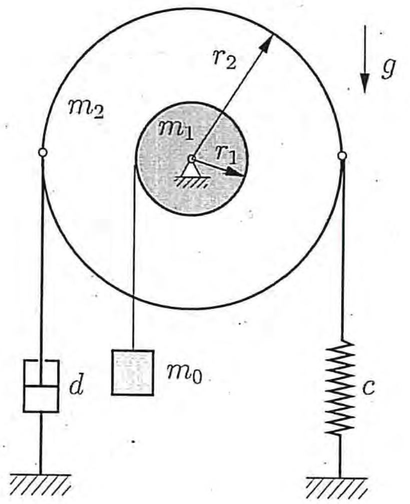
Aufgabe 1



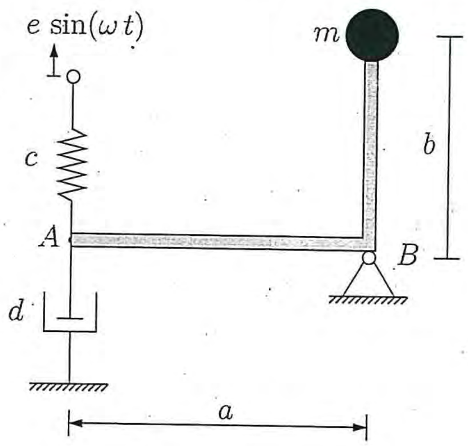
Zwei homogene Kreisscheiben (Radius r_1 bzw. r_2, Masse m_1 bzw. m_2) sind fest miteinander verbunden und reibungsfrei drehbar gelagert. An die große Scheibe sind eine Feder (Steifigkeit c) sowie ein Dämpfer (Dämpfungskonstante d) angeschlossen. An der kleinen Scheibe hängt eine Masse m_0.

a) Schneiden Sie das System frei und stellen Sie die Bewegungsgleichung in Abhängigkeit vom Drehwinkel der Kreisscheiben auf.

b) Bestimmen Sie die Eigenkreisfrequenz sowie den Dämpfungsgrad der Drehschwingung des Systems.

c) Das System befinde sich im statischen Gleichgewicht. Berechnen Sie die Drehbewegung für den Fall, dass das Seil, an dem die Masse m_0 hängt, reißt. Nehmen Sie an, dass das System schwach gedämpft ist.

Aufgabe 2



Am oberen Ende eines in B drehbar gelagerten, masselosen Rahmens ist die Punktmasse m angebracht. Im Punkt A des Rahmens sind ein Dämpfer mit Dämpfungskonstante d sowie eine Feder mit Federsteifigkeit c befestigt. Das System wird durch eine harmonische Bewegung des oberen Federendes zum Schwingen angeregt.

a) Führen Sie ein geeignetes Koordinatensystem am Punkt B ein und schneiden Sie das System frei.

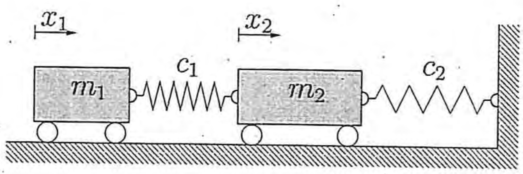
b) Stellen Sie die Schwingungsdifferentialgleichung auf.

c) Bestimmen Sie die partikuläre Lösung.

d) Bei welcher Frequenzverhältnis erreicht die Verstärkungsfaktor V sein Maximum (Nachweis erforderlich)?

Geg.: a, b, m, e, ω, c, d

Aufgabe 3



Ein schwingungsfähiges System besteht aus zwei Massen (m_1, m_2) und zwei Federn (Federsteifigkeiten c_1, c_2). Die beiden Koordinaten x_1 und x_2 beschreiben die Auslenkung von m_1 und m_2 aus der statischen Gleichgewichtslage.

a) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen des Systems.

