, W. [1976]: *Energie und Entropie*, Springer-Verlag, Berlin.
- Flory, P.J. [1961]: *Thermodynamic Relations for High Elastic Materials*, Transactions of the Faraday Society, **57**, pp. 829–838.
- Freischläger, C. [1998]: *Konzepte zur Formulierung versteifungsfreier 3D Volumenelemente*, als Dissertation eingereicht, Institut für Mechanik, Universität Karlsruhe, Germany.
- Fried, I. [1974]: *Finite Element Analysis of Incompressible Material by Residual Energy Balancing*, International Journal of Solids and Structures, **10**, pp. 993–1002.
- Glaser, S.; Armero, F. [1997]: *On the Formulation of Enhanced Strain Finite Elements in Finite Deformations*, Engineering Computations, **14**(7), pp. 759–791.
- Gruttmann, F. [1996]: *Theorie und Numerik dünnwandiger Faserverbundstrukturen*, Bericht-Nr. F96/1, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover, Germany.
- Hauptmann, R. [1997]: *Strukturangepaßte geometrisch nichtlineare Finite Elemente für Flächentragwerke*, Bericht-Nr. M97/3, Institut für Mechanik, Universität Karlsruhe, Germany.
- Hauptmann, R.; Schweizerhof, K. [1998]: *A Systematic Development of 'Solid-Shell' Element Formulations for Linear and Nonlinear Analyses Employing only Displacement Degrees of Freedom*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, zur Veröffentlichung angenommen.
- Hauptmann, R.; Schweizerhof, K.; Doll, S. [1998]: *Extension of the 'Solid-Shell' Concept for the Application to Large Elastic and Large Elastoplastic Deformation*, eingereicht in International Journal for Numerical Methods in Engineering.
- Hencky, H. [1933]: *The Elastic Behavior of Vulcanized Rubber*, Applied Mechanics (Journal of Applied Mechanics), **1**, pp. 45–53.

- Hill, R. [1948]: *A Variational Principle of Maximum Plastic Work in Classical Plasticity*, Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, **1**, pp. 18–28.
- Hill, R. [1957]: *On Uniqueness and Stability in the Theory of Finite Elastic Strain*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, **5**, pp. 229–241.
- Hughes, T.J.R. [1977]: *Equivalence of Finite Elements for Nearly Incompressible Elasticity*, Journal of Applied Mechanics, **44**(1), pp. 181–183.
- Hughes, T.J.R.; Pister, K.S. [1978]: *Consistent Linearization in Mechanics of Solids and Structures*, Computer & Structures, **8**, pp. 391–397.
- Hughes, T.J.R. [1987]: *The Finite Element Method. Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- Ibrahimbegović, A. [1994]: *Equivalent Spatial and Material Descriptions of Finite Deformation Elastoplasticity in Principal Axes*, International Journal of Solids and Structures, **31**(22), pp. 3027–3040.
- Kaliske, M.; Rothert, H. [1997]: *On the Finite Element Implementation of Rubber-Like Materials at Finite Strains*, Engineering Computations, **14**(2), pp. 216–232.
- Kammer, H.-W.; Schwabe, K. [1985]: *Thermodynamik irreversibler Prozesse. Eine Einführung*, VCH Verlagsgesellschaft, Weinheim.
- Kavanagh, K.T.; Key, S.W. [1972]: *A Note on Selective and Reduced Integration Techniques in the Finite Element Method*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, **4**, pp. 148–150.
- Kestin, J. [1992]: *Local-Equilibrium Formalism Applied to Mechanics of Solids*, International Journal of Solids and Structures, **29**, pp. 1827–1836.
- Kirchhoff, G. [1852]: *Über die Gleichungen des Gleichgewichtes eines elastischen Körpers bei nicht unendlich kleinen Verschiebungen seiner Theile*, Sitzungsberichte der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Classe, Wien, **9**(4), Sitzung vom 4. November 1852.
- Klingbeil, E. [1989]: *Tensorrechnung für Ingenieure*, B.I.-Hochschultaschenbuch, Band 197, Mannheim.
- Korelc, J. [1996]: *Symbolic Approach in Computational Mechanics and its Application to the Enhanced Strain Method*, Dissertation, Fachbereich Mechanik, Technische Hochschule Darmstadt, Germany.
- Korelc, J.; Wriggers, P. [1996]: *Consistent Gradient Formulation for a Stable Enhanced Strain Method for Large Deformations*, Engineering Computations, **13**(1), pp. 103–123.

- Kröner, E. [1960]: *Allgemeine Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen*, Archive for Rational Mechanics and Analysis, **4**, pp. 273–334.
- Lee, E.H.; Liu, D.T. [1967]: *Finite-Strain Elastic-Plastic Theory with Application to Plane-Wave Analysis*, Journal of Applied Physics, **38**(1), pp. 19–27.
- Lee, E.H. [1969]: *Elastic-Plastic Deformation at Finite Strains*, Journal of Applied Mechanics, **36**, pp. 1–6.
- Lemaitre, J.; Chaboche, J.-L. [1990]: *Mechanics of Solid Materials*, Cambridge University Press.
- Liu, C.H.; Hofstetter, G.; Mang, H.A. [1992]: *Evaluation of 3D FE-Formulations for Incompressible Hyperelastic Materials at Finite Strains*, Proceedings of the First European Conference on Numerical Methods in Engineering, 7.–11. September 1992, Brussels, Belgium, (Eds. C. Hirsch, O.C. Zienkiewicz, E. Oñate), pp. 757–764.
- Liu, C.H.; Hofstetter, G.; Mang, H.A. [1994]: *3D Finite Element Analysis of Rubber-Like Materials at Finite Strains*, Engineering Computations, **11**, pp. 111–128.
- Liu, C.H.; Mang, H.A. [1996]: *A Critical Assessment of Volumetric Strain Energy Functions for Hyperelasticity at Large Strains*, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, **76**(S5), pp. 305–306.
- Lubliner, J. [1990]: *Plasticity Theory*, Macmillan, New York.
- Luenberger, D.G. [1984]: *Linear and Nonlinear Programming*, Addison-Wesley Publishing Company.
- Macvean, D.B. [1968]: *Die Elementararbeit in einem Kontinuum und die Zuordnung von Spannungs- und Verzerrungstensorsoren*, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik, **19**, pp. 157–185.
- Malkus, D.S. [1976]: *A Finite Element Displacement Model Valid for Any Value of the Compressibility*, International Journal of Solids and Structures, **12**, pp. 731–738.
- Malkus, D.S.; Hughes, T.J.R. [1978]: *Mixed Finite Element Methods — Reduced and Selective Integration Techniques: A Unification of Concepts*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, **15**, pp. 63–81.
- Malvern, L.E. [1969]: *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- Mandel, J. [1974]: *Thermodynamics and Plasticity*, Foundations of Continuum Mechanics, (Eds. J.J. Delgado Domingos, M.N.R. Nina, J.H. Whitelaw), pp. 283–304, Macmillan, London.

- Marsden, J.E.; Hughes, T.J.R. [1983]: *Mathematical Foundations of Elasticity*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- Maugin, G.A. [1992]: *The Thermomechanics of Plasticity and Fracture*, Cambridge University Press.
- Meschke, G.; Liu, W.N. [1997]: *A Study on the Significance of the Chosen Stress Measure in Finite Strain Plasticity*, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, **77**, pp. S219–S220.
- Miehe, C. [1988]: *Zur numerischen Behandlung thermodynamischer Prozesse*, Bericht-Nr. F88/6, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover, Germany.
- Miehe, C. [1993]: *Kanonische Modelle multiplikativer Elasto-Plastizität. Thermodynamische Formulierung und numerische Implementation*, Bericht-Nr. F93/1, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover, Germany.
- Miehe, C. [1994]: *Aspects of the Formulation and Finite Element Implementation of Large Strain Isotropic Elasticity*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, **37**, pp. 1981–2004.
- Miehe, C. [1995]: *A Theory of Large-Strain Isotropic Thermoplasticity Based on Metric Transformation Tensors*, Archive of Applied Mechanics, **66**, pp. 45–64.
- Miehe, C. [1996]: *Numerical Computation of Algorithmic (Consistent) Tangent Moduli in Large-Strain Computational Inelasticity*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, **134**, pp. 223–240.
- Miehe, C. [1997]: *A Theoretical and Computational Model for Isotropic Elastoplastic Stress Analysis in Shells at Large Strains*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, zur Veröffentlichung angenommen.
- Mises, von, R. [1913]: *Mechanik der festen Körper im plastisch-deformablen Zustand*, Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse, pp. 582–592.
- Mises, von, R. [1928]: *Mechanik der plastischen Formänderung von Kristallen*, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, **8**(3), pp. 161–185.
- Mooney, M. [1940]: *A Theory of Large Elastic Deformation*, Journal of Applied Physics, **11**(9), pp. 582–592.
- Moran, B.; Ortiz, M.; Shih, C.F. [1990]: *Formulation of Implicit Finite Element Methods for Multiplicative Finite Deformation Plasticity*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, **29**, pp. 483–514.

