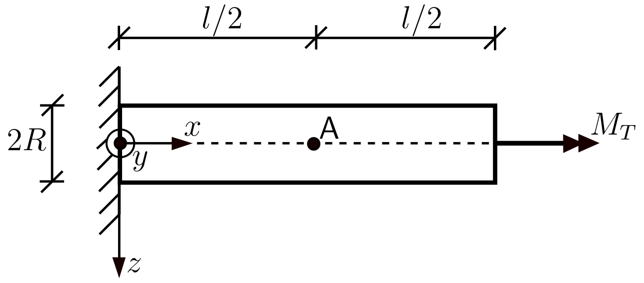
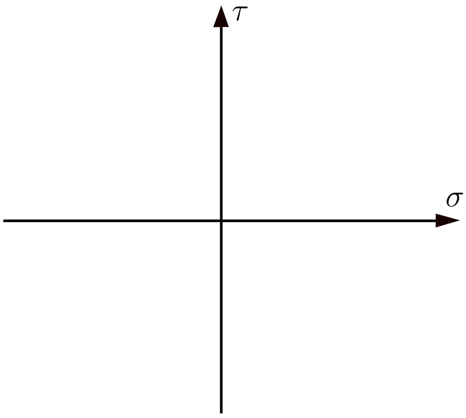
1. Aufgabe: (ca. 10 % der Gesamtpunkte)

a) Ein Stab mit Vollkreisquerschnitt (Radius R, Länge l) sei durch ein Torsionsmoment M_T belastet.





a1) Zeichnen Sie den zum Spannungszustand in Punkt A (Koordinaten: $x_A = l/2$, $y_A = R$, $z_A = 0$) gehörigen Mohr'schen Kreis.

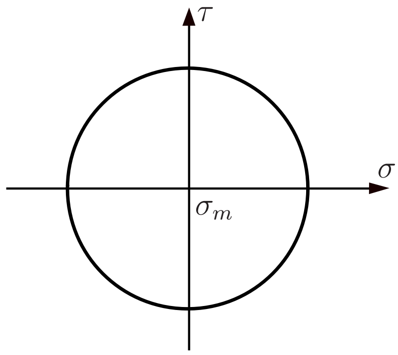
a2) Zeichnen Sie **in der Skizze oben links** die Richtung der größten Hauptnormalspannung ein (mit Winkelangabe).

b) Welcher Spannungszustand herrscht in einem dreidimensionalen linear-thermoelastischen Körper bei vollständiger Dehnungsbehinderung und einer Erwärmung um $\Delta T = 100\,°\mathrm{C}$?

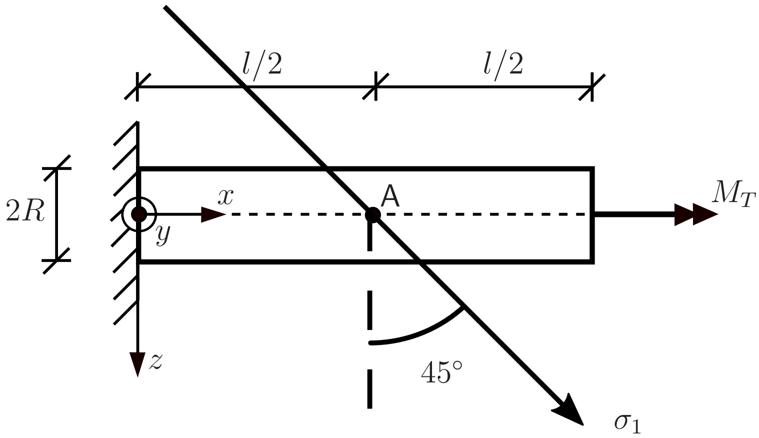
Gegeben: $E = 5 \cdot 10^4 \,\dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$, $\nu = 0{,}25$, $\alpha_T = 10^{-5}\,\dfrac{1}{°\mathrm{C}}$.