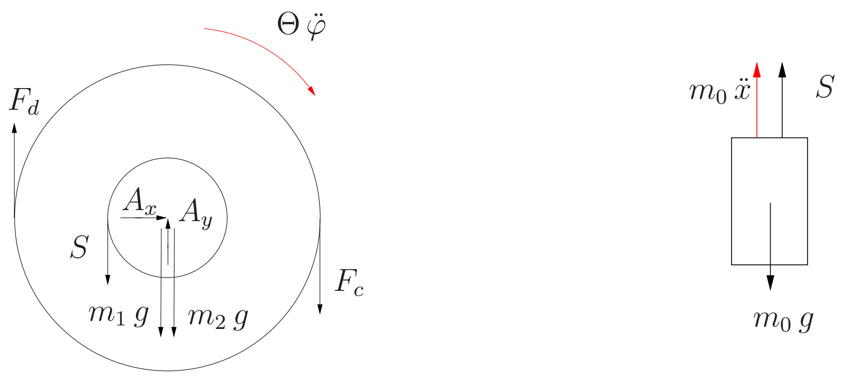
b) Bestimmen Sie die Eigenfrequenzen und den Modalvektor für die erste und zweite Hauptschwingung ($c_1 = c_2 = c$, $m_1 = 2m$, $m_2 = m$)!

c) Stellen Sie die beiden Hauptschwingungen graphisch dar!

Institut für Mechanik	Prüfung in
Prof. Dr.-Ing. habil. P. Betsch	Baudynamik
Prof. Dr.-Ing. habil. Th. Seelig	20.07.2015

Aufgabe 1

a) Freischneiden und erstellen der Bewegungsgleichung



Drallsatz:

$$\Theta\,\ddot{\varphi} + F_c\,r_2 + F_d\,r_2 - S\,r_1 = 0 \tag{1}$$

mit:

$$\Theta = \frac{1}{2}\,m_1\,r_1^2 + \frac{1}{2}\,m_2\,r_2^2 \tag{2}$$

Schwerpunktsatz:

$$S + m_0\,\ddot{x} - m_0\,g = 0 \tag{3}$$

Kinematik:

- Kleine Scheibe und m_0:

$$\ddot{x} = \ddot{\varphi}\,r_1 \tag{4}$$

- Dämpfer:

$$x_1 = \varphi\,r_2, \quad \dot{x}_1 = \dot{\varphi}\,r_2 \tag{5}$$

- Feder und Dämpfer:

$$F_c = c\,x_1, \quad F_d = d\,\dot{x}_1 \tag{6}$$

Einsetzen der Kinematik und des Schwerpunktsatzes in den Drallsatz:

$$\begin{aligned}
\Theta\,\ddot{\varphi} + c\,\varphi\,r_2^2 + d\,\dot{\varphi}\,r_2^2 - m_0\,g\,r_1 + m_0\,\ddot{\varphi}\,r_1^2 = 0 \\
[\,\Theta + m_0\,r_1^2\,]\,\ddot{\varphi} + d\,r_2^2\,\dot{\varphi} + c\,r_2^2\,\varphi = m_0\,g\,r_1 \\
\ddot{\varphi} + \frac{d\,r_2^2}{\Theta + m_0\,r_1^2}\,\dot{\varphi} + \frac{c\,r_2^2}{\Theta + m_0\,r_1^2}\,\varphi = \frac{m_0\,g\,r_1}{\Theta + m_0\,r_1^2}
\end{aligned} \tag{7}$$

b) Eigenkreisfrequenz sowie den Dämpfungsgrad Allgemeine DGL:

$$\ddot{\varphi} + 2\,D\,\omega\,\dot{\varphi} + \omega^2\,\varphi = 0 \tag{8}$$

Somit ergeben sich folgende Zusammenhänge:

$$\begin{aligned} 2\,D\,\omega &= \frac{d\,r_2^2}{\Theta + m_0\,r_1^2} \\ \omega &= \sqrt{\frac{c\,r_2^2}{\Theta + m_0\,r_1^2}} = \sqrt{\frac{2\,c\,r_2^2}{m_1\,r_1^2 + m_2\,r_2^2 + 2\,m_0\,r_1^2}} \end{aligned} \tag{9}$$

