1. Aufgabe: (ca. 10% der Gesamtpunktzahl)

Bitte beantworten Sie folgende Fragen:

1. In welchem Bereich liegt der Dämpfungsgrad eines schwach gedämpften Feder-Masse Schwingers mit einem Freiheitsgrad?

2. Wie ist das logarithmische Dekrement definiert und wozu kann es verwendet werden?

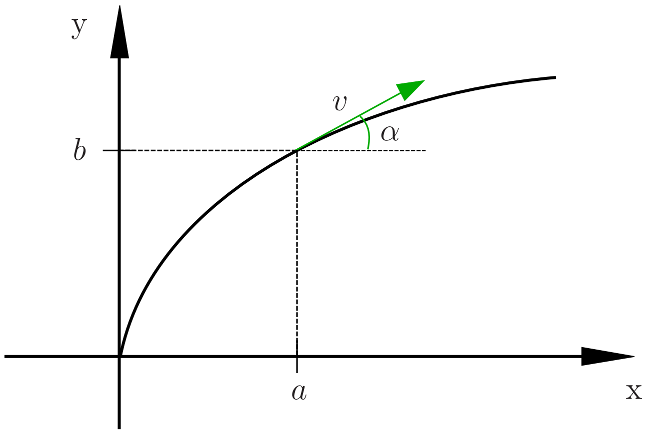
3. Zur Beschreibung eines diskreten mechanischen Systems werden oftmals generalisierte Koordinaten q_i verwendet. Wie lassen sich die zugehörigen generalisierten Kräfte Q_i berechnen, wenn es sich um ein konservatives System handelt?

4. Was versteht man unter einer Führungskraft (auch Reaktions- oder Zwangskraft genannt)?

5. Was besagt der Schwerpunktsatz?

6. Nennen Sie zwei zentrale Annahmen, die der elementaren Theorie des Stoßes zugrunde liegen.

2. Aufgabe: (ca. 15% der Gesamtpunkte)



Ein Fahrzeug durchfährt die oben abgebildete, langgezogene Rechtskurve der Form

$$\mathrm{y} = \sqrt{\frac{b^2}{a}\mathrm{x}}$$

Zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ ruht das Fahrzeug im Koordinatenursprung. Anschließend beschleunigt es in x-Richtung gemäß

$$a_x(t) = \tilde{a}_x t^2$$

Es soll der Zeitraum $t \in [0, T]$ betrachtet werden, bis zu welchem das Fahrzeug den Punkt $P(a, b)$ erreicht.
Bearbeiten Sie folgende Teilaufgaben:

a) Ermitteln Sie die Funktion $\mathrm{x}(t)$ in Abhängigkeit der gegebenen Anfangsbedingungen.

b) Ermitteln Sie die Beschleunigungskonstante $\tilde{a}_x$, so dass der Punkt $P(a, b)$ in $T = 4$ Sekunden erreicht wird.

c) Ermitteln Sie den Geschwindigkeitsverlauf $\dot{\mathrm{y}}(t)$.

d) Wie schnell fährt das Fahrzeug duch Punkt $P(a, b)$?

e) Ermitteln Sie den Winkel α der Gesamtgeschwindigkeit zur Horizontalen im Punkt $P(a, b)$.

f) Hängt α von der Länge der Gesamtgeschwindigkeit $v(t)$ ab? Begründen Sie Ihre Antwort.

Gegeben: $y = \sqrt{\frac{b^2}{a}x};\ a = 16m;\ b = 32m;\ a_x(t) = \tilde{a}_x t^2;\ \tilde{a}_x = \text{konst.};\ T = 4s$

Musterlösung - Aufgabe 2

a) Weg-Zeit-Verlauf $\mathrm{x}(t)$

$$\begin{aligned}
\ddot{\mathrm{x}}(t) &= \tilde{a}_x t^2 \\
\dot{\mathrm{x}}(t) &= \frac{1}{3}\tilde{a}_x t^3 + C_1 \qquad \leftrightarrow \qquad \dot{\mathrm{x}}(t=0) = 0 \qquad \Rightarrow C_1 = 0 \\
\mathrm{x}(t) &= \frac{1}{12}\tilde{a}_x t^4 + C_2 \qquad \leftrightarrow \qquad \mathrm{x}(t=0) = 0 \qquad \Rightarrow C_2 = 0
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathrm{x}(t) = \frac{1}{12}\tilde{a}_x t^4$$