1. Aufgabe:

a1) **Zum Spannungszustand gehöriger Mohr'scher Spannungskreis:**



a2) **Richtung der größten Hauptnormalspannung:**



b) **Spannungszustand:**

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z =: \sigma \qquad (*)$$

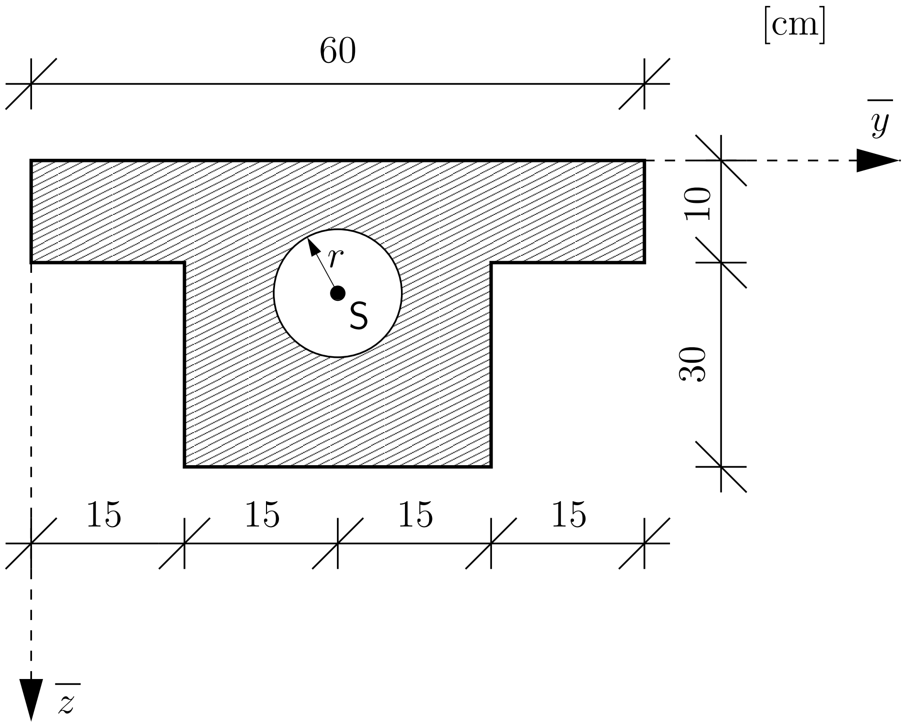
Ansatz: $E\varepsilon_x = \sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z) + E\alpha_T \Delta T \stackrel{!}{=} 0$ (Dehnungsbehinderung)

mit (*) folgt:

$$0 = \sigma - 2\nu(\sigma_y + \sigma_z) + E\alpha_T \Delta T$$

$$\Leftrightarrow \sigma = -\frac{E\alpha_T \Delta T}{1 - 2\nu} = -\frac{(5 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2})(10^{-5} \frac{1}{°C})(100°C)}{1 - 2 \cdot 0.25} = -100 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

2. Aufgabe: (ca. 20 % der Gesamtpunkte)



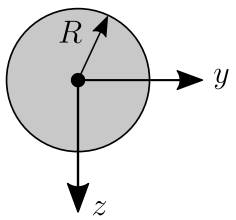
In einem Fertigteilquerschnitt aus Stahlbeton (siehe Abbildung), soll eine kreisrunde Aussparung für Versorgungsleitungen vorgesehen werden. Die Aussparung soll im Flächenschwerpunkt S des Gesamtquerschnitts liegen. Es ist zu untersuchen, wie groß die Aussparung (Radius r) sein darf, so dass der Querschnitt gerade noch den unten angegebenen Anforderungen genügt. Dies soll durch Bearbeitung der folgenden Schritte erfolgen:

a) Bestimmen Sie die Lage des Gesamtflächenschwerpunktes im $\bar{y}-\bar{z}-$Koordinatensystem.

b) Berechnen Sie das Flächenträgheitsmoment I_y des Querschnitts bezüglich des Schwerpunktes.

c) Aufgrund einer gegebenen Belastung ergibt sich ein Moment von $M_y = 130\,\mathrm{kNm}$. Die zulässige Zugnormalspannung infolge M_y beträgt $\sigma_{zul} = 14\,\mathrm{MN/m^2}$. Bestimmen Sie r so, dass die Bedingung $\sigma_{max} \leq \sigma_{zul}$ gerade noch erfüllt ist.