- Morman, Jr., K.N. [1986]: *The Generalized Strain Measure with Application to Non-homogeneous Deformations in Rubber-Like Solids*, Transactions of the ASME, Journal of Pressure Vessel Technology, **53**, pp. 726–728.
- Müller-Hoeppe, N. [1990]: *Beiträge zur Theorie und Numerik finiter inelastischer Deformationen*, Bericht-Nr. F90/4, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover, Germany.
- Müller-Hoeppe, N.; Stein, E. [1992]: *Modeling and Computation of Finite Viscoplastic Strains*, Finite Inelastic Deformations — Theory and Applications, IUTAM Symposium Hannover/Germany 1991, (Eds. D. Besdo, E. Stein), pp. 363–372, Springer-Verlag, Berlin.
- Murnaghan, F.D. [1951]: *Finite Deformation of an Elastic Solid*, John Wiley, New York.
- Nagtegaal, J.C.; Parks, D.M.; Rice, J.R. [1974]: *On Numerically Accurate Finite Element Solutions in the Fully Plastic Range*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, **4**, pp. 153–177.
- Nagtegaal, J.C.; Fox, D.D. [1996]: *Using Assumed Enhanced Strain Elements for Large Compressive Deformation*, International Journal of Solids and Structures, **33**(20–22), pp. 3151–3159.
- Obata, Y.; Kawabata, S.; Kawai, H. [1970]: *Mechanical Properties of Natural Rubber Vulcanizates in Finite Deformation*, Journal of Polymer Science, Part A-2, **8**, pp. 903–919.
- Ogden, R.W. [1972a]: *Large Deformation Isotropic Elasticity — on the Correlation of Theory and Experiment for Incompressible Rubberlike Solids*, Proceedings of the Royal Society of London. Series A, **326**, pp. 565–584.
- Ogden, R.W. [1972b]: *Large Deformation Isotropic Elasticity: on the Correlation of Theory and Experiment for Compressible Rubberlike Solids*, Proceedings of the Royal Society of London. Series A, **328**, pp. 567–583.
- Ogden, R.W. [1974]: *On Isotropic Tensors and Elastic Moduli*, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, **75**, pp. 427–436.
- Ogden, R.W. [1982]: *Elastic Deformations of Rubberlike Solids*, Mechanics of Solids, The Rodney Hill 60th Anniversary Volume (Eds. H.G. Hopkins and M.J. Sewell), Pergamon Press, pp. 499–537.
- Ogden, R.W. [1984]: *Non-Linear Elastic Deformations*, Ellis Horwood, Chichester.
- Onsager, L. [1931a]: *Reciprocal Relations in Irreversible Processes. I*, Physical Review, **37**, pp. 405–426.
- Onsager, L. [1931b]: *Reciprocal Relations in Irreversible Processes. II*, Physical Review, **38**, pp. 2265–2279.

- Perić, D.; Owen, D.R.J.; Honnor, M.E. [1992]: *A Model for Finite Strain Elasto-Plasticity Based on Logarithmic Strains: Computational Issues*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, **94**, pp. 35–61.
- Perzyna, P. [1963]: *The Constitutive Equations for Rate Sensitive Plastic Materials*, Quarterly of Applied Mathematics, **20**, pp. 321–332.
- Perzyna, P. [1966]: *Fundamental Problems in Viscoplasticity*, Advances in Applied Mechanics, **9**, pp. 243–377.
- Perzyna, P. [1971]: *Thermodynamic Theory of Viscoplasticity*, Advances in Applied Mechanics, **11**, pp. 313–354.
- Ramm, E.; Matzenmiller, A. [1988]: *Consistent Linearization in Elasto-Plastic Shell Analysis*, Engineering Computations, **5**, pp. 289–299.
- Reese, S. [1994]: *Theorie und Numerik des Stabilitätsverhaltens hyperelastischer Festkörper*, Dissertation, Fachbereich Mechanik, Technische Hochschule Darmstadt, Germany.
- Reese, S.; Wriggers, P. [1997]: *A Material Model for Rubber-Like Polymers Exhibiting Plastic Deformation: Computational Aspects and a Comparison with Experimental Results*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, **148**, pp. 279–298.
- Rivlin, R.S. [1947]: *Torsion of a Rubber Cylinder*, Journal of Applied Physics, **18**(5), pp. 444–449.
- Rivlin, R.S. [1948a]: *Large Elastic Deformations of Isotropic Materials. I. Fundamental Concepts*, Philosophical Transactions of the Royal Society London. Series A, **240**(822), pp. 459–490.
- Rivlin, R.S. [1948b]: *Large Elastic Deformations of Isotropic Materials. II. Some Uniqueness Theorems for Pure, Homogeneous Deformation*, Philosophical Transactions of the Royal Society London. Series A, **240**(822), pp. 491–508.
- Rivlin, R.S. [1948c]: *Large Elastic Deformations of Isotropic Materials. III. Some Simple Problems in Cylindrical Polar Co-Ordinates*, Philosophical Transactions of the Royal Society London. Series A, **240**(823), pp. 509–525.
- Rivlin, R.S. [1948d]: *Large Elastic Deformations of Isotropic Materials. IV. Further Developments of the General Theory*, Philosophical Transactions of the Royal Society London. Series A, **241**(835), pp. 379–397.
- Rivlin, R.S. [1949a]: *Large Elastic Deformations of Isotropic Materials. V. The Problem of Flexure*, Proceedings of the Royal Society of London. Series A, **195**(A1043), pp. 463–473.

- Rivlin, R.S.; Saunders, D.W. [1951]: *Large Elastic Deformations of Isotropic Materials VII. Experiments on the Deformation of Rubber*, Philosophical Transactions of the Royal Society London. Series A, **243**(865), pp. 251–288.
- Rivlin, R.S.; Sawyers, K.N. [1976]: *The Strain-Energy Function for Elastomers*, Transactions of the Society of Rheology, **20**(4), pp. 545–557.
- Roehl, D.; Ramm, E. [1996]: *Large Elasto-Plastic Finite Element Analysis of Solids and Shells with the Enhanced Assumed Strain Concept*, International Journal of Solids and Structures, **33**(20–22), pp. 3215–3237.
- Saint-Venant, De, A.J.C.B. [1844]: *Sur les pressions qui se développent à l'intérieur des corps solides lorsque les déplacements de leurs points, sans altérer l'élasticité, ne peuvent cependant pas être considérés comme très petits*, Bull. Soc. Philomath., **5**, pp. 26–28.
- Saleeb, A.F.; Chang, T.Y.P.; Arnold, S.M. [1992]: *On the Development of Explicit Robust Schemes for Implementation of a Class of Hyperelastic Models in Large-Strain Analysis of Rubbers*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, **33**, pp. 1237–1249.
- Schade, H. [1997]: *Tensoranalysis*, Walter de Gruyter, Berlin.
- Schellekens, J.C.J.; Parisch, H. [1994a]: *On Finite Deformation Elasticity*, ISD-Bericht Nr. 94/3, Institut für Statik und Dynamik der Luft- und Raumfahrtkonstruktionen, Universität Stuttgart, Germany.
- Schellekens, J.C.J.; Parisch, H. [1994b]: *On Finite Deformation Elasto-Plasticity*, ISD-Bericht Nr. 94/5, Institut für Statik und Dynamik der Luft- und Raumfahrtkonstruktionen, Universität Stuttgart, Germany.
- Seifert, B. [1996]: *Zur Theorie und Numerik Finiter Elastoplastischer Deformationen von Schalenstrukturen*, Bericht-Nr. F96/2, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover, Germany.
- Simo, J.C.; Taylor, R.L. [1982]: *Penalty Function Formulations for Incompressible Nonlinear Elastostatics*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, **35**, pp. 107–118.
- Simo, J.C.; Marsden, J.E. [1984]: *On the Rotated Stress Tensor and the Material Version of the Doyle-Ericksen Formula*, Archive for Rational Mechanics and Analysis, **86**(3), pp. 213–231.
- Simo, J.C.; Taylor, R.L. [1985]: *Consistent Tangent Operators for Rate-Independent Elastoplasticity*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, **48**, pp. 101–118.
- Simo, J.C.; Ortiz, M. [1985]: *A Unified Approach to Finite Deformation Elastoplastic Analysis Based on the Use of Hyperelastic Constitutive Equations*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, **49**, pp. 221–245.