b) Beschleunigungskonstante $\tilde{a}_x$ für $T = 4s$

$$\mathrm{x}(T) = a = \frac{1}{12}\tilde{a}_x T^4 \qquad \leftrightarrow \qquad \tilde{a}_x = 12\frac{a}{T^4} = \frac{3}{4}\frac{m}{s^4}$$

woraus folgt

$$\mathrm{x}(t) = \frac{1}{16}t^4$$

c) Geschwindigkeitsverlauf $\dot{\mathrm{y}}(t)$

Variante 1

$$\begin{aligned}
\mathrm{y}(t) &= \sqrt{\frac{b^2}{a}\mathrm{x}(t)} = \frac{b}{\sqrt{a}}\sqrt{\frac{1}{16}t^4} = 2t^2 \\
\dot{\mathrm{y}}(t) &= 4t
\end{aligned}$$

Variante 2

$$\dot{\mathrm{y}}(t) = \frac{\partial \mathrm{y}}{\partial \mathrm{x}}\frac{d\mathrm{x}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{b}{\sqrt{a}}\frac{1}{\sqrt{\mathrm{x}(t)}}\dot{\mathrm{x}}(t) = 4t$$

d) Geschwindigkeit in Punkt $P(a,b)$

Gesamtgeschwindigkeit $v(t)$

$$v(t) = \sqrt{\dot{\mathrm{x}}^2(t) + \dot{\mathrm{y}}^2(t)} = \sqrt{\frac{1}{16}t^6 + 16t^2}$$

Geschwindigkeit in $P(a,b)$

$$v(T) = \sqrt{2 * 4^4} = 22.63\frac{m}{s}$$

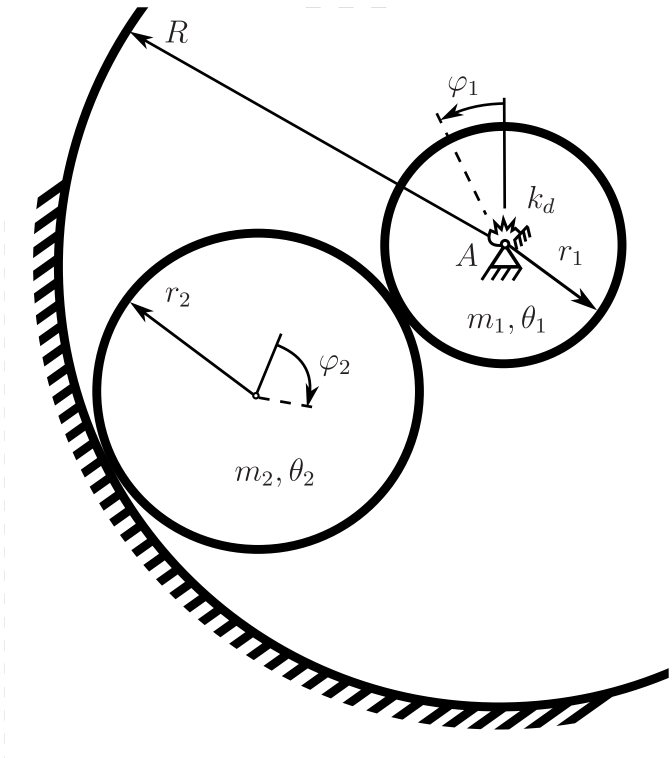
e) Winkel α an $P(a,b)$

$$\begin{aligned}
\tan(\alpha) &= \frac{dy}{d\mathrm{x}} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{d\mathrm{x}} = \frac{\dot{\mathrm{y}}(t)}{\dot{\mathrm{x}}(t)} \\
\alpha &= arc\tan\left(\frac{\dot{\mathrm{y}}(T)}{\dot{\mathrm{x}}(T)}\right) = arc\tan\left(4T\frac{4}{T^3}\right) = arc\tan(1) = 45^\circ
\end{aligned}$$

f) Abhängigkeit des Winkel α

Nein, der Winkel hängt ausschließlich von der Bahnkurve ab.