Hinweis:



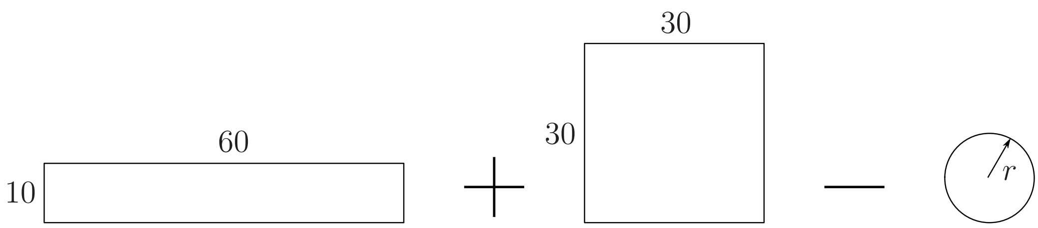
$$I_y = I_z = \frac{\pi R^4}{4}$$

2. Aufgabe:

a) **Flächenschwerpunkt:**

$$\bar{y}_s = \frac{60}{2} = 30\text{cm}$$
$$\bar{z}_s = \frac{60 \cdot 10 \cdot 5 + 30 \cdot 30 \cdot 25}{60 \cdot 10 + 30 \cdot 30} = 17\text{cm}$$

b) **Flächenträgheitsmoment:**



$$I_y = \frac{60 \cdot 10^3}{12} + 60 \cdot 10(17-5)^2 + \frac{30 \cdot 30^3}{12} + 30 \cdot 30(17-25)^2 - \frac{\pi r^4}{4}$$
$$= I_{y,ges} - \frac{\pi r^4}{4} = 216500\text{cm}^4 - \frac{\pi r^4}{4}$$

c) **maximal zulässiger Radius:**

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{I_y} z_{max}\,,$$

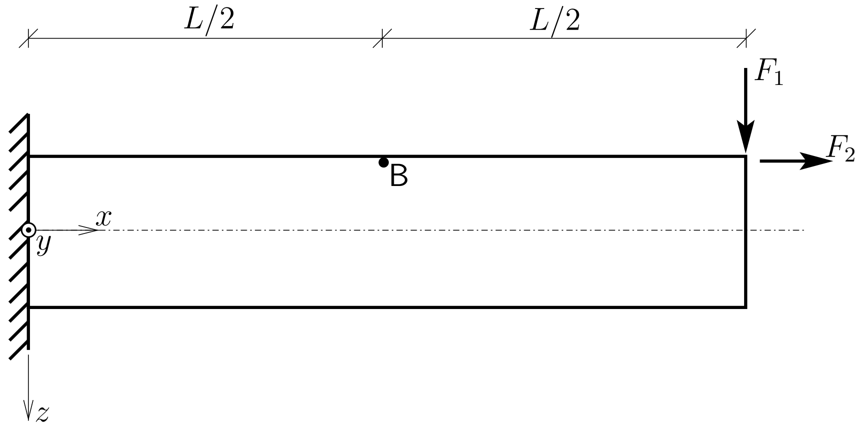
$$\Rightarrow \quad I_y = I_{y,ges} - \frac{\pi r^4}{4} = \frac{M_{max}}{\sigma_{max}} z_{max}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\pi r^4}{4} = I_{y,ges} - \frac{M_{max}}{\sigma_{max}} z_{max}$$

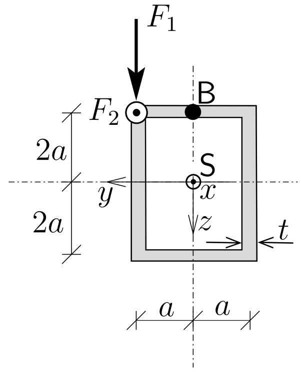
$$\Rightarrow \quad r = \sqrt[4]{\frac{4}{\pi}\left[I_{y,ges} - \frac{M_{max}}{\sigma_{max}} z_{max}\right]} = \sqrt[4]{\frac{4}{\pi}\left[216500\text{cm}^4 - \frac{0,13\text{MNm}}{14\frac{\text{MN}}{\text{m}^2}} \cdot 0,23\text{m} \cdot \left(100\frac{\text{cm}}{\text{m}}\right)^4\right]}$$

$$\Rightarrow \quad r = 7,81\text{cm}$$

3. Aufgabe: (ca. 20 % der Gesamtpunkte)



Vorderansicht



Querschnitt

Gegeben ist der im Bild dargestellte Kragträger mit rechteckigem Hohlkastenquerschnitt mit der Wanddicke t ($t \ll a$). Der Träger wird durch die exzentrisch angreifenden Einzellasten F_1 und F_2 belastet.

a) Ermitteln Sie die durch die Belastung hervorgerufenen Schnittgrößen im Kragträger.

