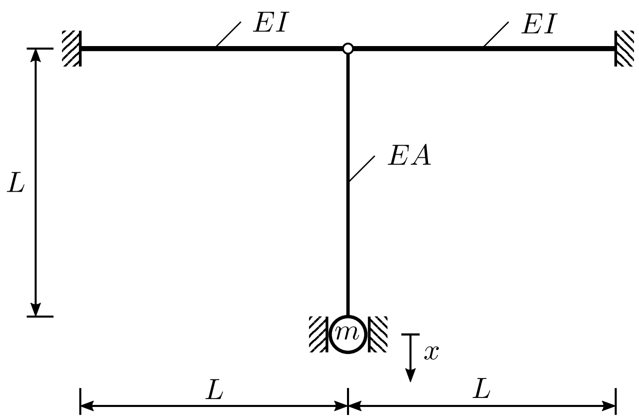
1. Aufgabe: (ca. 16% der Gesamtpunkte)

a) Zeichnen Sie jeweils ein Weg-Zeit-Diagramm von zwei synchronen und zwei gegenphasigen Schwingungen. Geben Sie außerdem Unterschiede und Gemeinsamkeiten von Amplituden A, Kreisfrequenzen ω und Phasenverschiebung φ für beide Fälle an.

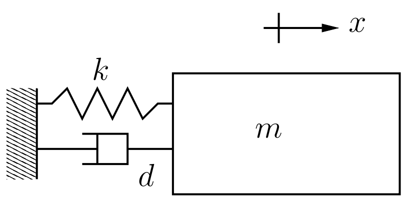
b) Eine Punktmasse m wird wie abgebildet horizontal gelagert und wird an einer masselosen Konstruktion aus Balken (Biegesteifigkeit EI) und einem Stab (Dehnsteifigkeit $EA = 6EI/L^2$) aufgehängt.



Skizzieren Sie ein Ersatzsystem mit nur einem Freiheitsgrad (x) für die Bewegung der Punktmasse m. Das System soll nur **eine** (Ersatz-)Feder beinhalten, deren Federsteifigkeit zu bestimmen ist. Gehen Sie von kleinen Deformationen aus.

Geg.: m, EI, L, $EA = 6EI/L^2$

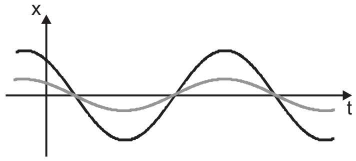
c) Skizzieren Sie (ohne Rechnung) für folgendes System die Phasenkurve ($\dot{x}$ über x) für $x(0) = x_0 < 0$ und $\dot{x}(0) = 0$.



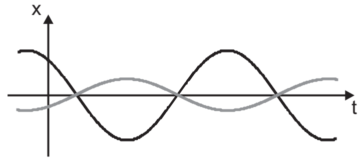
d) Zeichnen Sie das Amplitudenspektrum des Dirac-Stoßes. Wie kann dies in der experimentellen Dynamik genutzt werden? Was ist das Problem dieser Methode in der Baudynamik?

Musterlösung - Aufgabe 1

a)



zwei synchrone Schwingungen



zwei gegenphasige Schwingungen

$$\begin{aligned} \operatorname{sign}(A_1) &= \operatorname{sign}(A_2) \\ \omega_1 &= \omega_2 \\ \varphi_1 &= \varphi_2 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \operatorname{sign}(A_1) &= -\operatorname{sign}(A_1) \\ \omega_1 &= \omega_2 \\ \varphi_1 &= \varphi_2 \end{aligned}$$