Aus diesen beiden Gleichungen lässt sich der Dämpdungsmaß D bestimmen:

$$\begin{aligned} D &= \frac{d\,r_2^{\cancel{2}}}{m_1\,r_1^2 + m_2\,r_2^2 + 2\,m_0\,r_1^2} \cdot \frac{1}{\cancel{r_2}\sqrt{\frac{2\,c}{m_1\,r_1^2 + m_2\,r_2^2 + 2\,m_0\,r_1^2}}} \\ &= \frac{d\,r_2}{2\sqrt{\frac{c}{2}\left[m_1\,r_1^2 + m_2\,r_2^2 + 2\,m_0\,r_1^2\right]}} \end{aligned} \tag{10}$$

c) Lösen der Differentialgleichung: Das System befindet sich vor dem Abschneiden der Masse in der Ruhelage ($\ddot{\varphi}_0(0) = \dot{\varphi}_0(0) = 0$):

$$\varphi_0(0) = \frac{m_0\,g\,r_1}{c\,r_2^2} \tag{11}$$

Dies ist die Anfangsauslenkung für das System nachdenm die Masse abgeschnitten wird. Für schwache Dämpfung wird folgender Lösungsansatz ausgewählt.

$$\varphi(t) = e^{-D\,\omega\,t}\left[A\,\cos(\omega_d\,t) + B\,\sin(\omega_d\,t)\right] \tag{12}$$

mit der gedämpften Eigenfrequenz $\omega_d = \omega\,\sqrt{1 - D^2}$. Die Ableitung liefert die Winkelgeschwindigkeit:

$$\dot{\varphi}(t) = -D\,\omega\,e^{-D\,\omega\,t}\left[A\,\cos(\omega_d\,t) + B\,\sin(\omega_d\,t)\right] + e^{-D\,\omega\,t}\left[-A\,\omega_d\,\sin(\omega_d\,t) + B\,\omega_d\,\cos(\omega_d\,t)\right] \tag{13}$$

Durch die Anfangsbedingungen folgt:

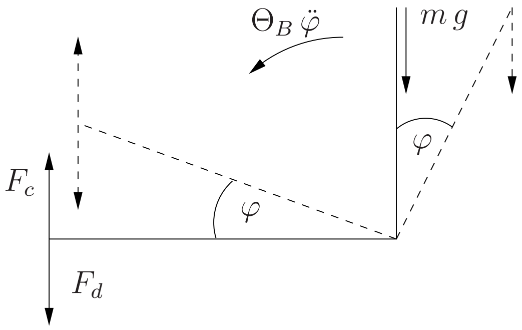
$$\begin{aligned} \varphi(0) &= A = \frac{m_0\,g\,r_1}{c\,r_2^2} \\ \dot{\varphi}(0) &= -D\,\omega\,A + B\,\omega_d = 0 \\ \rightarrow B &= \frac{D\,\omega\,A}{\omega_d} = \frac{D\,\cancel{\omega}\,A}{\omega\sqrt{1 - D^2}} = \frac{m_0\,g\,r_1}{c\,r_2^2}\,\frac{D}{\sqrt{1 - D^2}} \end{aligned} \tag{14}$$

Nun werden A und B in den Lösungsansatz eingesetzt:

$$\varphi(t) = e^{-D\,\omega\,t}\,\frac{m_0\,g\,r_1}{c\,r_2^2}\left[\cos(\omega_d\,t) + \frac{D}{\sqrt{1 - D^2}}\,\sin(\omega_d\,t)\right] \tag{15}$$

Aufgabe 2

a) Aufstellen der Schwingungsdifferentialgleichung:



b)

$$\Theta_B\,\ddot{\varphi} - F_c\,a\,\cos\varphi + F_d\,a\,\cos\varphi - m\,g\,b\,\sin\varphi = 0 \tag{16}$$

mit:

$$\begin{aligned} \Theta_B &= m\,b^2 \\ F_c &= c\,x_c \\ F_d &= d\,\dot{x}_d \end{aligned} \tag{17}$$

Anmerkung: Erregung im Aufhängepunkt der Feder in Richtung x und x_F.