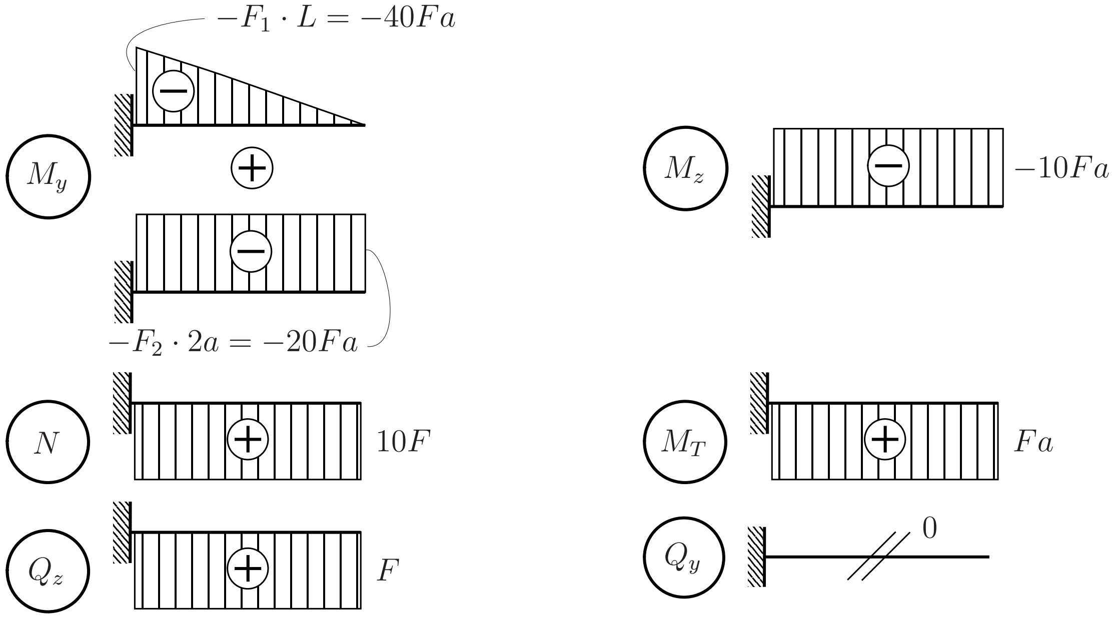
b) Berechnen Sie die Normal- und Schubspannung im Punkt B.

c) Bestimmen und skizzieren Sie die Spannungsnulllinie an der Stelle $x = L/2$.

Gegeben: a, t, $L = 40a$, $A = 12at$, $I_y \approx \dfrac{80}{3}a^3t$, $I_z \approx \dfrac{28}{3}a^3t$, $F_1 = F$, $F_2 = 10F$.

3. Aufgabe:

a) **Schnittgrößen:**



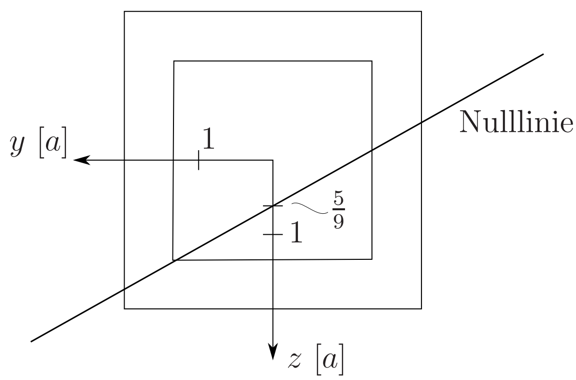
b) **Normal- und Schubspannung:**

$$\sigma(x = \frac{l}{2}, y = 0, z = -2a) = \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y + \frac{N}{A} = \frac{23}{6} \frac{F}{at}$$