b) Parallelschaltung Balken

$$k_B = 2\,\frac{3\,EI}{l^3} = \frac{6\,EI}{l^3}$$

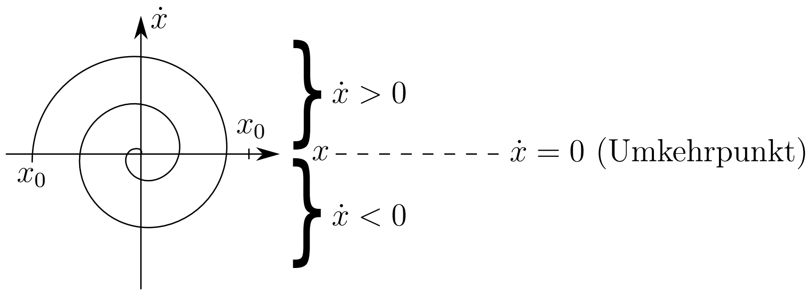
Stab

$$k_S = \frac{EA}{l} = \frac{6\,EI}{l^3}$$

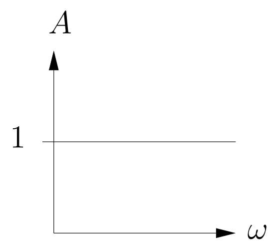
Reihenschaltung Stab + Balken

$$k_{Ersatz} = \left(\frac{1}{k_B} + \frac{1}{k_S}\right)^{-1} = \left(\frac{l^3}{3\,EI}\right)^{-1} = \frac{3\,EI}{l^3}$$

c)



d)

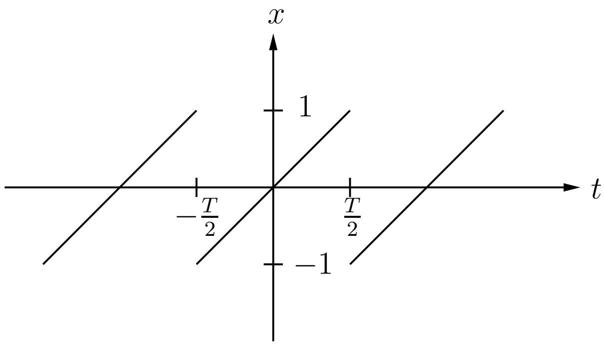


konstantes Spektrum

- Stoßanregung von Struktur regt alle Frequenzen gleichmäßig an
- durch Filterwirkung der Vergrößerungsfunktion können aus der Antwort die Eigenfrequenzen des Gebäudes bestimmt werden
- Stoßanregung von Bauwerken wg. der Dimensionen schwierig

2. Aufgabe: (ca. 11% der Gesamtpunkte)

Berechnen Sie die Fourier-Koeffizienten der dargestellten Funktion $x(t)$. Nutzen Sie die Grenzen $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ für die Integration.



Hinweis:

$$\int x\,\sin(a\,x)\,\mathrm{d}x = \frac{\sin(a\,x)}{a^2} - \frac{x\,\cos(a\,x)}{a}$$

Musterlösung - Aufgabe 2
Fourier-Reihe

$$x_e(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\underbrace{C_k}_{a_k} \cos(k\,\omega\,t) + \underbrace{S_k}_{b_k} \sin(k\,\omega\,t) \right]$$

Funktion $x(t)$

$$x(t) = a\,t + b$$

$$x(0) = b = 0, \quad x(\frac{T}{2}) = a\,\frac{T}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{2}{T} \quad \Rightarrow x(t) = \frac{2}{T}\,t$$

$x(t)$ ist eine ungerade Funktion denn $x(-t) \neq x(t), \quad x(-t) = -x(t) \quad \forall t \in [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ Fourier-Koeffizienten

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \underbrace{x(t)}_{\text{ungerade}} \ \mathrm{d}t = 0$$

$$C_k = a_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \underbrace{\underbrace{x(t)}_{\text{ungerade}} \ \underbrace{\cos(k\,\omega\,t)}_{gerade}}_{ungerade} \ \mathrm{d}t = 0$$