3. Aufgabe: (ca. 20% der Gesamtpunkte)



Das oben dargestellte schwingungsfähige System besteht aus drei Walzen mit unterschiedlichen Radien. Eine der drei Walzen (Radius r_1, Masse m_1, Massenträgheitsmoment θ_1) ist zentral in Punkt A zweiwertig, gelenkig gelagert und wird durch eine Drehfeder (Drehfedersteifigkeit k_d) gegenüber Rotationen versteift. Eine zweite Walze (Radius r_2, Masse m_2, Massenträgheitsmoment θ_2) rollt schlupffrei auf der Innenseite einer starr gelagerten Walze (Radius $R = r_1 + 2r_2$) sowie auf der Außenseite der zentral in A gelagerten Walze ab.

Bearbeiten Sie zu oben beschriebenem System folgende Teilaufgaben:

a) Stellen Sie die kinematische Beziehung zwischen den Koordinaten φ_1 und φ_2 auf.

b) Stellen Sie unter Verwendung der Lagrangeschen Gleichungen 2. Art die Bewegungsgleichung in Abhängigkeit der Koordinate φ_1 auf.

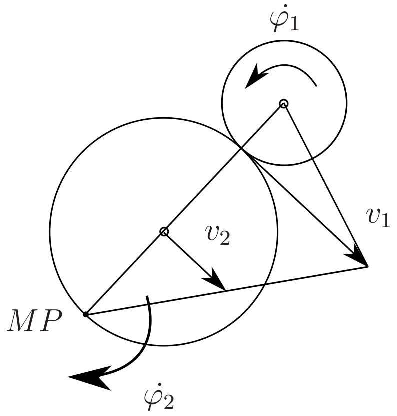
c) Berechnen Sie die Eigenfrequenz des Sytems.

Gegeben: $m_1;\ m_2;\ \theta_1;\ \theta_2;\ r_1;\ r_2;\ k_d$

<u>Hinweis</u>: Die Aufgabe ist mit der Methode nach Lagrange zu lösen. Andere Lösungswege als diese werden nicht gewertet. Der Einfluss der Gravitation kann vernachlässigt werden.

Musterlösung - Aufgabe 3

a) kinematische Beziehungen:



$$\dot\varphi_1\, r_1 = v_1$$
$$\dot\varphi_2\, 2r_2 = v_1$$

$$\dot\varphi_1\, r_1 = \dot\varphi_2\, 2r_2$$
$$\Rightarrow \boxed{\dot\varphi_1 = \dot\varphi_2\, 2\frac{r_2}{r_1}}$$
$$\Leftrightarrow \boxed{\dot\varphi_2 = \frac{1}{2}\,\frac{r_1}{r_2}\dot\varphi_1}$$

b) Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}\,\Theta_1\,\dot\varphi_1{}^2 + \frac{1}{2}\,(\Theta_2 + m_2\,r_2^2)\dot\varphi_2{}^2\\
V &= \frac{1}{2}\,k_d\,\varphi_1^2\\
L &= \frac{1}{2}\,\Theta_1\,\dot\varphi_1{}^2 + \frac{1}{2}\,(\Theta_2 + m_2\,r_2^2)\,\underbrace{\dot\varphi_2{}^2}_{\frac{1}{4}\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\dot\varphi_1{}^2} - \frac{1}{2}\,k_d\,\varphi_1^2
\end{aligned}$$

Euler-Lagrange-Gleichung (1 Freiheitsgrad φ_1):

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi_1}\Big) - \frac{\partial L}{\partial\varphi_1} = 0$$

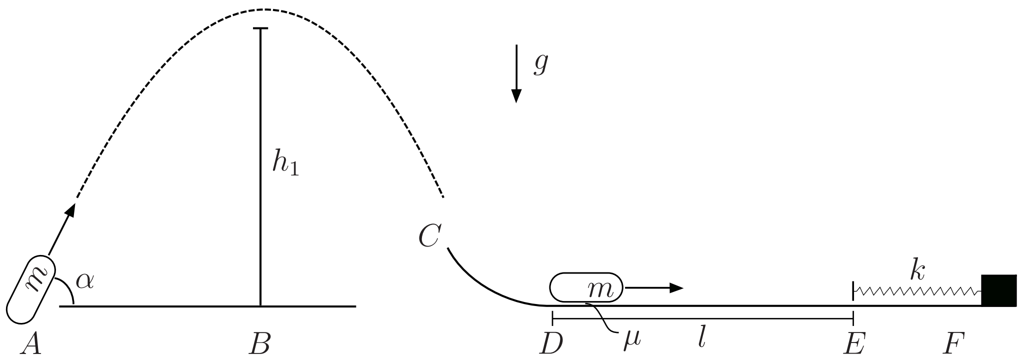
$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi_1} &= \Theta_1\,\dot\varphi_1 + \frac{1}{4}\,(\Theta_2 + m_2\,r_2^2)\Big(\frac{r_1}{r_2}\Big)^2\,\dot\varphi_1\\
\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi_1}\Big) &= (\Theta_1 + \frac{1}{4}\,\Theta_2\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 + \frac{1}{4}\,m_2\,r_1^2)\,\ddot\varphi_1\\
\frac{\partial L}{\partial\varphi_1} &= -k_d\,\varphi_1
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{(\Theta_1 + \frac{1}{4}\,\Theta_2\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 + \frac{1}{4}\,m_2\,r_1^2)\,\ddot\varphi_1 + k_d\,\varphi_1 = 0}$$