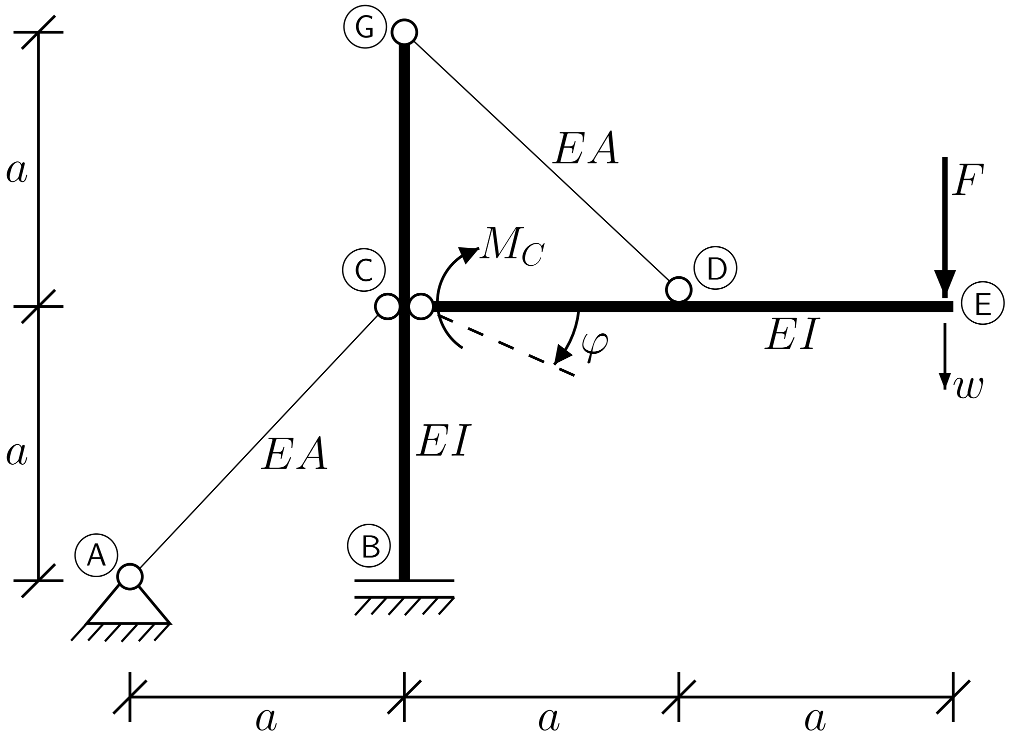
$$\tau = \frac{M_T}{2A_m t} + \underbrace{\cancel{\frac{Q_z \cdot S_y}{I_y \cdot t}}}_{=0 \text{ bei B}} + \underbrace{\cancel{\frac{Q_y \cdot S_z}{I_z \cdot t}}}_{=0} = \frac{F}{16at}$$

c) **Spannungsnulllinie:**

$$\sigma(x = \frac{l}{2}) \stackrel{!}{=} 0 : \qquad z = \frac{5}{9} a + \frac{5}{7} y$$



4. Aufgabe: (ca. 27 % der Gesamtpunkte)



Das abgebildete statisch bestimmte Tragwerk besteht aus zwei als dehnstarr anzunehmenden Balken sowie aus 2 Seilen.

a) Berechnen Sie die Kräfte in den Seilen, die infolge der Last F auftreten.

b) Berechnen Sie die Absenkung w sowie den Winkel φ infolge der Last F.

Für die weiteren Aufgabenteile gilt mit $EI = 70\,Fa^2$ für die infolge der Last F auftretenden Verformungen $w = a/5$ und $\varphi = 3\,\pi/100$.

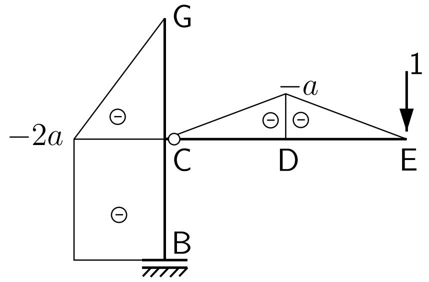
c) Geben Sie die Einflusszahl der Durchbiegung in Punkt E infolge einer Momentenbelastung $M_C = 1$ im Gelenk in Punkt C an.

d) Welchen Wert muss ein zusätzlich zur Last F angreifendes Biegemoment M_C haben, damit die Absenkung im Punkt E den Wert $w = a/10$ annimmt.

Gegeben: $a,\ F,\ EA = \sqrt{2}\dfrac{EI}{a^2},\ EI$.

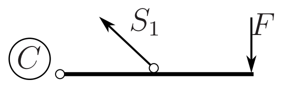
Hinweis:

Momentenverlauf infolge einer 1-*Last* an der Stelle E.