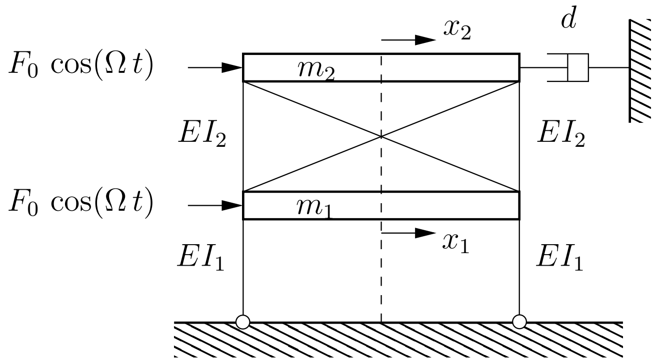
$$S_k = b_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\ \sin(k\,\omega\,t)\ \mathrm{d}t = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{2}{T}\,t\ \sin(k\,\frac{2\,\pi}{T}\,t)\ \mathrm{d}t$$

$$= \frac{4}{T^2} [\underbrace{\frac{\sin(k\,\frac{2\pi}{T}\,t)}{(k\,\frac{2\pi}{T})^2}}_{0} - \frac{t\ \cos(k\,\frac{2\pi}{T}\,t)}{k\,\frac{2\pi}{T}}]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = -\frac{4}{T^2}\,\frac{1}{k\,\frac{2\pi}{T}}\,(\frac{T}{2}\ \cos(k\,\pi) - (-\frac{T}{2})\ \cos(-k\,\pi))$$

$$= -\frac{2\ \cos(k\,\pi)}{k\,\pi} = \begin{cases} \frac{2}{k\,\pi} & \text{für ungerade } k \\ -\frac{2}{k\,\pi} & \text{für gerade } k \end{cases}$$

3. Aufgabe: (ca. 24% der Gesamtpunkte)

Der skizzierte Stockwerkrahmen (zweistöckiges Gebäude) besteht aus den starren Riegeln mit Massen m_1, m_2, den masselosen Stielen mit Biegesteifigkeiten EI_1 und EI_2 sowie einem Dämpfer mit Dämpfungskonstante d. Durch den Windverband dürfen Stockwerk eins und zwei als starr miteinander verbunden angenommen werden. Die Stiele des ersten Stockwerks sind **gelenkig** mit dem Fundament verbunden. Die Raumhöhe eines jeden Stockwerks ist l. Das Gebäude wird durch eine Windlast $F_0 \cos(\Omega\, t)$ zum Schwingen angeregt. Es soll angenommen werden, dass sich die Massen m_1 und m_2 nur horizontal verschieben können. Die Verschiebungen werden mittels der ortsfesten Koordinaten x_1 und x_2 beschrieben.



Gegeben: m_1, m_2, EI_1, EI_2, l, d, F_0, Ω.

a) Wieviele Freiheitsgrade hat das System?

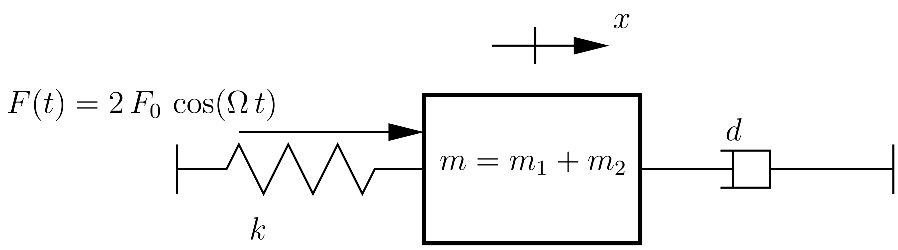
b) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung(en) des Systems mit Hilfe der Newtonschen Axiome unter Verwendung eines 1D Ersatzmodells.

c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung für den schwach gedämpften Fall.

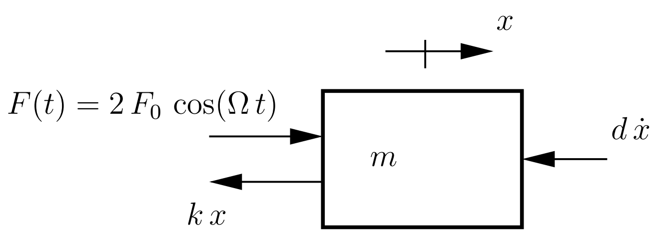
Musterlösung - Aufgabe 3

a) 1 FHG x

b) Ersatzmodell mit Ersatzfedersteifigkeit $k = 2\,\frac{3\,EI_1}{l^3}$



FKB



Bewegungsgleichung

$$m\,\ddot{x} + d\,\dot{x} + k\,x = 2\,F_0\,\cos(\Omega\,t)$$

c) Normalform

$$\ddot{x} + \frac{d}{m}\,\dot{x} + \frac{k}{m}\,x = \frac{F(t)}{m} = \frac{2\,F_0}{m}\,\cos(\Omega\,t)$$