- Simo, J.C.; Taylor, R.L.; Pister, K.S. [1985]: *Variational and Projection Methods for Volume Constraint in Finite Deformation Elasto-Plasticity*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, **51**, pp. 177–208.
- Simo, J.C. [1985]: *On the Computational Significance of the Intermediate Configuration and Hyperelastic Stress Relations in Finite Deformation Elastoplasticity*, Mechanics of Materials, **4**, pp. 439–451.
- Simo, J.C.; Taylor, R.L. [1986]: *A Return Mapping Algorithm for Plane Stress Elastoplasticity*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, **22**, pp. 649–670.
- Simo, J.C. [1988a]: *A Framework for Finite Strain Elastoplasticity Based on Maximum Plastic Dissipation and the Multiplicative Decomposition: Part I. Continuum Formulation*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, **66**, pp. 199–219.
- Simo, J.C. [1988b]: *A Framework for Finite Strain Elastoplasticity Based on Maximum Plastic Dissipation and the Multiplicative Decomposition: Part II. Computational Aspects*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, **68**, pp. 1–31.
- Simo, J.C.; Rifai, M.S. [1990]: *A Class of Mixed Assumed Strain Methods and the Method of Incompatible Modes*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, **29**, pp. 1595–1638.
- Simo, J.C.; Taylor, R.L. [1991]: *Quasi-Incompressible Finite Elasticity in Principal Stretches. Continuum Basis and Numerical Algorithms*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, **85**, pp. 273–310.
- Simo, J.C.; Armero, F. [1992]: *Geometrically Non-Linear Enhanced Strain Mixed Methods and the Method of Incompatible Modes*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, **33**, pp. 1413–1449.
- Simo, J.C.; Kennedy, J.G. [1992]: *On a Stress Resultant Geometrically Exact Shell Model. Part V. Nonlinear Plasticity: Formulation and Integration Algorithms*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, **96**, pp. 133–171.
- Simo, J.C.; Miehe, C. [1992]: *Associative Coupled Thermoplasticity at Finite Strains: Formulation, Numerical Analysis and Implementation*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, **98**, pp. 41–104.
- Simo, J.C. [1992]: *Algorithms for Static and Dynamic Multiplicative Plasticity that Preserve the Classical Return Mapping Schemes of the Infinitesimal Theory*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, **99**, pp. 61–112.
- Simo, J.C.; Armero, F.; Taylor, R.L. [1993]: *Improved Versions of Assumed Enhanced Strain Tri-Linear Elements for 3D Finite Deformation Problems*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, **110**, pp. 359–386.

- Simo, J.C.; Hughes, T.J.R. [1998]: *Computational Inelasticity*, Springer Verlag (Anm.: Liegt dem Autor nur als Vorveröffentlichung vor.).
- Souza Neto, De, E.A.; Perić, D.; Dutko, M.; Owen, D.R.J. [1996]: *Design of Simple Low Order Finite Elements for Large Strain Analysis of Nearly Incompressible Solids*, International Journal of Solids and Structures, **33**(20–22), pp. 3277–3296.
- Spencer, A.J.M. [1980]: *Continuum Mechanics*, Longman Group, Essex.
- Stein, E.; Barthold, F.-J. [1994]: *Elastizitätstheorie*, Vorlesungsunterlagen, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover, Germany.
- Sussman, T.; Bathe, K.J. [1987]: *A Finite Element Formulation for Nonlinear Incompressible Elastic and Inelastic Analysis*, Computer & Structures, **26**(1/2), pp. 357–409.
- Svendsen, B.; Arndt, S.; Klingbeil, D.; Sievert, R. [1998]: *Hyperelastic Models for Elastoplasticity with Non-Linear Isotropic and Kinematic Hardening at Large Deformation*, International Journal of Solids and Structures, **35**(25), pp. 3363–3389.
- Taylor, R.L.; Beresford, P.J.; Wilson, E.L. [1976]: *A Non-Conforming Element for Stress Analysis*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, **10**, pp. 1211–1219.
- Treolar, L.R.G. [1943a]: *The Elasticity of a Network of Long-Chain Molecules. I.*, Transactions of the Faraday Society, **39**, pp. 36–41.
- Treolar, L.R.G. [1943b]: *The Elasticity of a Network of Long-Chain Molecules — II.*, Transactions of the Faraday Society, **39**, pp. 241–246.
- Treolar, L.R.G. [1944]: *Stress-Strain Data for Vulcanised Rubber under Various Types of Deformation*, Transactions of the Faraday Society, **40**, pp. 59–70.
- Truesdell, C.; Noll, W. [1965]: *The Non-Linear Field Theories of Mechanics*, Handbuch der Physik, Band III/3 (Editor: S. Flügge), Springer-Verlag, Berlin.
- Truesdell, C. [1984]: *Rational Thermodynamics*, Springer-Verlag, New York.
- Valanis, K.C.; Landel, R.F. [1967]: *The Strain-Energy Function of a Hyperelastic Material in Terms of the Extension Ratios*, Journal of Applied Physics, **38**(7), pp. 2997–3002.
- Wang, W.M.; Sluys, L.J.; Borst, De, R. [1997]: *Viscoplasticity for Instabilities due to Strain Softening and Strain-Rate Softening*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, **40**, pp. 3839–3864.

- Weber, G.; Anand, L. [1990]: *Finite Deformation Constitutive Equations and a Time Integration Procedure for Isotropic, Hyperelastic-Viscoplastic Solids*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, **79**, pp. 173–202.
- Wilson, E.L.; Taylor, R.L.; Doherty, W.P.; Ghaboussi, J. [1973]: *Incompatible Displacement Models*, Numerical and Computer Models in Structural Mechanics (Eds. J.S. Fenver et al.), Academic Press, New York, pp. 43–57.
- Wriggers, P. [1988]: *Konsistente Linearisierungen in der Kontinuumsmechanik und ihre Anwendung auf die Finite-Element-Methode*, Bericht-Nr. F88/4, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover, Germany.
- Wriggers, P.; Stein, E. [1988]: *Die Verwendung von Lie-Ableitungen bei der Angabe von Spannungsflüssen für große Deformationen*, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, **68**, pp. T264–T267.
- Wriggers, P.; Miehe, C.; Kleiber, M.; Simo, J.C. [1992]: *On the Coupled Thermomechanical Treatment of Necking Problems via Finite Element Methods*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, **33**, pp. 869–883.
- Wriggers, P.; Eberlein, R.; Reese, S. [1996]: *A Comparison of Three-Dimensional Continuum and Shell Elements for Finite Plasticity*, International Journal of Solids and Structures, **33**(20–22), pp. 3309–3326.
- Wriggers, P.; Reese, S. [1996]: *A Note on Enhanced Strain Methods for Large Deformations*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, **135**, pp. 201–209.
- Zienkiewicz, O.C.; Taylor, R.L. [1989]: *The Finite Element Method. Volume 1*, Fourth Edition, McGraw-Hill Book, London.
- Zienkiewicz, O.C.; Taylor, R.L. [1991]: *The Finite Element Method. Volume 2*, Fourth Edition, McGraw-Hill Book, London.

Anhang A

Mathematische Grundlagen

Zum besseren Verständnis der Arbeit sind die mathematischen Grundlagen zusammengefaßt. Bezüglich der verwendeten Lehrbücher zur Tensorrechnung seien beispielsweise DE BOER [1982], KLINGBEIL [1989] oder SCHADE [1997] genannt. Außerdem sei auf die kurzen Einführungen in die Tensorrechnung in MALVERN [1969], OGDEN [1984] oder WRIGGERS [1988] verwiesen. Der Abschnitt zur Behandlung von Optimierungsproblemen mit Nebenbedingung ist im wesentlichen analog zu LUENBERGER [1984] gestaltet.