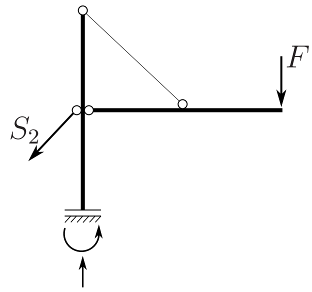


4. Aufgabe:

a) **Seilkräfte:**



$$\sum M^C = 0 : S_1 = 2\sqrt{2}F$$

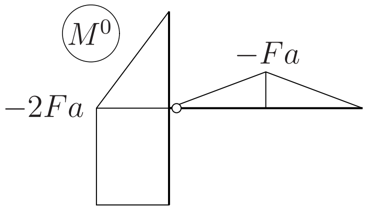


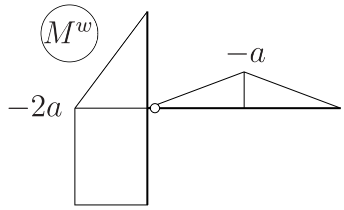
$$\sum H = 0 : S_2 = 0$$

b) **Absenkung** w**:**

$$w = \int_x \frac{M^0 M^w}{EI} \mathrm{d}x + \int_x \frac{N^0 N^w}{EA} \mathrm{d}x$$

Mit Hinweis und Aufgabenteil a) folgt:





N^0

$$S_1^0 = 2\sqrt{2}F$$
$$S_2^0 = 0$$

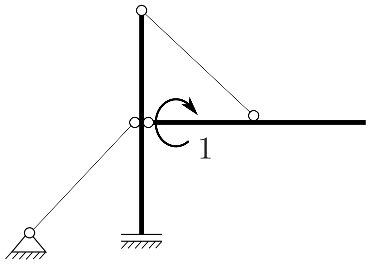
N^w

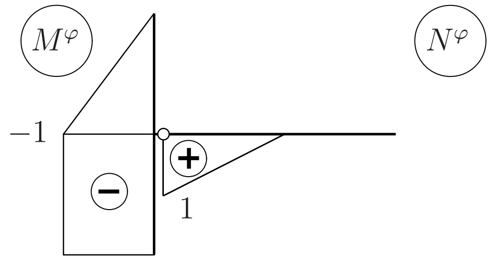
$$S_1^0 = 2\sqrt{2}$$
$$S_2^0 = 0$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow w &= \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{3}(-2Fa)(-2a)a + (-2Fa)(-2a)a + 2 \cdot \frac{1}{3}(-Fa)(-a)a\right] \\
&\quad + \frac{1}{EA}\left[(2\sqrt{2}F)(2\sqrt{2})\sqrt{2}a\right] \\
&= 6\frac{Fa^3}{EI} + 8\sqrt{2}\frac{Fa}{EA} = 14\frac{Fa^3}{EI}
\end{aligned}$$

Winkel φ:

$$\varphi = \int_x \frac{M^0 M^\varphi}{EI} \mathrm{d}x + \int_x \frac{N^0 N^\varphi}{EA} \mathrm{d}x$$





$$S_1^\varphi = \frac{\sqrt{2}}{a}$$
$$S_2^\varphi = 0$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \varphi &= \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{3}(-1)(-2Fa)a + (-1)(-2Fa)a + \frac{1}{6}(1)(-Fa)a\right] \\
&\quad + \frac{1}{EA}\left[\frac{\sqrt{2}}{a} \cdot 2\sqrt{2}F \cdot \sqrt{2}a\right] \\
&= \frac{5}{2}\frac{Fa^2}{EI} + 4\sqrt{2}\frac{F}{EA} = \frac{13}{2}\frac{Fa^2}{EI}
\end{aligned}$$

c) **Einflusszahl:**

$$\alpha = \frac{\varphi}{F} = \frac{13}{2}\frac{a^2}{EI}$$

Satz von Betti:

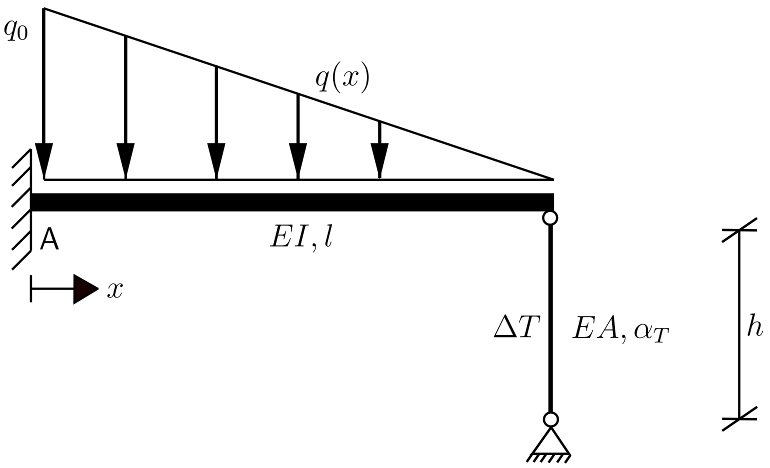
Die Verdrehung in C infolge der '1'-Last in E entspricht
der Verschiebung in E infolge des '1'-Moments in C.

