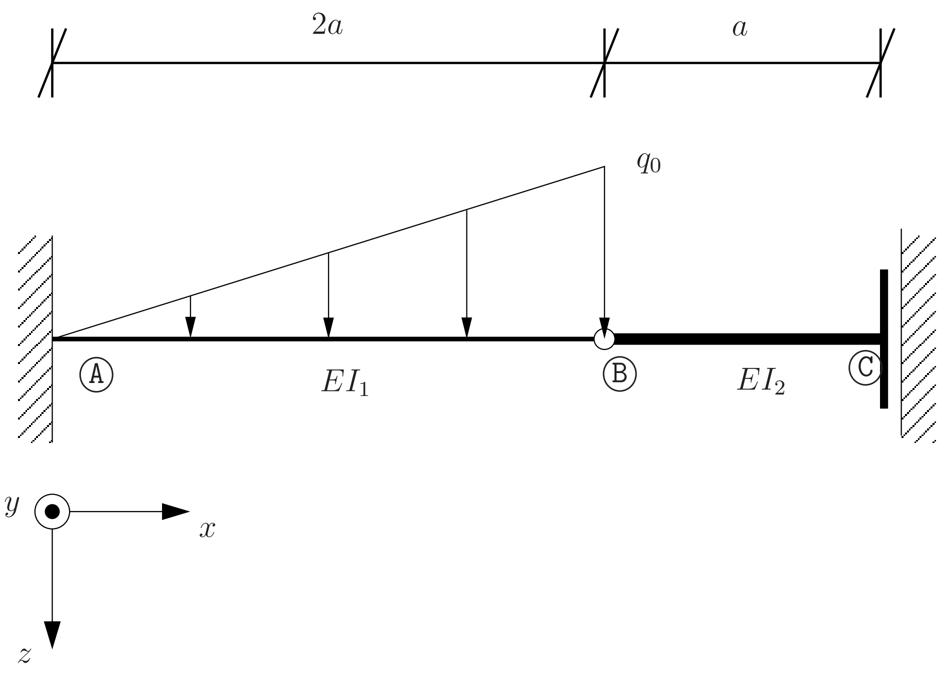
2. Aufgabe: (ca. 29% der Gesamtpunkte)



Der oben dargestellte Zweifeldträger mit Gelenk ist einseitig durch eine lineare Streckenlast $q(x)$ belastet.

a) Geben Sie sämtliche Rand- und Übergangsbedingungen in den Punkten A, B und C an.

b) Ermitteln Sie die Biegelinie $w(x)$ für den gesamten Träger.

c) Für welche Biegesteifigkeit EI_1 stellt sich eine Absenkung $w_c = w(x = 3a) = \frac{2}{15}a$ am Punkt C ein ?

d) Wie ändert sich die Durchbiegung w_B am Punkt B bei Verdoppelung der Biegesteifigkeit EI_2? (Auf dem Aufgabenblatt ankreuzen!)

wird kleiner	bleibt gleich	wird größer
○	○	○

Gegeben: EI_1, EI_2, a, q_0

Musterlösung - Aufgabe 2

a)
- Unterteilung in zwei Bereiche ① und ②: $w(x) \begin{cases} w_1(x) & \text{für} \quad 0 \le x \le 2a \\ w_2(x) & \text{für} \quad 2a \le x \le 3a \end{cases}$
- Randbedingungen

Punkt Ⓐ :
$$\begin{aligned} w_1(x=0) &= 0 \\ w_1'(x=0) &= 0 \end{aligned} \qquad \text{(Feste Einspannung)}$$

Punkt Ⓑ :
$$\begin{aligned} w_1(x=2a) &= w_2(x=2a) \\ EI_1 w_1''(x=2a) &= EI_2 w_2''(x=2a) = -M(x=2a) = 0 \text{ (Gelenk)} \\ EI_1 w_1'''(x=2a) &= EI_2 w_2'''(x=2a) = -Q(x=2a) \neq 0 \end{aligned}$$