Allgemeine Lsg.

$$x_a = x_h + x_p$$

Homogene Lsg.

$$x_h = e^{-\omega_0\,t\,D}\,(A\,\sin(\omega_d\,t) + B\,\cos(\omega_d\,t)) = e^{-\omega_0\,t\,D}\,C\,\cos(\omega_d\,t - \alpha), \quad \omega_d = \sqrt{1-D^2}\,\omega_0$$

bzw. in Eigenzeit $\tau = \omega_0\,t$:

$$x_h = e^{-\tau\,D}\,(A\,\sin(\nu\,\tau) + B\,\cos(\nu\,\tau)) = e^{-\tau\,D}\,C\,\cos(\nu\,\tau - \alpha), \quad \nu = \sqrt{1-D^2}$$

Dimensionslose Darstellung mit Eigenzeit $\tau = \omega_0\,t$, $\frac{d}{m\,\omega_0} = 2\,D$, $\eta = \frac{\Omega}{\omega_0}$

$$x'' + 2\,D\,x' + x = \underbrace{\frac{2\,F_0}{\omega_0^2\,m}}_{=2\,F_0/k = x_0}\,\cos(\eta\,\tau)$$

Partikuläre Lösung (Ansatz in Form der rechten Seite)

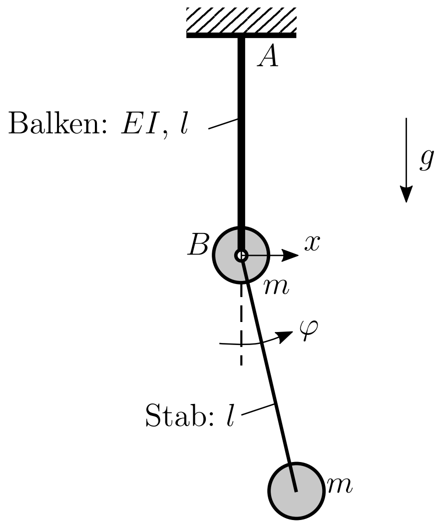
$$x_p = C_p\,\cos(\eta\,\tau - \gamma) = C_p\,\cos(\Omega\,t - \gamma),$$

für Krafterregung gilt

$$C_p = x_0\,V_3 = x_0\,\frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4\,D^2\,\eta^2}}, \quad \gamma = \arctan(\frac{2\,D\,\eta}{1-\eta^2})$$

4. Aufgabe: (ca. 49% der Gesamtpunkte)

Es soll das Schwingungsverhalten der dargestellten Struktur untersucht werden. Das System besteht aus einem masselosen Balken der Biegesteifigkeit EI und Länge l, einem starren masselosen Stab der Länge l und zwei Punktmassen der Masse m. Der Balken ist in Punkt A eingespannt und in Punkt B gelenkig mit dem Stab verbunden. Weiterhin soll angenommen werden, dass sich Punkt B nur horizontal verschieben kann. Es wirkt die Erdbeschleunigung g.



Gegeben: EI, l, m, g.

a) Skizzieren Sie ein geeignetes Ersatzsystem bei dem der masselose Balken als lineare Feder idealisiert wird.

b) Bestimmen Sie die nichtlinearen Bewegungsgleichungen des Ersatzsystems mit Hilfe der Lagrange Gleichungen 2. Art in den Koordinaten x und φ.

c) Linearisieren Sie die Bewegungsgleichungen für kleine $x, \varphi, \dot{x}, \dot{\varphi}$.