d) **Bestimmung Biegemoment:**

$$\begin{aligned}
w \overset{!}{=} \frac{a}{10} &= w(\text{infolge F}) + w(\text{infolge } M_c) \\
&= 14\frac{Fa^3}{EI} + \alpha \cdot M_c
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad M_c = \frac{\frac{a}{10} - 14\frac{Fa^3}{EI}}{\alpha} = \frac{\frac{1}{10}a - \frac{1}{5}a}{\frac{13}{140F}} = -\frac{14}{13}Fa$$

5. Aufgabe: (ca. 23 % der Gesamtpunkte)



Ein an der Stelle A eingespannter Balken der Länge l sei zusätzlich durch einen thermoelastischen Stab gestützt und durch eine linear veränderliche Streckenlast $q(x)$ belastet. Die unbelastete Länge des Stabes sei h .

Wie groß muss eine gleichförmige Temperaturänderung ΔT des Stabes sein, damit das Einspannmoment (Stelle A) verschwindet?

Gegeben: q_0, EI, EA, l, h, α_T .

<u>Hinweis:</u>

Die Aufgabe ist durch Integration der Differentialgleichung für die Biegelinie des Balkens zu bearbeiten.

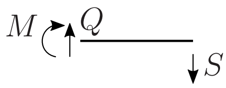
5. Aufgabe:

- **Biege-DGL:**

$$
\begin{aligned}
EIw^{IV} &= -\frac{q_0}{l}x + q_0\\
EIw''' &= -\frac{1}{2}\frac{q_0}{l}x^2 + q_0x + C_1 = -Q\\
EIw'' &= -\frac{1}{6}\frac{q_0}{l}x^3 + \frac{1}{2}q_0x^2 + C_1x + C_2 = -M\\
EIw' &= -\frac{1}{24}\frac{q_0}{l}x^4 + \frac{1}{6}q_0x^3 + \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3\\
EIw &= -\frac{1}{120}\frac{q_0}{l}x^5 + \frac{1}{24}q_0x^4 + \frac{1}{6}C_1x^3 + \frac{1}{2}C_2x^2 + C_3x + C_4
\end{aligned}
$$

- **Randbedingungen:**

$$
\begin{aligned}
&(1)\, w(x=0) = 0 && \rightarrow\; C_4 = 0\\
&(2)\, w'(x=0) = 0 && \rightarrow\; C_3 = 0\\
&(3)\, M(x=0) = 0 \,\text{(aus Aufgabenstellung)} && \rightarrow\; C_2 = 0\\
&(4)\, M(x=l) = 0 && \rightarrow\; C_1 = -\tfrac{1}{3}q_0l
\end{aligned}
$$



$$(5)\, Q(x=l) = S = -EIw'''$$

$$\Rightarrow \quad EIw(x) = -\frac{1}{120}\frac{q_0}{l}x^5 + \frac{1}{24}q_0x^4 - \frac{1}{18}q_0lx^3$$

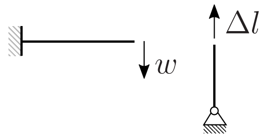
- **Durchbiegung bei $x = l$ und Stabkraft:**

$$w(l) = \frac{1}{EI}\left[-\frac{1}{120}\frac{q_0}{l}l^5 + \frac{1}{24}q_0l^4 - \frac{1}{18}q_0l^4\right] = -\frac{1}{45}\frac{q_0l^4}{EI}$$

$$S = Q(x=l) = -EIw''' = -\left[-\frac{1}{2}\frac{q_0}{l}l^2 + q_0l - \frac{1}{3}q_0l\right] = -\frac{1}{6}q_0l \qquad \left(\begin{matrix}\text{Druckkraft}\\ \text{in Stütze}\end{matrix}\right)$$