A.1 Rechenregeln für Tensoren

A.1.1 Tensoralgebra

Indizes:

$$i, j, k, l, m, n \in \{1, 2, 3\} .$$

Kroneckersymbol:

$$\delta_{ij} = \delta^{ij} = \delta_i^j = \delta^i_j = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases} .$$

Permutationssymbol:

$$e_{ijk} = e^{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{für } ijk = 123, 231, 312 \text{ (gerade Permutation)} \\ -1 & \text{für } ijk = 132, 213, 321 \text{ (ungerade Permutation)} \\ 0 & \text{für doppelt und dreifach auftretende Indizes} \end{cases} .$$

Einsteinsche Summationskonvention: Tritt in einem Produkt ein Index zweimal auf, einmal unten (kovariant) und einmal oben (kontravariant), so ist über diesen Index zu summieren (Summationsindex).

Einfach auftretende Indizes müssen in allen Termen einer Gleichung vorkommen (Gleichungsindizes). Drei- und mehrfach auftretende Indizes sind verboten.

Orthonormale Basis: Die Basisvektoren $\mathbf{e}_i = \mathbf{e}^i$ der orthonormalen Basis stehen senkrecht aufeinander und besitzen die Einheitslänge eins. Hier im speziellen gilt $\mathbf{e}_i = \mathbf{e}^i$.

Darstellung von Vektoren (Tensoren 1. Stufe):

$$\mathbf{a} = a_i \mathbf{G}^i = a^i \mathbf{G}_i .$$

Vektoren mit kovarianten Komponenten a_i heißen kovariante Vektoren. Vektoren mit kontravarianten Komponenten a^i heißen kontravariante Vektoren. Die kovarianten Basisvektoren \mathbf{G}_i stehen im allgemeinen nicht senkrecht aufeinander und sind nicht normiert, die kontravarianten Basisvektoren \mathbf{G}^i ebenso. Die Basisvektoren können mit

$$\mathbf{G}_i = [\mathbf{G}_i]^k \mathbf{e}_k , \quad \mathbf{G}^i = [\mathbf{G}^i]^k \mathbf{e}_k \quad (\text{A.1})$$

bezüglich der orthonormalen Basis dargestellt werden.

Die Darstellungen im Anhang basieren meist auf den materiellen Basisvektoren \mathbf{G}_i und \mathbf{G}^i der Referenzkonfiguration. Die Übertragung der Darstellungen auf die räumlichen Basisvektoren \mathbf{g}_i und \mathbf{g}^i der Momentankonfiguration ist problemlos möglich.

Addition von Vektoren:

$$\mathbf{a} \pm \mathbf{b} = a_i \mathbf{G}^i \pm b_j \mathbf{G}^j = (a_i \pm b_i) \mathbf{G}^i .$$

$$\text{Regeln: } \mathbf{a} \pm \mathbf{b} = \mathbf{b} \pm \mathbf{a} , \quad (\mathbf{a} \pm \mathbf{b}) \pm \mathbf{c} = \mathbf{a} \pm (\mathbf{b} \pm \mathbf{c}) .$$

Nullvektor:

$$\mathbf{a} \pm \mathbf{0} = \mathbf{a} \quad \text{mit} \quad \mathbf{0} = \sum_{i=1}^3 0 \mathbf{e}_i .$$

Inneres Produkt orthonormaler Basisvektoren: Das innere Produkt wird durch das Punktsymbol \cdot dargestellt.

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} . \quad (\text{A.2})$$

$$\text{Regel: } \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_i .$$

Duale Basis: Duale Basisvektoren \mathbf{G}_i und \mathbf{G}^j stehen senkrecht aufeinander.

$$\mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}^j = \delta_i^j = \mathbf{G}^j \cdot \mathbf{G}_i = \delta^j_i .$$

Metrikoeffizienten:

$$G_{ij} = G_{ji} = \mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}_j = \mathbf{G}_j \cdot \mathbf{G}_i , \quad G^{ij} = G^{ji} = \mathbf{G}^i \cdot \mathbf{G}^j = \mathbf{G}^j \cdot \mathbf{G}^i .$$

Die Metrikoeffizienten sind mit (A.1) und (A.2) berechenbar. Mit ihrer Hilfe können die dualen Basen ineinander überführt werden.

$$\mathbf{G}_i = G_{ij} \mathbf{G}^j, \quad \mathbf{G}^i = G^{ij} \mathbf{G}_j.$$

Inneres Produkt zweier Vektoren:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= (a_i \mathbf{G}^i) \cdot (b_j \mathbf{G}^j) = a_i b_j \mathbf{G}^i \cdot \mathbf{G}^j = a_i b_j G^{ij} \\ &= (a^i \mathbf{G}_i) \cdot (b^j \mathbf{G}_j) = a^i b^j \mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}_j = a^i b^j G_{ij} \\ &= (a_i \mathbf{G}^i) \cdot (b^j \mathbf{G}_j) = a_i b^j \mathbf{G}^i \cdot \mathbf{G}_j = a_i b^j \delta^i_j = a_i b^i \\ &= (a^i \mathbf{G}_i) \cdot (b_j \mathbf{G}^j) = a^i b_j \mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}^j = a^i b_j \delta_i^j = a^i b_i. \end{aligned}$$

$$\text{Regel: } \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}.$$

Das innere Produkt ist wesentlich für die Definitionen der Produkte Tensor mal Vektor, Tensor mal Tensor, der doppelten Kontraktion usw., da bei diesen Operationen immer das innere Produkt zwischen den links und rechts vom Punkt \cdot stehenden Basisvektoren zu bilden ist. Es zeigt sich deutlich der Vorteil dualer Basisvektoren, da dann die Metrikoeffizienten entfallen.

Um Schreibarbeit zu sparen, werden im folgenden nur kovariante Vektoren und Tensoren verwendet. Die Übertragung der Darstellungen auf kontra- und gemischtvariante Tensoren kann problemlos erfolgen.

Betrag eines Vektors: Der Betrag eines Vektors (Länge, Norm) ist unabhängig (invariant) von der gewählten Basis.

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{a_i a_j G^{ij}}.$$

Es ist die Aufspaltung des Vektors in Länge und Richtung möglich.

$$\mathbf{a} = |\mathbf{a}| \mathbf{n} \quad \text{mit} \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}.$$

Winkel zwischen zwei Vektoren:

$$\cos \varphi = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|}.$$

Vektorprodukt:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_i \mathbf{e}^i) \times (b_j \mathbf{e}^j) = a_i b_j \mathbf{e}^i \times \mathbf{e}^j = e^{ijk} a_i b_j \mathbf{e}_k.$$

$$\text{Regeln: } \mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}, \quad |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \varphi.$$

Dyadisches Produkt: Durch Verknüpfung zweier Vektoren mittels des dyadischen Produktes entsteht ein Tensor.

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = (a_i \mathbf{G}^i) \otimes (b_j \mathbf{G}^j) = a_i b_j \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j = A_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j \quad \text{mit} \quad A_{ij} = a_i b_j.$$

Darstellung von Tensoren:

$$\mathbf{A} = A_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j = A^{ij} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j = A_i^j \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}_j = A^i_j \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}^j .$$

Tensoren mit den Komponenten A_{ij} , A^{ij} , A_i^j und A^i_j heißen ko-, kontra-, gemischt ko-kontra- und gemischt kontra-ko-variante Tensoren.

Addition von Tensoren:

$$\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = (A_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j) \pm (B_{kl} \mathbf{G}^k \otimes \mathbf{G}^l) = (A_{ij} \pm B_{ij}) \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j .$$

$$\text{Regeln: } \mathbf{A} \pm \mathbf{B} = \mathbf{B} \pm \mathbf{A} , (\mathbf{A} \pm \mathbf{B}) \pm \mathbf{C} = \mathbf{A} \pm (\mathbf{B} \pm \mathbf{C}) .$$

Nulltensor: (hier gleich bezeichnet wie Nullvektor)

$$\mathbf{A} \pm \mathbf{0} = \mathbf{A} \quad \text{mit} \quad \mathbf{0} = \sum_{i,j=1}^3 0 \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j .$$

$$\text{Regeln: } \mathbf{A} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{0} , \quad \mathbf{0} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} .$$

Einfache Kontraktion: Auf die links und rechts vom Punktsymbol \cdot stehenden Basisvektoren wird das innere Produkt angewandt (siehe auch Produkt von Tensoren).