c) Eigenfrequenz:

$$\omega = \sqrt{\frac{k_d}{\Theta_1 + \frac{1}{4}\,\Theta_2\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 + \frac{1}{4}\,m_2\,r_1^2}} \qquad \text{siehe b)}$$

4. Aufgabe: (ca. 25% der Gesamtpunkte)



Ein Klotz der Masse m wird in Punkt A mit einer Anfangsgeschwindigkeit v_A und unter dem Winkel α über das Hindernis der Höhe h_1 in Punkt B geworfen. Anschließend landet er ohne Energieverlust in Punkt C und gleitet reibungsfrei bis Punkt D. Im Bereich $D - F$ befindet sich eine raue Oberfläche mit Reibungskoeffizient $\mu = 0,3$. In Punkt E trifft er mit der Geschwindigkeit $v_R = 4\frac{m}{s}$ auf eine Bremsfeder der Federsteifigkeit k.
Bearbeiten Sie folgende Teilaufgaben:

a) Mit welcher Geschwindigkeit v_0 wird der Klotz in Punkt A geworfen, wenn im Bereich D-E Coulombsche Gleitreibung angenommen wird?

b) Welche Höhe h_1 ist für das Hindernis in Punkt B in Abhängigkeit des Winkels α maximal zulässig?

c) Nach welcher Strecke in Bereich $E - F$ kommt der Klotz zum Stillstand?

d) Wie viel Energie ist in diesem Moment in der Feder gespeichert?

e) Welche Strecke legt der Klotz in Bereich $E-F$ zurück und welche Energie wird in der Feder gespeichert, wenn bei gleicher Abwurfgeschwindigkeit v_0 die Reibung vernachlässigbar ist?

f) Wie viel Energie wurde dem System durch die Reibung entzogen?

Gegeben: $m = 1kg;\ g = 10\frac{\mathrm{m}}{s^2};\ \mu = 0,3;\ k = 10\frac{N}{m};\ l = 1,5\mathrm{m}$

Musterlösung - Aufgabe 4

a) Geschwindigkeit v_0

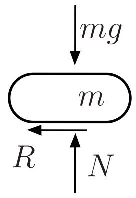
Energien

Punkt D: $T_D = \frac{1}{2} m\, v_D^2$, $V_D = 0$

Punkt E: $T_E = \frac{1}{2} m\, v_R^2$, $V_E = 0$

Nichtpotentialkräfte

Reibung:



$$\Rightarrow \qquad F_R = R = \mu N = \mu m g$$

Arbeit:

$$W_{F_R}\big|_0^l = -\int_0^l F_R\,\mathrm{d}s = -\int_0^l \mu m g\,\mathrm{d}s = -\mu m g l$$

Energiebilanz

$$\frac{1}{2} m\, v_D^2 - \mu m g l = \frac{1}{2} m\, v_R^2$$

$$\Rightarrow \qquad v_D = \sqrt{\frac{2}{m} \cdot \left(\frac{1}{2} m\, v_A^2 + mgh - 2cl\right)} = \sqrt{v_R^2 + 2\mu g l} = \sqrt{(4)^2 + 2 \cdot 0.3 \cdot 10 \cdot 1.5} = 5 \ \ [\frac{\mathrm{m}}{s}]$$