Durch eine Vereinfachung ergibt sich folgendes System von Bewegungsgleichungen

$$\begin{bmatrix} 2\,m & m\,l \\ m\,l & m\,l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{8}{3}\frac{m\,g}{l} & 0 \\ 0 & m\,g\,l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

von welchem im Weiteren ausgegangen werden soll.

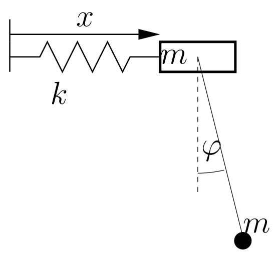
d) Bestimmen Sie Eigenfrequenzen und Modalvektoren des Systems. Stellen Sie die Eigenformen des Systems graphisch dar.

e) Bestimmen Sie die entkoppelten Bewegungsgleichungen. Geben Sie die dazu benötigten Beziehungen an. Die Matrixmultiplikationen müssen *nicht* durchgeführt werden.

f) Lösen Sie die Bewegungsgleichung für die Anfangswerte $x(0) = 0$, $\varphi(0) = \frac{1}{10}$ und $\dot{x}(0) = \dot{\varphi}(0) = 0$.

Musterlösung - Aufgabe 4

a) Ersatzmodell mit Ersatzfedersteifigkeit $k = \frac{3\,E I_1}{l^3}$



b) mit

$$\boldsymbol{r}_1 = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{r}_2 = \begin{bmatrix} x + \sin(\varphi)\, l \\ -\cos(\varphi)\, l \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} \dot{x} + \cos(\varphi)\,\dot{\varphi}\, l \\ \sin(\varphi)\,\dot{\varphi}\, l \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{v}_1\|^2 &= \dot{x}^2 \\ \|\boldsymbol{v}_2\|^2 &= (\dot{x} + \cos(\varphi)\,\dot{\varphi}\, l)^2 + \sin^2(\varphi)\,\dot{\varphi}^2\, l^2 \\ &= \dot{x}^2 + 2\,\dot{x}\,\dot{\varphi}\, l\,\cos(\varphi) + \dot{\varphi}^2\, l^2\, (\underbrace{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi}_{1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} m\,(\dot{x}^2 + 2\,\dot{x}\,\dot{\varphi}\, l\,\cos(\varphi) + \dot{\varphi}^2\, l^2) \\ V &= \frac{1}{2} k\, x^2 + m\, g\, l + m\, g\, l\,(1 - \cos\varphi) \\ L &= T - V \end{aligned}$$

Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} &= 0 \\ 2\, m\, \ddot{x} + m\, l\,\cos\varphi\,\ddot{\varphi} - m\, l\,\sin(\varphi)\,\dot{\varphi}^2 + k\, x &= 0 \\ m\, l\,\cos(\varphi)\,\ddot{x} - \cancel{m\, l\,\sin(\varphi)\,\dot{x}\,\dot{\varphi}} + m\, l^2\,\ddot{\varphi} + \cancel{m\, l\,\sin(\varphi)\,\dot{x}\,\dot{\varphi}} + m\, l\, g\,\sin\varphi &= 0 \end{aligned}$$

c) Linearisierung

$$\begin{aligned} 2\, m\, \ddot{x} + m\, l\,\ddot{\varphi} + k\, x &= 0 \\ m\, l\,\ddot{x} + m\, l^2\,\ddot{\varphi} + m\, g\, l\,\varphi &= 0 \end{aligned}$$

d) Ansatz $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{C}\,\cos(\omega\, t - \alpha)$ für $\boldsymbol{M}\,\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{K}\,\boldsymbol{q} = \boldsymbol{0}$ führt auf Eigenwertproblem

$$(\boldsymbol{K} - \underbrace{\omega^2}_{\lambda}\,\boldsymbol{M})\,\boldsymbol{C} = \boldsymbol{0}$$

nicht triviale Lsg. für $\det(\boldsymbol{K} - \lambda\,\boldsymbol{M})$

$$\begin{vmatrix} \frac{8}{3}\frac{m\,g}{l} - 2\,\lambda\, m & -\lambda\, m\, l \\ -\lambda\, m\, l & m\, g\, l - \lambda\, m\, l^2 \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2 - \frac{14}{3}\frac{g}{l}\,\lambda + \frac{8}{3}\frac{g^2}{l^2} = 0$$