Kinematik:

$$\begin{aligned} x_c &= e\,\sin(\omega\,t) - a\,\sin\varphi \\ x_d &= a\,\sin\varphi \\ \dot{x}_d &= a\,\cos\varphi\,\dot{\varphi} \end{aligned} \tag{18}$$

Einsetzen liefert:

$$m\,b^2\,\ddot{\varphi} - [\,e\,\sin(\,\omega\,t\,) - a\,\sin\varphi\,]\,c\,a\,\cos\varphi + d\,a^2\,\cos^2\varphi\,\dot{\varphi} - m\,g\,b\,\sin\varphi = 0 \tag{19}$$

mit $\sin\varphi \approx \varphi$ und $\cos\varphi \approx 1$ für kleine Ausschläge folgt:

$$m\,b^2\,\ddot{\varphi} - e\,\sin(\,\omega\,t\,)\,c\,a + c\,a^2\,\varphi + d\,a^2\,\dot{\varphi} - m\,g\,b\,\varphi = 0 \tag{20}$$

Somit ergibt sich folgende Schwingungsdifferentialgleichung:

$$\ddot{\varphi} + \underbrace{\frac{d\,a^2}{m\,b^2}}_{2\,D\,\omega_1}\,\dot{\varphi} + \underbrace{\left[\frac{c\,a^2}{m\,b^2} - \frac{g}{b}\right]}_{\omega_1}\,\varphi = \underbrace{\frac{c\,a\,e}{m\,b^2}}_{x_0\,\omega_1^2}\,\sin(\,\omega\,t\,) \tag{21}$$

c) Bestimmung der partikulären Lösung durch den Ansatz:

$$\varphi_p = x_0 V \sin(\omega t - \gamma) \tag{22}$$

Mit $\eta = \frac{\omega}{\omega_1}$ folgt:

$$V = \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4 D^2 \eta^2}} \tag{23}$$

und

$$\gamma = \arctan\left(\frac{2D\eta}{1-\eta^2}\right) \tag{24}$$

d) Maximum des Verstärkungsfaktors V:

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\eta} = -\frac{1}{2}\frac{1}{((1-\eta^2)^2 + 4 D^2 \eta^2)^{3/2}}((-4 + 4\eta^2 + 8 D^2)\,\eta) \equiv 0 \tag{25}$$

Damit folgt

$$-4 + 4\eta^2 + 8 D^2 = 0 \Leftrightarrow \eta = \sqrt{1 - 2 D^2} \tag{26}$$

Aufgabe 3

a) Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}\, c_2\, x_2^2 + \frac{1}{2}\, c_1\, (x_1 - x_2)^2 \\ T &= \frac{1}{2}\, m_1\, \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}\, m_2\, \dot{x}_2^2 \\ \Rightarrow L = T - V &= \frac{1}{2}\, m_1\, \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}\, m_2\, \dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}\, c_2\, x_2^2 - \frac{1}{2}\, c_1\, (x_1 - x_2)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} &= m_1\, \ddot{x}_1 + c_1\, (x_1 - x_2) = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} &= m_2\, \ddot{x}_2 + c_2\, x_2 - c_1\, (x_1 - x_2) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 \\ -c_1 & c_2 + c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Gekoppelte Schwingungs-DGL mit 2 Freiheitsgraden

b) Modalvektor

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 \\ -c_1 & c_2 + c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{M}\, \ddot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{K}\, \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

$$\det(-\boldsymbol{M}\, \lambda + \boldsymbol{K}) = 0$$

$$\begin{aligned} \left| \begin{bmatrix} c_1 - \lambda\, m_1 & -c_1 \\ -c_1 & c_2 + c_1 - \lambda\, m_2 \end{bmatrix} \right| &= 0 \\ (c_1 - \lambda\, m_1)\, (c_2 + c_1 - \lambda\, m_2) - (-c_1)\, (-c_1) &= 0 \\ \lambda^2\, m_1\, m_2 - \lambda\, (m_1\, c_1 + m_1\, c_2 + m_2\, c_1) + c_1^2 + c_1\, c_2 - c_1^2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\lambda^2\, m_1\, m_2 - \lambda\, (m_1\, c_1 + m_1\, c_2 + m_2\, c_1) + c_1\, c_2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2\, m_1\, m_2}\, \left(m_1\, c_1 + m_1\, c_2 + m_2\, c_1 \pm \sqrt{(m_1\, c_1 + m_1\, c_2 + m_2\, c_1)^2 - 4\, m_1\, m_2\, c_1\, c_2} \right)$$