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{a} = (A_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j) \cdot (a_k \mathbf{G}^k) = A_{ij} a_k G^{jk} \mathbf{G}^i ,$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{A} = (a_k \mathbf{G}^k) \cdot (A_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j) = A_{ij} a_k G^{ki} \mathbf{G}^j .$$

$$\text{Regeln: } \mathbf{A} \cdot (\mathbf{a} \pm \mathbf{b}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{a} \pm \mathbf{A} \cdot \mathbf{b} , (\mathbf{A} \pm \mathbf{B}) \cdot \mathbf{a} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{a} \pm \mathbf{B} \cdot \mathbf{a} .$$

Metriktenor:

$$\mathbf{G} = G_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j = \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}_i =$$

$$\mathbf{G}^T = G_{ji} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j = \mathbf{G}_j \otimes \mathbf{G}^j =$$

$$\mathbf{G}^{-1} = G^{ij} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j = \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}^i =$$

$$\mathbf{G}^{-T} = G^{ji} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j = \mathbf{G}^j \otimes \mathbf{G}_j .$$

Transponierter Tensor:

$$\mathbf{A}^T = (A_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j)^T = A_{ji} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j = A_{ij} \mathbf{G}^j \otimes \mathbf{G}^i .$$

$$\text{Regeln: } \mathbf{A} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{A}^T , \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{a} ,$$

$$(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A} , \quad (\alpha \mathbf{A})^T = \alpha \mathbf{A}^T ,$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T , \quad (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T .$$

Symmetrischer Tensor:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^T .$$

$$\text{Regel: } \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-T} \quad \text{mit} \quad \mathbf{A}^{-T} = (\mathbf{A}^{-1})^T = (\mathbf{A}^T)^{-1} .$$

Antisymmetrischer Tensor:

$$\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T .$$

$$\text{Regel: } \text{tr} \mathbf{A} = 0 .$$

Symmetrische und antisymmetrische Zerlegung eines Tensors:

$$\mathbf{A} = \text{sym}[\mathbf{A}] + \text{ant}[\mathbf{A}] \quad \text{mit} \quad \text{sym}[\mathbf{A}] = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) , \quad \text{ant}[\mathbf{A}] = \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T) .$$

Produkt von Tensoren: (Tensorprodukt)

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = (A_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j) \cdot (B_{kl} \mathbf{G}^k \otimes \mathbf{G}^l) = A_{ij} B_{kl} \mathbf{G}^{ijk} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^l .$$

$$\begin{aligned} \text{Regeln: } \mathbf{A}^2 &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} , \quad \alpha(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\alpha \mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot (\alpha \mathbf{B}) , \\ (\alpha \mathbf{A}) \cdot (\beta \mathbf{B}) &= \alpha \beta (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) , \quad (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) , \\ \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \pm \mathbf{C}) &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \pm \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} . \end{aligned}$$

Das Tensorprodukt ist im allgemeinen nicht kommutativ, d.h. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$.

Einstensor:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \quad \text{mit} \quad \mathbf{1} = \delta^{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = \mathbf{G} .$$

Anmerkung: Für den Einstensor gilt stets $\mathbf{1} = \mathbf{1}^T = \mathbf{1}^{-1} = \mathbf{1}^{-T}$. Diese Eigenschaften $\mathbf{G} = \mathbf{G}^T = \mathbf{G}^{-1} = \mathbf{G}^{-T}$ werden ebenfalls vom Metriktensor erfüllt.

Inverser Tensor:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{1} .$$

$$\text{Regeln: } (\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A} , \quad (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1} .$$

Determinante eines Tensors:

$$\det \mathbf{A} = \det(A_{ij} \mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j) = \epsilon^{ijk} A_{1i} A_{2j} A_{3k} .$$

$$\text{Regeln: } \det(\alpha \mathbf{A}) = \alpha^3 \det \mathbf{A} , \quad \det \mathbf{A} = \det(\mathbf{A}^T) ,$$

$$\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B} , \quad \det(\mathbf{A}^{-1}) = (\det \mathbf{A})^{-1} .$$

Adjungierter Tensor:

$$\mathbf{A}_{\text{adj}} = \det \mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} .$$

Kofaktortensor:

$$\mathbf{A}_{\text{kof}} = \det \mathbf{A} \mathbf{A}^{-T} .$$

Doppelte Kontraktion: Auf die Basisvektoren der links und rechts vom Doppelpunktsymbol : stehenden dyadischen Produkte wird das innere Produkt angewandt (hier inneres Produkt zweier Tensoren).

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} = (A_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j) : (B_{kl} \mathbf{G}^k \otimes \mathbf{G}^l) = A_{ij} B_{kl} G^{ik} G^{jl} .$$

$$\text{Regeln: } \mathbf{A} : \mathbf{B} = \mathbf{B} : \mathbf{A} ,$$

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} = \mathbf{A} : \text{sym}[\mathbf{B}] \quad \text{für } \mathbf{A} = \mathbf{A}^T .$$

Norm:

$$\|\mathbf{A}\| = \sqrt{\mathbf{A} : \mathbf{A}}$$

Spur: (Trace)

$$\text{tr} \mathbf{A} = \mathbf{A} : \mathbf{1} = \mathbf{1} : \mathbf{A} .$$

$$\text{Regeln: } \text{tr}(\alpha \mathbf{A}) = \alpha \text{tr} \mathbf{A} , \quad \text{tr}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \text{tr}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) ,$$

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} = \text{tr}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^T) = \text{tr}(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B}) .$$

Aufspaltung in Deviator und Kugeltensor:

$$\mathbf{A} = \underbrace{\text{dev} \mathbf{A}}_{\text{Deviator}} + \underbrace{\frac{1}{3} \text{tr} \mathbf{A} \mathbf{1}}_{\text{Kugeltensor}} \quad \text{mit } \text{dev} \mathbf{A} = \mathbf{A} - \frac{1}{3} \text{tr} \mathbf{A} \mathbf{1} .$$

$$\text{Regel: } \text{tr}[\text{dev} \mathbf{A}] = 0 .$$

Grundinvarianten eines Tensors: Die drei Grundinvarianten eines Tensors sind unabhängig (invariant) von der gewählten Basis.

$$I_{\mathbf{A}} = \text{tr} \mathbf{A} ,$$

$$II_{\mathbf{A}} = \frac{1}{2} [(\text{tr} \mathbf{A})^2 - \text{tr}(\mathbf{A}^2)] = \text{tr} \mathbf{A}_{\text{kof}} = \det \mathbf{A} \text{tr} \mathbf{A}^{-1} ,$$

$$III_{\mathbf{A}} = \det \mathbf{A} = \frac{1}{6} [(\text{tr} \mathbf{A})^3 - 3 \text{tr} \mathbf{A} \text{tr}(\mathbf{A}^2) + 2 \text{tr}(\mathbf{A}^3)] .$$

Eigenwerte und Eigenvektoren: Aus dem Eigenwertproblem

$$(\mathbf{A} - \eta \mathbf{1}) \cdot \mathbf{n} = 0$$

folgt die charakteristische Gleichung

$$\det(\mathbf{A} - \eta \mathbf{1}) = \eta^3 - I_{\mathbf{A}} \eta^2 + II_{\mathbf{A}} \eta - III_{\mathbf{A}} \equiv 0 ,$$

aus der die drei Eigenwerte η_1 , η_2 und η_3 berechnet werden können. Die Auswertung des Eigenwertproblems liefert die drei zugeordneten Eigenvektoren \mathbf{n}_1 , \mathbf{n}_2 und \mathbf{n}_3 .

Die Eigenvektoren stehen orthogonal zueinander. Hier im speziellen haben die Eigenvektoren die Einheitslänge eins.

Spektraldarstellung: Ein Tensor läßt sich als Produkt

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^3 \eta_i \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i$$

aus seinen Eigenwerten und seiner Eigenvektorbasis darstellen.

