Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. habil. Peter Betsch
Prof. Dr.-Ing. habil. Thomas Seelig

Optimierung des Querschnittes eines Balkens unter Eigengewicht

Felix Rutsch | Bachelorarbeit (2019)

Zusammenfassung

Ein Balken mit Rechteckvollquerschnitt konstanter Breite, aber veränderlicher Höhe wird durch sein Eigengewicht belastet. Unter Voraussetzung stofflicher Homogenität und im Rahmen der Bernoulli-Balkentheorie soll der optimale verlauf der Balkenhöhe $h(x)$ ermittelt werden. Hierzu werden als Zielgrößen (a) die Spannungen (b) die Formänderungsenergie und (c) die Durchbiegung des Balkens untersucht. Als Lagerung des Balkens (Randbedingungen) wird ein Einfeldträger und ein Kragarm betrachtet.

Lösungstechnik

- **Biegerandspannung**
  Die Biegerandspannung unter Eigengewicht soll in **jedem** Querschnitt des Balkens genau die Festigkeit σ_c erreichen.
  Iterative Berechnung: Zunächst wird für eine Gleichlast ($h = konst.$) der optimale Höhenverlauf berechnet. Durch das Entfernen des überzähligen Materials ergibt sich ein neuer Lastverlauf aus Eigengewicht, für welchen wiederrum ein neues $h_{opt}(x)$ errechnet werden kann. Das Verfahren konvergiert auf diese Weise zur Lösung des Optimierungsproblems.
  Numerische Berechnung des Momentenverlaufs:

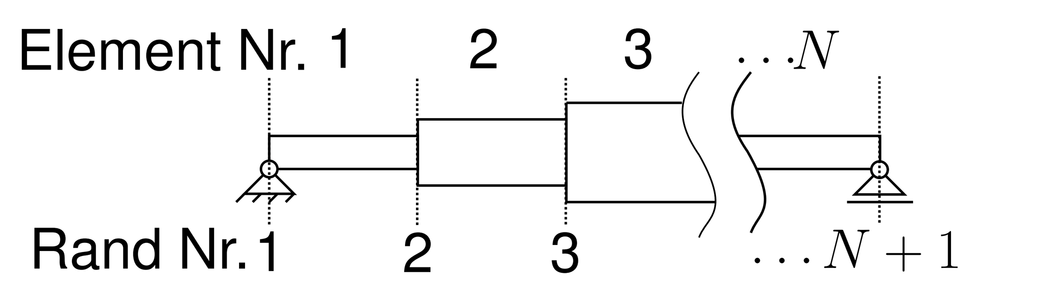

Abbildung 1: *Diskretisierung des Balkens.*

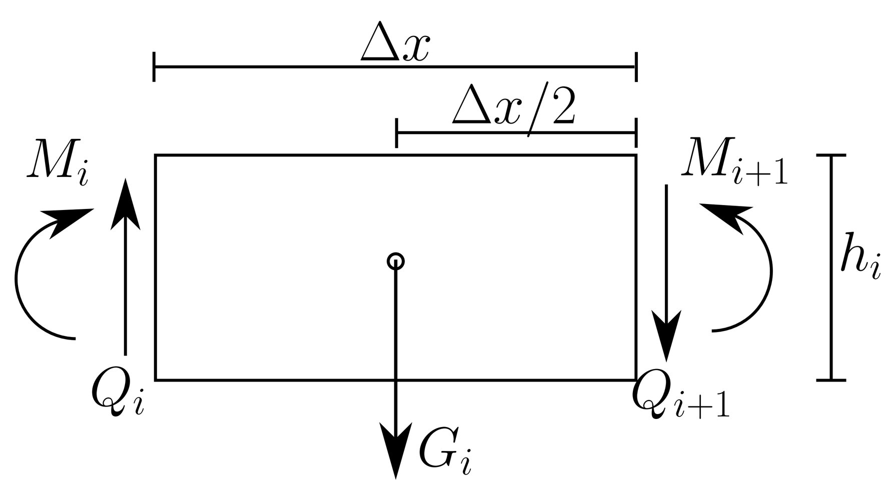

Abbildung 2: *Balkenelement.*

- **Formänderungsenergie**
  In der Arbeit wird gezeigt, dass dieses Kriterium äquivalent zum Randspannungskriterium ist.
- **Durchbiegung**
  Die Durchbiegung des Balkens soll minimal werden. Es wird hierfür eine bestimmte Menge Materialvolumen vorgegeben, welche in optimaler Weise verteilt werden soll.
  - Ritz-Verfahren