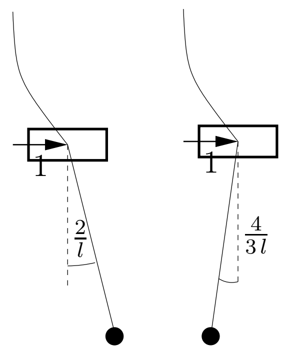
$$\lambda_{1/2} = \frac{7}{3}\frac{g}{l} \pm \sqrt{\frac{25}{9}\frac{g^2}{l^2}}, \quad \lambda_1 = \frac{2}{3}\frac{g}{l}, \quad \lambda_2 = 4\,\frac{g}{l}$$

$$\Rightarrow \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{2}{3}\frac{g}{l}}, \quad \omega_2 = 2\sqrt{\frac{g}{l}}$$

Eigenvektoren

$$\kappa_1 = \frac{C_{21}}{C_{11}} = -\frac{k_{11}-m_{11}\omega_1^2}{k_{12}-m_{12}\,\omega_1^2} = \frac{2}{l}, \quad \boldsymbol{\Phi}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \kappa_1 \end{bmatrix}, = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{2}{l} \end{bmatrix}$$
$$\kappa_2 = \frac{C_{22}}{C_{12}} = -\frac{k_{11}-m_{11}\omega_2^2}{k_{12}-m_{12}\,\omega_2^2} = -\frac{4}{3\,l}, \quad \boldsymbol{\Phi}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \kappa_2 \end{bmatrix}, = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{4}{3\,l} \end{bmatrix}$$

Darstellung



e) Entkopplung

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_1 & \boldsymbol{\Phi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{2}{l} & -\frac{4}{3\,l} \end{bmatrix}$$
$$\underbrace{\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{M}\,\boldsymbol{\Phi}}_{\tilde{\boldsymbol{M}}}\,\ddot{\boldsymbol{x}} + \underbrace{\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{K}\,\boldsymbol{\Phi}}_{\tilde{\boldsymbol{K}}}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{q} = \boldsymbol{\Phi}\,\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} x \\ \varphi \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Durch Entkopplung ergibt sich Diagonalform, so dass

$$\ddot{x}_1 + \omega_1^2\,x_1 = 0$$
$$\ddot{x}_2 + \omega_2^2\,x_2 = 0$$

f) Ansatz

$$x_i = A_i\,\cos(\omega_i\,t) + B_i\,sin(\omega_i\,t), \quad i = 1,2$$

Anfangsbedingungen transformieren mit

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{\Phi}\,\boldsymbol{x} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\Phi}^{-1}\,\boldsymbol{q}, \quad \boldsymbol{\Phi}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3\,l}{10} \\ \frac{3}{5} & -\frac{3\,l}{10} \end{bmatrix}$$

ergibt

$$\boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} \boldsymbol{\Phi}^{-1}\,\boldsymbol{q}(0) = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3\,l}{10} \\ \frac{3}{5} & -\frac{3\,l}{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3\,l}{100} \\ -\frac{3\,l}{100} \end{bmatrix}$$
$$\dot{\boldsymbol{x}}(0) = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} \boldsymbol{\Phi}^{-1}\,\dot{\boldsymbol{q}}(0) = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3\,l}{10} \\ \frac{3}{5} & -\frac{3\,l}{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Rücktransformation

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{\Phi}\,\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{2}{l} & -\frac{4}{3\,l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1\,\cos(\omega_1\,t) \\ A_2\,\cos(\omega_2\,t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3\,l}{100}\,(\cos(\omega_1\,t) - \cos(\omega_2\,t)) \\ \frac{6}{100}\,\cos(\omega_1\,t) - \frac{4}{100}\,\cos(\omega_2\,t) \end{bmatrix}$$