Beliebige skalare Exponenten:

$$\mathbf{A}^\alpha = \sum_{i=1}^3 (\eta_i)^\alpha \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i .$$

$$\text{Regel: } \mathbf{A} = (\mathbf{A}^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = (\mathbf{A}^{\frac{1}{\alpha}})^\alpha .$$

Exponentialfunktion und Logarithmus:

$$\exp[\mathbf{A}] = \sum_{i=1}^3 \exp[\eta_i] \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i , \quad \ln[\mathbf{A}] = \sum_{i=1}^3 \ln[\eta_i] \mathbf{n}_i \otimes \mathbf{n}_i .$$

$$\text{Regel: } \mathbf{A} = \ln[\exp[\mathbf{A}]] = \exp[\ln[\mathbf{A}]] .$$

Koaxialität: Zwei symmetrische Tensoren \mathbf{A} und \mathbf{B} sind koaxial, wenn deren Eigenvektoren identisch sind. Für koaxiale Tensoren gilt das Kommutativgesetz

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} .$$

Eigentlich orthogonaler Tensor: Der eigentlich orthogonale Tensor besitzt die Eigenschaften

$$\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^{-1} , \quad \det \mathbf{Q} = +1 \quad \text{mit } \mathbf{Q} \in SO(3)$$

und beschreibt eine reine Starrkörperrotation. Das Produkt $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{a}$ ergibt die Drehung des Vektors \mathbf{a} unter Beibehaltung dessen Länge. Das Produkt $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{Q}^T$ liefert die Starrkörperdrehung des Tensors \mathbf{A} unter Beibehaltung dessen Invarianten.

Vierstufiger Tensor:

$$\mathbb{C} = C_{ijkl} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j \otimes \mathbf{G}^k \otimes \mathbf{G}^l = C^{ijkl} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j \otimes \mathbf{G}_k \otimes \mathbf{G}_l .$$

Es sind 14 weitere gemischtvariante Kombinationen möglich.

Doppelte Kontraktion zwischen vier- und zweistufigem Tensor:

$$\mathbb{C} : \mathbf{A} = (C_{ijkl} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j \otimes \mathbf{G}^k \otimes \mathbf{G}^l) : (A_{mn} \mathbf{G}^m \otimes \mathbf{G}^n) = C_{ijkl} A_{mn} G^{km} G^{ln} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j .$$

A.1.2 Tensoranalysis

Ableitung eines Skalars nach einem Vektor:

$$\partial_{\mathbf{a}}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial a_i} \mathbf{G}_i \quad \text{mit } \mathbf{a} = a_i \mathbf{G}^i .$$

Ableitung eines Skalars nach einem Tensor:

$$\partial_{\mathbf{A}}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial A_{ij}} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j \quad \text{mit } \mathbf{A} = A_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j .$$

Zeitableitung eines Vektors, Tensors: (hier $\overline{(\dots)} = \frac{d}{dt}(\dots)$ als Abkürzung)

$$\dot{\mathbf{a}} = \overline{a_i \mathbf{g}^i} = \dot{a}_i \mathbf{g}^i + a_i \dot{\mathbf{g}}^i ,$$

$$\dot{\mathbf{A}} = \overline{A_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j} = \dot{A}_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j + A_{ij} \dot{\mathbf{g}}^i \otimes \mathbf{g}^j + A_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \dot{\mathbf{g}}^j .$$

Gâteaux-Ableitung: Ist $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{X})$ eine skalar-, vektor- oder tensorwertige Funktion einer skalar-, vektor- oder tensorwertigen Größe \mathbf{X} , dann ist

$$D[\mathbf{A}(\mathbf{X})]_{\Delta\mathbf{X}} = \frac{d}{d\varepsilon} [\mathbf{A}(\mathbf{X} + \varepsilon\Delta\mathbf{X})]_{\varepsilon=0}$$

die Gâteaux-Ableitung (Richtungsableitung) der Funktion \mathbf{A} in Richtung von $\Delta\mathbf{X}$ (vergleiche HUGHES & PISTER [1978]).

Linearisierung: Ist $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{X})$ eine skalar-, vektor- oder tensorwertige Funktion einer skalar-, vektor- oder tensorwertigen Größe \mathbf{X} , dann ist

$$\text{Lin}[\mathbf{A}(\mathbf{X})]_{\overline{\mathbf{X}}, \Delta\mathbf{X}} = [\mathbf{A}(\mathbf{X}) + D[\mathbf{A}(\mathbf{X})]_{\Delta\mathbf{X}}]_{\mathbf{X}=\overline{\mathbf{X}}}$$

die Linearisierung der Funktion \mathbf{A} an der Stelle $\overline{\mathbf{X}}$ in Richtung von $\Delta\mathbf{X}$ (vergleiche HUGHES & PISTER [1978]).

Gradient: Der Gradient wird durch die partielle Ableitung der Größe nach den konvektiven Koordinaten θ_i und durch das dyadische Produkt von rechts mit den zugeordneten kontravarianten Basisvektoren \mathbf{G}^i bzw. \mathbf{g}^i gebildet:

$$\text{materiell: } \text{Grad}(\dots) = \partial_{\mathbf{X}}(\dots) = \partial_{\theta_i}(\dots) \otimes \partial_{\mathbf{X}}\theta^i = \partial_{\theta_i}(\dots) \otimes \mathbf{G}^i ,$$

$$\text{räumlich: } \text{grad}(\dots) = \partial_{\mathbf{x}}(\dots) = \partial_{\theta_i}(\dots) \otimes \partial_{\mathbf{x}}\theta^i = \partial_{\theta_i}(\dots) \otimes \mathbf{g}^i .$$

Beispiel: $\mathbf{F} = \text{Grad}\mathbf{x} = \partial_{\mathbf{X}}\mathbf{x} = \partial_{\theta_i}\mathbf{x} \otimes \partial_{\mathbf{X}}\theta^i = \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}^i$.

Divergenz: Die Divergenz wird durch die partielle Ableitung der Größe nach den konvektiven Koordinaten θ_i und durch das innere Produkt von rechts mit den zugeordneten kontravarianten Basisvektoren \mathbf{G}^i bzw. \mathbf{g}^i gebildet:

$$\begin{aligned} \text{materiell: } \operatorname{Div}(\dots) &= \partial_{\theta_i}(\dots) \cdot \partial_{\mathbf{X}}\theta^i = \partial_{\theta_i}(\dots) \cdot \mathbf{G}^i, \\ \text{räumlich: } \operatorname{div}(\dots) &= \partial_{\theta_i}(\dots) \cdot \partial_{\mathbf{x}}\theta^i = \partial_{\theta_i}(\dots) \cdot \mathbf{g}^i. \end{aligned}$$

Rechenregeln für Gradient und Divergenz: Die Rechenregeln für den materiellen Fall gelten analog für den räumlichen Fall.

$$\begin{aligned} \operatorname{Div}\mathbf{A} &= \operatorname{Grad}\mathbf{A} : \mathbf{1} = \operatorname{Grad}\mathbf{A} : \mathbf{G}, \\ \operatorname{Div}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}) &= \mathbf{a} \cdot \operatorname{Div}\mathbf{A}^T + \mathbf{A}^T : \operatorname{Grad}\mathbf{a} \\ &\text{und viele weitere mehr.} \end{aligned}$$

Divergenztheorem: (Gaußscher Integralsatz)

$$\int_{\mathcal{B}_t} \operatorname{div}\mathbf{A} \, dv = \int_{\partial\mathcal{B}_t} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, da \quad (\mathbf{n} \text{ ist äußere Flächennormale}).$$

Anwendung auf den Spannungstensor:

$$\int_{\mathcal{B}_t} \operatorname{div}\boldsymbol{\sigma} \, dv = \int_{\partial\mathcal{B}_t} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \, da = \int_{\partial\mathcal{B}_0} \mathbf{P} \cdot \mathbf{N} \, dA = \int_{\mathcal{B}_0} \operatorname{Div}\mathbf{P} \, dV.$$

Push-Forward und Pull-Back Transformationen: Die Push-Forward Operation besitzt die Eigenschaft, daß materielle Größen bezogen auf die konvektiven Basisvektoren \mathbf{G}_i der Referenzkonfiguration in räumliche Größen bezogen auf die konvektiven Basisvektoren \mathbf{g}_i der Momentankonfiguration unter Beibehaltung der Komponenten transformiert werden. Umgekehrt transformiert die Pull-Back Operation räumliche Größen bezogen auf die konvektiven Basisvektoren \mathbf{g}_i der Momentankonfiguration in materielle Größen bezogen auf die konvektiven Basisvektoren \mathbf{G}_i der Referenzkonfiguration unter Beibehaltung der Komponenten. Es wird außerdem implizit vorausgesetzt, daß die Push-Forward Operation die Komposition mit $\circ\varphi_t^{-1}$ und die Pull-Back Operation die Komposition mit $\circ\varphi_t$ beinhalten. Der Pull-Back einer Push-Forward Operation und der Push-Forward einer Pull-Back Operation ergeben wieder die ursprüngliche Größe.