$$\Pi_{ges} = \frac{1}{2}\int_0^l \Big(EI(x)\,w''(x)^2 - 2\,q(x)\,w(x)\Big)\,dx \quad \rightarrow \quad min$$

$$w(x) \approx \sum_{j=1}^{K} \underbrace{\sin\Big(\frac{\pi\,x}{l}(2j-1)\Big)}_{=:\,\Phi_j(x)} \cdot w_j\,.$$

$$\sum_{m=1}^{K} w_m \underbrace{\int_0^l \frac{E\,h^3(x)}{12}\,\Phi_n''(x)\,\Phi_m''(x)\,dx}_{\boldsymbol{K}} = \underbrace{\int_0^l \gamma\,h(x)\,\Phi_n(x)\,dx}_{\boldsymbol{P}}$$

- Finite-Differenzen-Methode

$$w''(x) = -\frac{M(x)}{EI(x)}, \qquad w_i'' \approx \frac{w_{i-1} - 2w_i + w_{i+1}}{(\Delta x)^2}$$

$$w(x=0) = w(x=l) = 0$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & & \\ 1 & -2 & 1 & \\ & & \ddots & \\ & & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{M_1}{EI_1} \\ \vdots \\ -\frac{M_N}{EI_N} \end{bmatrix} (\Delta x)^2$$

Ergebnisse

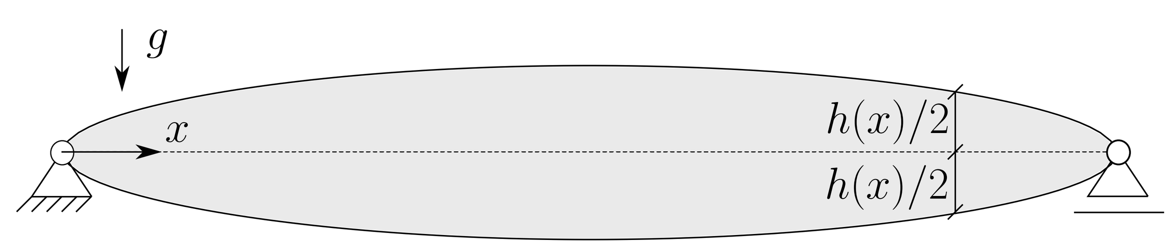

Abbildung 3: *Einfeldträger mit optimiertem Höhenverlauf für den Lastfall Eigengewicht.*