Selbes Energieniveau von A und D und keine Nichtpotentialkräfte:

$$v_0 = v_D = 5 \ \ [\frac{\mathrm{m}}{s}]$$

b) Maximale Höhe h_1

Kinematik: $v_y = v_y sin(\alpha)$

Energien in y-Richtung

Punkt A: $T_{A_y} = \frac{1}{2} m\, v_y^2$, $V_D = 0$

Punkt B: $T_{B_y} = 0$, $V_B = m g h_1$

Energiebilanz

$$\frac{1}{2}m\,v_y^2 = mgh_1$$

$$\Rightarrow \qquad h_1 = \frac{v_y^2}{2g} = \frac{v_0^2\,sin^2(\alpha)}{2g} = \frac{5}{4}\,sin^2(\alpha)\ \ [\mathrm{m}]$$

c) Strecke in Bereich $E-F$ mit Reibung

Energien

Punkt R: $T_E = \frac{1}{2}m\,v_R^2$, $V_E = 0$ Punkt F: $T_F = 0$, $V_F = \frac{1}{2}kx^2$

Nichtpotentialkräfte

$$W_{F_R}|_0^x = -\int_0^x F_W\,\mathrm{d}s = -\mu mgx$$

Energiebilanz

$$\frac{1}{2}m\,v_R^2 - \mu mgx = \frac{1}{2}k\,x^2$$
$$\Leftrightarrow x^2 + 2\frac{\mu mg}{k}x - \frac{m}{k}\,v_R^2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-2\frac{\mu mg}{k} \pm \sqrt{\left(2\frac{\mu mg}{k}\right)^2 + 4\frac{m}{k}v_R^2}}{2} = \begin{cases} x_1 = \ \ 1\ [\mathrm{m}] \\ x_2 = -1,6\ [\mathrm{m}] \qquad ↯ \end{cases}$$

d) Federenergie

Federenergie : $E_F = \frac{1}{2}k\,x^2 = 5\ \ [\mathrm{Nm}]$

e) Strecke in Bereich $E-F$ ohne Reibung

Keine Reibung und selbe Energiehöhe: $v_0 = v_E$

Energien

Punkt R: $T_E = \frac{1}{2}m\,v_R^2$, $V_E = 0$ Punkt F: $T_F = 0$, $V_F = \frac{1}{2}k\tilde{x}^2$

Energiebilanz

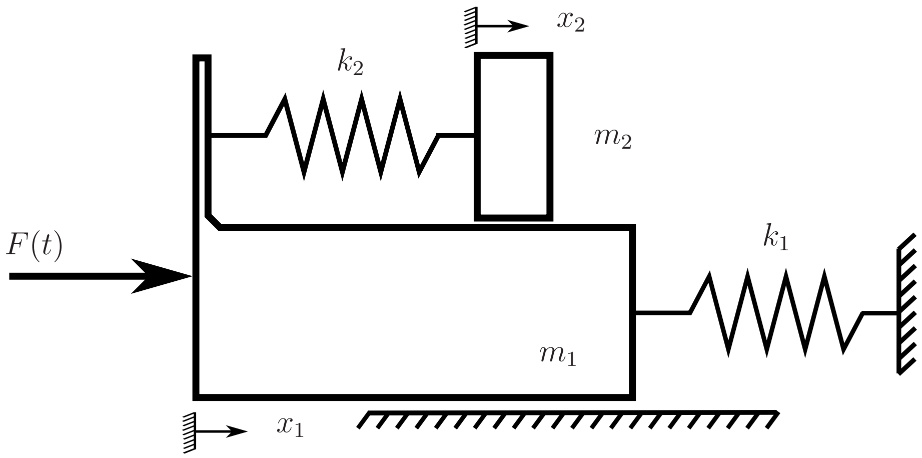
$$\frac{1}{2}m\,v_R^2 = \frac{1}{2}k\,\tilde{x}^2 \qquad \Rightarrow \qquad \tilde{x} = \sqrt{\frac{m}{k}v_0^2} = 1,581\ [\mathrm{m}]$$