Skalare:

$$\begin{aligned} \text{Push-Forward} &: \varphi_{t*}[\alpha] = \alpha \circ \varphi_t^{-1} \quad \text{mit } \alpha = \text{Skalar} \quad . \\ \text{Pull-Back} &: \varphi_t^*[\alpha] = \alpha \circ \varphi_t \quad \text{mit } \alpha = \text{Skalar} \quad . \end{aligned}$$

Vektoren:

Push-Forward :

$$\begin{aligned}\varphi_{t*}[\mathbf{a}] &= a_i \mathbf{g}^i = \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{a} \quad \text{mit } \mathbf{a} = a_i \mathbf{G}^i, \\ \varphi_{t*}[\mathbf{a}] &= a^i \mathbf{g}_i = \mathbf{F} \cdot \mathbf{a} \quad \text{mit } \mathbf{a} = a^i \mathbf{G}_i.\end{aligned}$$

Pull-Back :

$$\begin{aligned}\varphi_t^*[\mathbf{a}] &= a_i \mathbf{G}^i = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{a} \quad \text{mit } \mathbf{a} = a_i \mathbf{g}^i, \\ \varphi_t^*[\mathbf{a}] &= a^i \mathbf{G}_i = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{a} \quad \text{mit } \mathbf{a} = a^i \mathbf{g}_i.\end{aligned}$$

Gradienten: (Grad = $\partial_{\mathbf{X}}$, grad = $\partial_{\mathbf{x}}$)

Push-Forward :

$$\begin{aligned}\text{grad}\alpha &= \varphi_{t*}[\text{Grad}\alpha] = \mathbf{F}^{-T} \cdot \text{Grad}\alpha \quad \text{mit } \alpha = \text{Skalar}, \\ \text{grad}\mathbf{a} &= \varphi_{t*}[\text{Grad}\mathbf{a}] = \text{Grad}\mathbf{a} \cdot \mathbf{F}^{-1} \quad \text{mit } \mathbf{a} = \text{Vektor}.\end{aligned}$$

Pull-Back :

$$\begin{aligned}\text{Grad}\alpha &= \varphi_t^*[\text{grad}\alpha] = \mathbf{F}^T \cdot \text{grad}\alpha \quad \text{mit } \alpha = \text{Skalar}, \\ \text{Grad}\mathbf{a} &= \varphi_t^*[\text{grad}\mathbf{a}] = \text{grad}\mathbf{a} \cdot \mathbf{F} \quad \text{mit } \mathbf{a} = \text{Vektor}.\end{aligned}$$

Zweistufige Tensoren:

Push-Forward :

$$\begin{aligned}\varphi_{t*}[\mathbf{A}] &= A_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j = \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{F}^{-1} \quad \text{mit } \mathbf{A} = A_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j, \\ \varphi_{t*}[\mathbf{A}] &= A^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j = \mathbf{F} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{F}^T \quad \text{mit } \mathbf{A} = A^{ij} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j.\end{aligned}$$

Pull-Back :

$$\begin{aligned}\varphi_t^*[\mathbf{A}] &= A_{ij} \mathbf{G}^i \otimes \mathbf{G}^j = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{F} \quad \text{mit } \mathbf{A} = A_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j, \\ \varphi_t^*[\mathbf{A}] &= A^{ij} \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{G}_j = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{F}^{-T} \quad \text{mit } \mathbf{A} = A^{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j.\end{aligned}$$

Vierstufige kontravariante Tensoren:

$$\text{Push-Forward} : \mathfrak{c} = \varphi_{t*}[\mathfrak{C}] = (\mathbf{F} \otimes \mathbf{F})^{T*} : \mathfrak{C} : (\mathbf{F}^T \otimes \mathbf{F}^T)^{T*}.$$

$$\text{Pull-Back} : \mathfrak{C} = \varphi_t^*[\mathfrak{c}] = (\mathbf{F}^{-1} \otimes \mathbf{F}^{-1})^{T*} : \mathfrak{c} : (\mathbf{F}^{-T} \otimes \mathbf{F}^{-T})^{T*}.$$

Hierin wird die spezielle Transponierte $(\dots)^{T*}$ eines vierstufigen Tensors verwendet, die sich durch Vertauschen des zweiten und dritten Basisvektors in der vierstufigen Basisdyade ergibt. Bei Voraussetzung einer kartesischen Basis erhält man in Indexschreibweise:

$$\text{Push-Forward} : c^{ijkl} = F^i_I F^j_J C^{IJKL} F^k_K F^l_L.$$

$$\text{Pull-Back} : C^{IJKL} = [F^{-1}]^I_i [F^{-1}]^J_j c^{ijkl} [F^{-1}]^K_k [F^{-1}]^L_l.$$

Lie-Ableitung: Die Lie-Ableitung eines räumlichen zweistufigen Tensors besteht aus der Pull-Back Operation des Tensors, der Durchführung der materiellen Zeitableitung und der anschließenden Push-Forward Operation

$$\mathcal{L}_V \mathbf{A} = \phi_{t*} \left[\frac{d}{dt} \phi_t^* [\mathbf{A}] \right] .$$

Hierin sind die Pull-Back Operation durch ϕ_t^* und die Push-Forward Operation durch ϕ_{t*} gegeben. Es ist zu beachten, daß die Pull-Back Operationen und Push-Forward Operationen für ko-, kontra- und gemischtvariante Tensoren verschieden durchzuführen sind. In dieser Arbeit werden die Verzerrungstensoren kovariant und die Spannungstensoren kontravariant definiert.

Je nachdem, mit welchen Tensoren die Pull-Back und Push-Forward Operationen ausgeführt werden und welche Spannungstensoren zugrunde gelegt werden, spricht man von Oldroyd, Truesdell, Green-Naghdi, Jaumann etc. Spannungsraten (Spannungsflüssen). In dieser Arbeit wird ausschließlich die in (2.1) eingeführte Abbildung $\phi_t = \varphi_t$ verwendet, d.h. die Pull-Back und Push-Forward Operationen erfolgen mittels des Deformationsgradienten \mathbf{F} . Man erhält somit Oldroydsche Raten, die oft mit

$$\overset{\circ}{\mathbf{A}} = \varphi_{t*} \left[\frac{d}{dt} \varphi_t^* [\mathbf{A}] \right] \quad (\text{A.3})$$

symbolisch abgekürzt werden.

Die zeitliche Änderung eines Tensors kann in zwei Anteile aufgespalten werden: die zeitliche Änderung der Tensorkomponenten und die zeitliche Änderung der Basisvektoren. Da die Basisvektoren der Referenzkonfiguration zeitlich unveränderlich sind, werden bei der materiellen Zeitableitung in (A.3) nur die Komponenten abgeleitet. Die Oldroydsche Rate gibt lediglich die zeitliche Änderung der Tensorkomponente an. Die zeitliche Änderung der Basis der Momentankonfiguration wird nicht berücksichtigt. Die Oldroydsche Rate ist also die zeitliche Änderung eines Tensors, die vom konvektiven mitbewegten Basissystem „wahrgenommen“ wird.