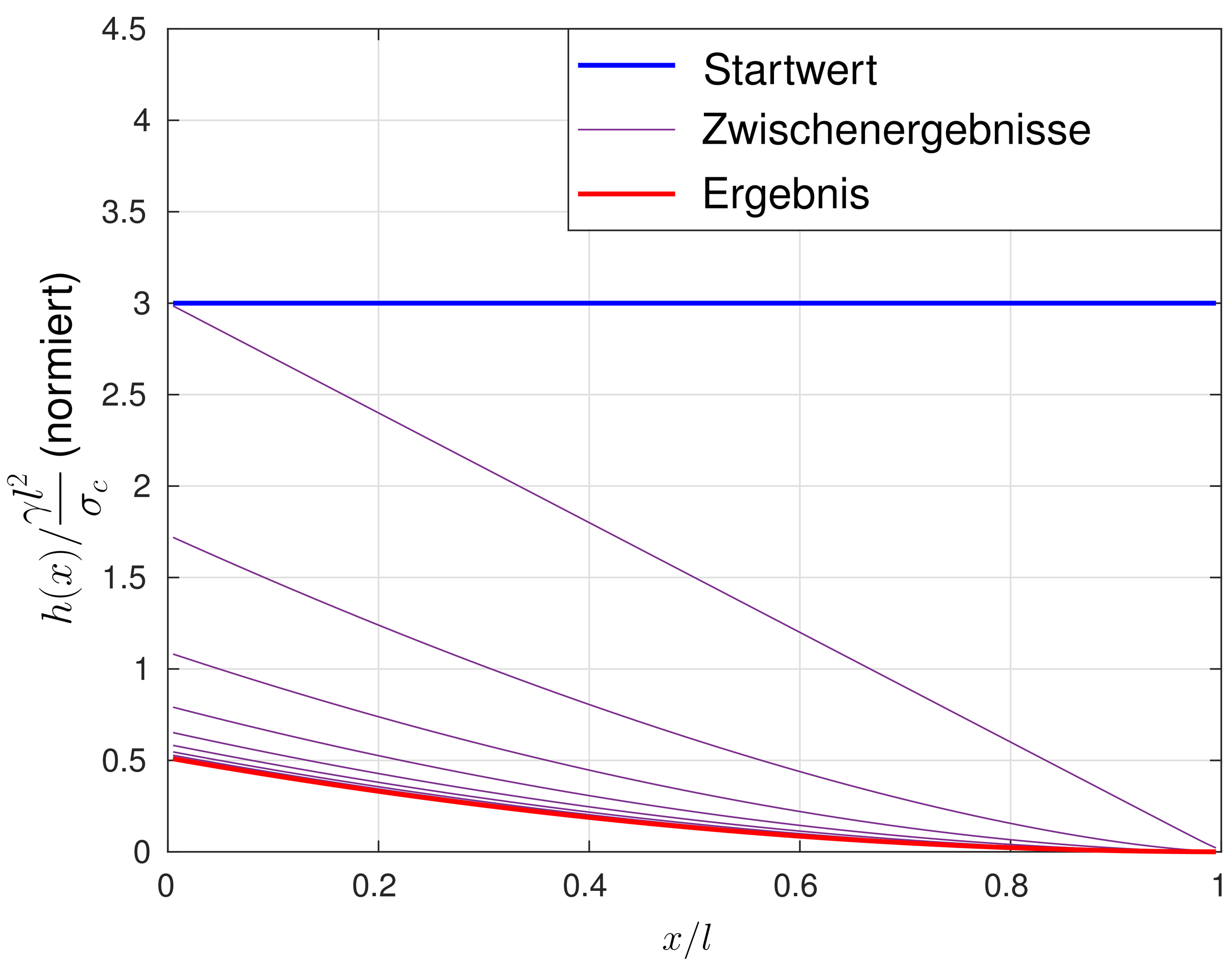

Abbildung 4: *Iterative Bestimmung des optimalen Höhenverlaufs für den auf der linken Seite Eingespannten Kragarm mit Iterationslösungen und Ergebnis nach 20 Iterationsschritten.*

Literatur

[1] Baier, H., Seeßelberg, C., Specht, B. (1994). Optimierung in der Strukturmechanik, Vieweg
[2] Dym, C., Shames, I. (2013). Solid Mechanics – A Variational Approach, Springer.
[3] Gross, D., Hauger, W., Schröder, J., Wall, W. (2018). Technische Mechanik 2. 13. Aufl. Springer Vieweg.
[4] Gross, D., Hauger, W., Wriggers, P. (2018). Technische Mechanik 4. 10. Auflage. Springer Vieweg.
[5] Hahn, M., Reck, M. (2018). Kompaktkurs Finite Elemente für Einsteiger. Springer Vieweg.
[6] Hochbruck, M. (2011) Mit Mathematik zu verlässlichen Simulationen: numerische Verfahren zur Lösung zeitabhängiger Probleme. In: Katrin Wendland, Annette Werner (Hrsg.): Facettenreiche Mathematik: Einblicke in die moderne mathematische Forschung für alle, die mehr von Mathematik verstehen wollen. Vieweg+Teubner, S. 191-214
[7] Seelig, Th. (2014). Einführung in die Kontinuumsmechanik, Vorlesungsskript.