Federenergie : $\tilde{E}_F = \frac{1}{2}k\,\tilde{x}^2 = 12,5\ [\mathrm{Nm}]$

f) Arbeit der Reibung

Arbeit der Reibung: $W_{\mathrm{ges}} = \tilde{E}_F - E_F = 7,5\ [\mathrm{Nm}]$

5. Aufgabe: (ca. 30% der Gesamtpunkte)



Ein Masseklotz (Masse m_1) wird horizontal mit einer Kraft $F(t) = F_0 \cos \Omega t$ harmonisch angeregt und gleitet reibungsfrei auf einer horizontalen Ebene. Der Masseklotz ist durch eine Feder (Federsteifigkeit k_1) mit einer Wand verbunden. Auf dem Masseklotz gleitet, ebenfalls reibungsfrei, ein zweiter Klotz (Masse m_2), der wiederrum mit dem ersten Masseklotz durch eine Feder (Federsteifigkeit k_2) verbunden ist. Bearbeiten Sie zu diesem mechanischen System folgende Teilaufgaben:

a) Bestimmen Sie die Anzahl der Freiheitsgrade.

b) Schneiden Sie das System frei.

c) Stellen Sie die Bewegungsgleichung(en) auf.

d) Berechnen Sie die Eigenfrequenz(en) des Systems und stellen Sie die zugehörige(n) Eigenform(en) grafisch dar.

e) Bestimmen Sie die Erregerfrequenz Ω so, dass sich die Masse m_1 im eingeschwungenen Zustand nicht bewegt. Ein Abklingen der homogenen Lösung kann angenommen werden.

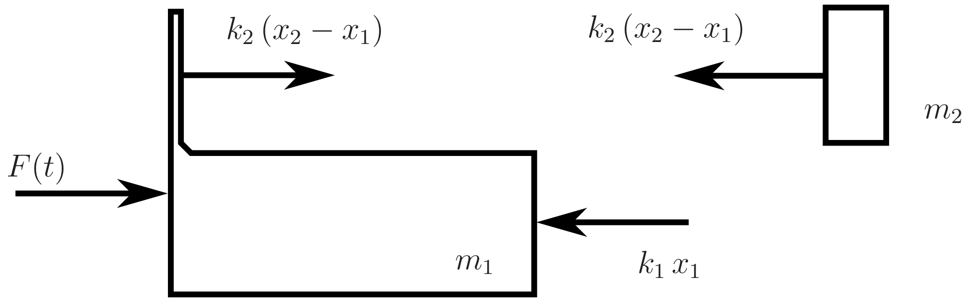
Gegeben: $m = m_2 = \dfrac{1}{2} m_1;\; k_1 = k_2 = k;\; F_0$

Hinweis: Für $x_1 = x_2 = 0$ sind beide Federn entspannt. Die Koordinaten x_1 und x_2 sind als ortsfest anzusehen. Lösen Sie die Aufgaben durch Zuhilfenahme des Schwerpunktsatzes (synthetische Methode). Andere Lösungsmethoden werden nicht gewertet.

Musterlösung - Aufgabe 5

a) Das System hat 2 Freiheitsgrade.

b) Freischnitt:



c) Bewegungsgleichungen:

Schwerpunktsätze

Masse 1:
$$F + k_2\,(x_2 - x_1) - k_1\,x_1 = m_1\,\ddot{x}_1$$
$$\Rightarrow \boxed{m_1\,\ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)\,x_1 - k_2\,x_2 = F(t)}$$

Masse 2:
$$-\,k_2\,(x_2 - x_1) = m_2\,\ddot{x}_2$$
$$\Rightarrow \boxed{m_2\,\ddot{x}_2 + k_2\,x_2 - k_2\,x_1 = 0}$$

mit $m_2 = \frac{1}{2}\,m_1 = m$ und $k_1 = k_2 = k$

$$\begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0\,\cos(\Omega\,t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

d) Eigenfrequenzen:

Zugehöriges Eigenwertproblem:

$$det(K - M\,\omega^2) \overset{!}{=} 0$$
$$\rightarrow\ (2k - 2m\,\omega^2)(k - 2m\,\omega^2) - k^2 \overset{!}{=} 0$$
$$\Leftrightarrow\ 2k^2 - k^2 - 2k\,m\,\omega^2 - 2m\,k\,\omega^2 + 2m^2\omega^4 = 0$$
$$\Leftrightarrow\ \omega^4 - 2\frac{k}{m}\,\omega^2 + \frac{k^2}{2m^2}$$
$$\Leftrightarrow\ \left(\omega^2 - \frac{k}{m}\right)^2 - \left(\frac{k}{m}\right)^2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{k}{m}\right)^2$$
$$\omega^2 = \frac{k}{m} \pm \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{k}{m}\right)^2}$$

$$\omega_1^2 = (1 - \frac{1}{\sqrt{2}})\frac{k}{m}$$
$$\omega_1^2 = (1 + \frac{1}{\sqrt{2}})\frac{k}{m}$$