Die Anwendung der Ableitungsvorschrift (A.3) auf den kontravarianten Kirchhoff Spannungstensor liefert den Oldroydschen Spannungsfluß

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}} = \dot{\boldsymbol{\tau}} - \mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{l}^T .$$

Hierbei zeigt sich deutlich, daß die zeitliche Änderung $\dot{\boldsymbol{\tau}}$ des Kirchhoff Spannungstensors in die zeitliche Änderung $\overset{\circ}{\boldsymbol{\tau}}$ der Tensorkomponenten und die zeitliche Änderung $\mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{l}^T$ der Basisvektoren aufgeteilt ist. Die Anwendung der Ableitungsvorschrift (A.3) auf den kovarianten Almansi Verzerrungstensor liefert die Rate

$$\overset{\circ}{\mathbf{e}} = \mathbf{d} = \dot{\mathbf{e}} + \mathbf{e} \cdot \mathbf{l} + \mathbf{l}^T \cdot \mathbf{e} .$$

Für eine weiterführende Behandlung sei auf das Schrifttum verwiesen, z.B. MARDEN & HUGHES [1983], SIMO [1985], WRIGGERS [1988], WRIGGERS & STEIN [1988], SIMO & HUGHES [1998].

A.2 Optimierungsproblem mit Nebenbedingungen

In der Plastizitätstheorie existiert die Forderung nach maximaler plastischer Dissipation. Als Nebenbedingung tritt dabei die Fließbedingung als Ungleichheitsbedingung auf. Bei dem nachfolgend beschriebenen Optimierungsproblem werden deshalb nur Ungleichheitsbedingungen berücksichtigt. Eine ausführliche Beschreibung der mathematischen Handhabung von Optimierungsproblemen mit Nebenbedingungen findet sich in LUENBERGER [1984].

Grundlage des Optimierungsproblems seien eine mindestens einmal stetig differenzierbare skalarwertige Funktion h und mindestens einmal stetig differenzierbare Nebenbedingungen \mathbf{g} . Es wird gefordert:

$$\begin{array}{l} \text{Minimiere} \quad h(\mathbf{x}) \\ \text{unter Erfüllung von} \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \quad \text{d.h.} \quad g_j(\mathbf{x}) \leq 0 \quad \text{mit} \quad j = 1, \dots, n \end{array} \quad (\text{A.4})$$

A.2.1 Kuhn-Tucker Bedingungen

An der Stelle \mathbf{x}^*

$$\begin{array}{l} \text{besitze die Funktion } h(\mathbf{x}) \text{ ein relatives Minimum} \\ \text{und die Nebenbedingungen } \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \text{ seien erfüllt.} \end{array} \quad (\text{A.5})$$

Dann gibt es einen Vektor $\boldsymbol{\gamma} \in R^n$ mit $\boldsymbol{\gamma} \geq \mathbf{0}$, so daß

$$\begin{array}{l} \partial_{\mathbf{x}} h(\mathbf{x}^*) + [\partial_{\mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}^*)]^T \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{0} \quad , \\ \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{g}(\mathbf{x}^*) = 0 \end{array} \quad (\text{A.6})$$

gilt. Die Gleichungen (A.6) sind notwendige Bedingungen zur exakten Erfüllung von (A.5). In dem Vektor $\boldsymbol{\gamma}$ sind die Lagrangeschen Multiplikatoren γ_j angeordnet. Üblicherweise bezeichnet man die Bedingungen $\mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\gamma} \geq \mathbf{0}$ und $\boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0$ als die Kuhn-Tucker Bedingungen.

A.2.2 Penalty Verfahren

Das Optimierungsproblem mit Nebenbedingungen (A.4) wird in ein Optimierungsproblem ohne Nebenbedingungen überführt. Dabei werden die Nebenbedingungen derart im ursprünglichen Optimierungsproblem berücksichtigt, daß die gefundene Stelle nur näherungsweise eine Minimumstelle ist und die Nebenbedingungen dort im allgemeinen nur näherungsweise erfüllt sind. Gefordert wird:

$$\text{Minimiere} \quad h(\mathbf{x}) + cP(\mathbf{x}) \quad . \quad (\text{A.7})$$

Hierin ist der Penalty Parameter c eine gegebene positive Konstante und $P(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n P_j(\mathbf{x})$ ist eine stetige monoton steigende Penalty Funktion mit $P_j(\mathbf{x}) = 0$ für

$g_j(\mathbf{x}) \leq 0$ und $P_j(\mathbf{x}) > 0$ für $g_j(\mathbf{x}) > 0$. Somit ist gewährleistet, daß $P(\mathbf{x})$ lediglich eine Funktion der verletzten Nebenbedingungen ist. Für gegebene Werte c_k des Penalty Parameters ist

$$\partial_{\mathbf{x}} h(\mathbf{x}_k) + c_k \partial_{\mathbf{x}} P(\mathbf{x}_k) = \mathbf{0} \quad (\text{A.8})$$

eine notwendige Bedingung zur Erfüllung von (A.7) und liefert den zugehörigen Lösungsvektor \mathbf{x}_k .

Für zunehmende Werte von c konvergiert die Lösung des Minimierungsproblems (A.7) für den Grenzfall $c \rightarrow \infty$ gegen die exakte Lösung von (A.4), d.h. $\lim_{c_k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}^*$. Wegen schlechter Konditionierung des Minimierungsproblems (A.7) für große c sind dieser Methode jedoch Grenzen in der Approximation gesetzt.

Es soll nun eine Funktion

$$P(\mathbf{x}) = \beta(\mathbf{g}^+(\mathbf{x})) = \sum_{j=1}^n \beta_j(g_j^+(\mathbf{x})) \quad \text{mit}$$

$$g_j^+(\mathbf{x}) = \max[0, g_j(\mathbf{x})] = \begin{cases} 0 & \text{für } g_j(\mathbf{x}) \leq 0 \\ g_j(\mathbf{x}) & \text{für } g_j(\mathbf{x}) > 0 \end{cases}$$

gewählt werden, welche die oben angeführten Eigenschaften von P aufweist. Die Anwendung der Kettenregel bei der Differentiation des zweiten Termes in (A.8) liefert $\partial_{\mathbf{x}} P(\mathbf{x}) = [\partial_{\mathbf{x}} \mathbf{g}^+(\mathbf{x})]^T \partial_{\mathbf{g}^+} \beta(\mathbf{g}^+)$. Es ist oft vorteilhaft, z.B. bei der algorithmischen Umsetzung des Verfahrens, die Stetigkeit der Ableitung $\partial_{\mathbf{x}} P(\mathbf{x})$ zu fordern. Diese kann gewährleistet werden, wenn alle β_j mindestens einmal stetig differenzierbar sind und für $g_j^+ = 0$ automatisch $\partial_{g_j^+} \beta_j = 0$ folgt. Man erhält somit

$$\partial_{\mathbf{x}} h(\mathbf{x}_k) + c_k [\partial_{\mathbf{x}} \mathbf{g}^+(\mathbf{x}_k)]^T \partial_{\mathbf{g}^+} \beta(\mathbf{g}^+(\mathbf{x}_k)) = \mathbf{0}$$

als stetige notwendige Bedingung zur Erfüllung von (A.7). Hierin darf jetzt $\partial_{\mathbf{x}} \mathbf{g}^+(\mathbf{x})$ durch $\partial_{\mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x})$ ersetzt werden und es folgt

$$\partial_{\mathbf{x}} h(\mathbf{x}_k) + [\partial_{\mathbf{x}} \mathbf{g}(\mathbf{x}_k)]^T \boldsymbol{\gamma}_k = \mathbf{0} \quad (\text{A.9})$$

mit

$$\boldsymbol{\gamma}_k = c_k \partial_{\mathbf{g}^+} \beta(\mathbf{g}^+(\mathbf{x}_k)) \quad .$$

Jedem gegebenen Penalty Parameter c_k ist ein Vektor der Lagrangeschen Multiplikatoren $\boldsymbol{\gamma}_k$ zugeordnet mit $\lim_{c_k \rightarrow \infty} \boldsymbol{\gamma}_k = \boldsymbol{\gamma}$ (vgl. (A.6)₁ mit (A.9)).

Lebenslauf

Name	Stefan Doll
Geburtsdatum	18. Mai 1967
Geburtsort	Rülzheim (Kreis Germersheim)
Schulbesuch	1973 – 1977 Grundschule Wörth
	1977 – 1986 Staatliches Gymnasium Wörth, Abschluß mit allgemeiner Hochschulreife
Wehrdienst	1986 – 1987
Studium	1987 – 1993 Maschinenbau an der Universität Karlsruhe (TH), Abschluß als Diplom-Ingenieur
Beruf	seit 1993 wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mechanik der Universität Karlsruhe (TH)