folgende Parameter werden eingeführt:

$$m_2 = 2\, m \qquad m_1 = m$$
$$c_2 = 2\, c \qquad c_1 = c$$

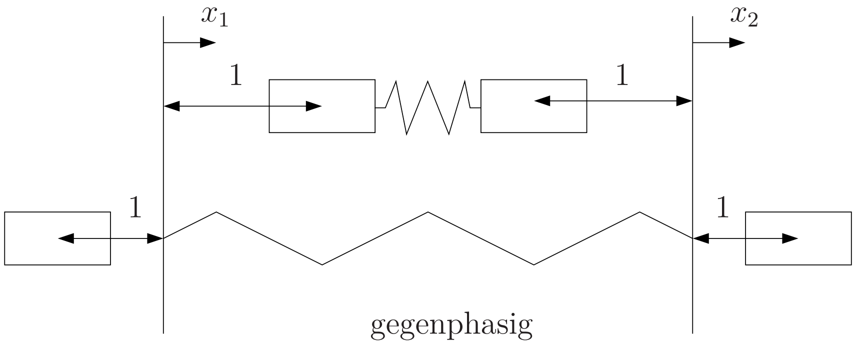
$$\begin{aligned}
\lambda_{1,2} &= \frac{1}{2\, m\, 2\, m}\, \left(m\, c + 2\, m\, c + 2\, m\, c \pm \sqrt{(m\, c + 2\, m\, c + 2\, m\, c)^2 - 16\, m^2\, c^2} \right) \\
&= \frac{1}{4}\, \frac{c}{m}\, \left(5 \pm \sqrt{25 - 16}\right) = \frac{1}{4}\, \frac{c}{m}\, (5 \pm 3) \\
\Rightarrow \lambda_1 &= 2\, \frac{c}{m} \\
\lambda_2 &= \frac{1}{2}\, \frac{c}{m} \\
\omega_1 &= \sqrt{2\, \frac{c}{m}} \\
\omega_2 &= \sqrt{\frac{1}{2}\, \frac{c}{m}}
\end{aligned}$$

Modalvektoren:

$$(-\lambda\, \boldsymbol{M} + \boldsymbol{K})\, \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$$
$$\begin{bmatrix} c - m\, \lambda & -c \\ -c & -2\, m\, \lambda + 3\, c \end{bmatrix} \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$$

Modalvektor $\boldsymbol{a}_1$:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} c - 2\, \frac{c}{m}\, m & -c \\ -c & c + 2\, c - 2\, \frac{c}{m}\, 2\, m \end{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 =& \boldsymbol{0} \\
\begin{bmatrix} -c & -c \\ -c & -c \end{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 =& \boldsymbol{0} \\
-c \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{a} =& \boldsymbol{0} \\
\Rightarrow \boldsymbol{a}_1 =& \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} a_1
\end{aligned}$$



Modalvektor $\boldsymbol{a}_2$:

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{K} - \lambda_2\, \boldsymbol{M})\ \boldsymbol{a}_2 &= \boldsymbol{0} \\
\begin{bmatrix} c - \frac{1}{2}\,\frac{c}{m}\,m & -c \\ -c & c + 2\,c - \frac{1}{2}\,\frac{c}{m}\,2\,m \end{bmatrix} \boldsymbol{a}_2 &= \boldsymbol{0} \\
\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\,c & -c \\ -c & 2\,c \end{bmatrix} \boldsymbol{a}_2 &= \boldsymbol{0} \\
c \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \boldsymbol{a}_2 &= \boldsymbol{0} \\
\Rightarrow \boldsymbol{a}_2 = a_2 & \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$