Eigenformen:

$$(K - M\,\omega_i^2)\,C_i \stackrel{!}{=} 0$$

$$\begin{bmatrix} 2k - 2m\,\omega_i^2 & -k \\ -k & k - m\,\omega_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1^i \\ C_2^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(2k - 2m\,\omega_i^2)\,C_1^i - k\,C_2^i = 0$$

Setze $C_1^i = 1$

$$(2k - 2m\,\omega_i^2)\cdot 1 - k\,C_2^i = 0$$

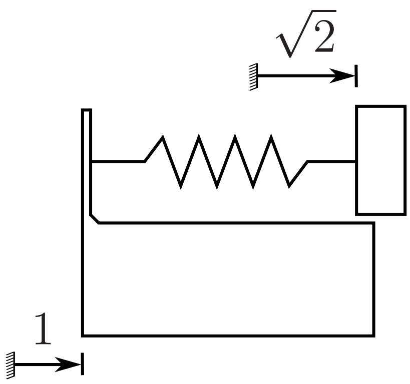
$$C_2^i = \frac{2k - 2m\,\omega_i^2}{k}$$

1.Eigenform:

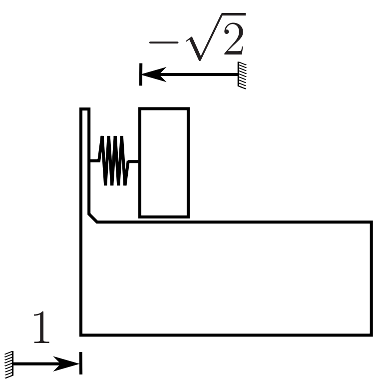
$$C_1^1 = 1\,; \quad C_2^1 = \frac{2k - 2m\,(1 - \frac{1}{\sqrt{2}})\frac{k}{m}}{k} = 2 - 2 + \frac{2}{\sqrt{2}} = +\frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

2.Eigenform:

$$C_1^2 = 1\,; \quad C_2^2 = \frac{2k - 2m\,(1 + \frac{1}{\sqrt{2}})\frac{k}{m}}{k} = 2 - 2 - \frac{2}{\sqrt{2}} = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$$



1. Eigenform



2. Eigenform

e) Erregerfrequenz:

homogene Lösung abgeklungen $\to$ nur partikuläre Lösung
Ansatz vom Typ der rechten Seite:

$$x_{1p} = c_1 \cos(\Omega t) \qquad \ddot{x}_{1p} = -c_1 \Omega^2 \cos(\Omega t)$$
$$x_{2p} = c_2 \cos(\Omega t) \qquad \ddot{x}_{2p} = -c_2 \Omega^2 \cos(\Omega t)$$

Einsetzen:

$$\begin{cases} -2m\, c_1 \Omega^2 \cos(\Omega t) + 2k\, c_1 \cos(\Omega t) - k\, c_2 \cos(\Omega t) = F_0 \cos(\Omega t) \\ -m\, c_2 \Omega^2 \cos(\Omega t) - k\, c_1 \cos(\Omega t) + k\, c_2 \cos(\Omega t) = 0 \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} -2m\, c_1 \Omega^2 + 2k\, c_1 - k\, c_2 = F_0 & (1) \\ -m\, c_2 \Omega^2 - k\, c_1 + k\, c_2 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(2): \quad c_1 = \frac{k - m\,\Omega^2}{k} c_2 \qquad (3)$$

$$\text{in } (1): \quad (-2m\,\Omega^2 + 2k) \frac{k - m\,\Omega^2}{k} c_2 - k\, c_2 = F_0$$
$$\Leftrightarrow \underbrace{\left((-2m\,\Omega^2 + 2k) \frac{k - m\,\Omega^2}{k} - k\right)}_{\beta} c_2 = F_0$$
$$\Rightarrow c_2 = \frac{F_0}{\beta}$$

$$\text{in } (3): \quad c_1 = \frac{k - m\,\Omega^2}{k} \frac{F_0}{\beta} \stackrel{!}{=} 0 \quad \to \quad k - m\,\Omega^2 \stackrel{!}{=} 0$$
$$\Rightarrow \boxed{\Omega = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$