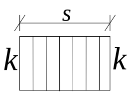
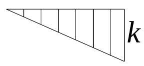
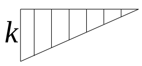
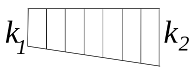
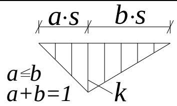
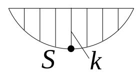
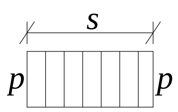
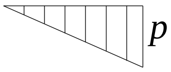
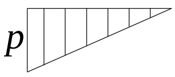
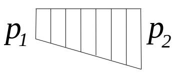
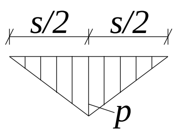
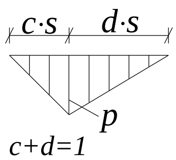
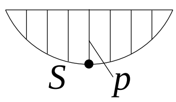
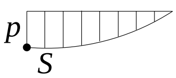
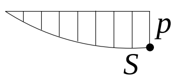
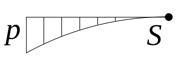
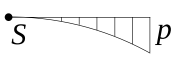
- **Kompatibilität**

$$-w(l) \stackrel{!}{=} \Delta l_s$$



$$
\begin{aligned}
\rightarrow \quad & \Delta l_s = \frac{S\,h}{EA} + \alpha_T\,\Delta T\,h\\
\Leftrightarrow \quad & \frac{1}{45}\frac{q_0l^4}{EI} = -\frac{1}{6}\frac{q_0lh}{EA} + \alpha_T\,\Delta T\,h\\
\rightarrow \quad & \Delta T = \left[\frac{1}{45}\frac{q_0\,l^4}{EI} + \frac{1}{6}\frac{q_0\,l\,h}{EA}\right]\frac{1}{\alpha_T\,h}
\end{aligned}
$$

Werte der Integrale $\int_0^s P(x) \cdot K(x)\mathrm{d}x$

$K(x)$ / $P(x)$						
	pks	$\frac{1}{2}pks$	$\frac{1}{2}pks$	$\frac{p}{2}(k_1+k_2)s$	$\frac{1}{2}pks$	$\frac{2}{3}pks$
	$\frac{1}{2}pks$	$\frac{1}{3}pks$	$\frac{1}{6}pks$	$\frac{p}{6}(k_1+2k_2)s$	$\frac{1}{6}pk(1+a)s$	$\frac{1}{3}pks$
	$\frac{1}{2}pks$	$\frac{1}{6}pks$	$\frac{1}{3}pks$	$\frac{p}{6}(2k_1+k_2)s$	$\frac{1}{6}pk(1+b)s$	$\frac{1}{3}pks$
	$\frac{k}{2}(p_1+p_2)s$	$\frac{k}{6}(p_1+2p_2)s$	$\frac{k}{6}(2p_1+p_2)s$	$[\frac{p_1}{6}(2k_1+k_2) + \frac{p_2}{6}(k_1+2k_2)]s$	$[\frac{k}{6}[p_1(1+b) + p_2(1+a)]s$	$\frac{k}{3}(p_1+p_2)s$
	$\frac{1}{2}pks$	$\frac{1}{4}pks$	$\frac{1}{4}pks$	$\frac{p}{4}(k_1+k_2)s$	$\frac{pk}{12b}(3-4a^2)s$	$\frac{5}{12}pks$
	$\frac{1}{2}pks$	$\frac{pk}{6}(1+c)s$	$\frac{pk}{6}(1+d)s$	$\frac{p}{6}[k_1(1+d) + k_2(1+c)]s$	$\frac{pk}{6bc}(2c-c^2-a^2)s$ für $c \geq a$	$\frac{pk}{3}(1+cd)s$
	$\frac{2}{3}pks$	$\frac{1}{3}pks$	$\frac{1}{3}pks$	$\frac{p}{3}(k_1+k_2)s$	$\frac{pk}{3}(1+ab)s$	$\frac{8}{15}pks$
	$\frac{2}{3}pks$	$\frac{1}{4}pks$	$\frac{5}{12}pks$	$\frac{p}{12}(5k_1+3k_2)s$	$\frac{pk}{12}(5-a-a^2)s$	$\frac{7}{15}pks$
	$\frac{2}{3}pks$	$\frac{5}{12}pks$	$\frac{1}{4}pks$	$\frac{p}{12}(3k_1+5k_2)s$	$\frac{pk}{12}(5-b-b^2)s$	$\frac{7}{15}pks$
	$\frac{1}{3}pks$	$\frac{1}{12}pks$	$\frac{1}{4}pks$	$\frac{p}{12}(3k_1+k_2)s$	$\frac{pk}{12}(1+b+b^2)s$	$\frac{1}{5}pks$
	$\frac{1}{3}pks$	$\frac{1}{4}pks$	$\frac{1}{12}pks$	$\frac{p}{12}(k_1+3k_2)s$	$\frac{pk}{12}(1+a+a^2)s$	$\frac{1}{5}pks$

$S \mathrel{\widehat{=}}$ Scheitel einer quadratischen Parabel