Punkt Ⓒ :
$$\begin{aligned} w_2'(x=3a) &= 0 \\ EI_2 w_2'''(x=3a) &= -Q(x=3a) = 0 \end{aligned} \qquad \text{(Parallelführung)}$$

b)
- Bereich ① mit Streckenlast $q(x) = \frac{q_0}{2a}x$

$$\begin{aligned} EI_1 w_1^{IV}(x) &= q(x) = \frac{q_0}{2a}x \\ EI_1 w_1'''(x) &= \frac{q_0}{4a}x^2 + C_1 \\ EI_1 w_1''(x) &= \frac{q_0}{12a}x^3 + C_1 x + C_2 \\ EI_1 w_1'(x) &= \frac{q_0}{48a}x^4 + \frac{1}{2}C_1 x^2 + C_2 x + C_3 \\ EI_1 w_1(x) &= \frac{q_0}{240a}x^5 + \frac{1}{6}C_1 x^3 + \frac{1}{2}C_2 x^2 + C_3 x + C_4 \end{aligned}$$

- Bereich ② keine Streckenlast!

$$\begin{aligned} EI_2 w_1^{IV}(x) &= 0 \\ EI_2 w_2'''(x) &= C_5 \\ EI_2 w_2''(x) &= C_5 x + C_6 \\ EI_2 w_2'(x) &= \frac{1}{2}C_5 x^2 + C_6 x + C_7 \\ EI_2 w_2(x) &= \frac{1}{6}C_5 x^3 + \frac{1}{2}C_6 x^2 + C_7 x + C_8 \end{aligned}$$

- Integrationskonstanten bestimmen

$$\begin{aligned} \text{RB Ⓐ}_1 &: w_1(x=0) = 0 \rightarrow \boxed{C_4 = 0} \\ \text{RB Ⓐ}_2 &: w_1'(x=0) = 0 \rightarrow \boxed{C_3 = 0} \\ \text{RB Ⓒ}_2 &: EI_2 w_2'''(x=3a) = 0 \rightarrow \boxed{C_5 = 0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ÜB Ⓑ}_3 &: EI_1 w_1'''(x=2a) = EI_2 w_2'''(x=2a) \\ &\Rightarrow -\frac{q_0}{4a} \cdot 4a^2 + C_1 = C_5 \Leftrightarrow \boxed{C_1 = -q_0 a} \end{aligned}$$

ÜB B$_2$: $EI_1 w_1''(x=2a) = EI_2 w_2''(x=2a) = 0$

$$\Rightarrow EI_1 w_1''(x=2a) = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{q_0}{12a}(2a)^3 + C_1 2a + C_2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{2}{3} q_0 a^2 - 2 q_0 a^2 = -C_2 \rightarrow \boxed{C_2 = \frac{4}{3} q_0 a^2}$$

$$\Rightarrow EI_2 w_2''(x=2a) = 0$$
$$\Leftrightarrow C_5 2a + C_6 = 0 \rightarrow \boxed{C_6 = 0}$$

RB C$_1$: $w_2'(x=3a) = 0$

$$\Rightarrow C_6 3a + C_7 = 0 \rightarrow \boxed{C_7 = 0}$$

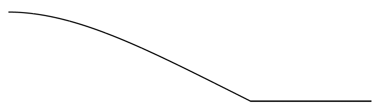
ÜB B$_1$: $w_1(x=2a) = w_2(x=2a)$

$$\Rightarrow \frac{1}{EI_1}\left(\frac{q_0}{240a}(2a)^5 - \frac{1}{6} q_0 a (2a)^3 + \frac{2}{3} q_0 a^2 (2a)^2\right) = \frac{1}{EI_2} C_8$$
$$\Leftrightarrow \boxed{C_8 = \frac{EI_2}{EI_1}\left(\frac{22}{15} q_0 a^4\right)}$$

- Biegelinie

$$w(x) = \begin{cases} w_1(x) = \dfrac{1}{EI_1}\left(\dfrac{q_0}{240a}x^5 - \dfrac{q_0 a}{6}x^3 + \dfrac{2 q_0 a^2}{3}x^2\right) & \text{für } 0 \le x \le 2a \\ w_2(x) = \dfrac{1}{EI_1}\left(\dfrac{22}{15} q_0 a^4\right) & \text{für } 2a \le x \le 3a \end{cases}$$

c) - Qualitativer Verlauf Biegelinie



$\Rightarrow$ Absenkung für Bereich 2 konstant (siehe b))

$$w_2(x=3a) = w_c = \frac{2}{15} a$$
$$\Leftrightarrow \frac{2}{15} a = \frac{1}{EI_1}\left(\frac{22}{15} q_0 a^4\right)$$
$$\Leftrightarrow \boxed{EI_1 = 11 q_0 a^3}$$

d) Die Durchbiegung w_B ändert sich nicht, da Biegelinie $w(x)$ unabhängig von EI_2 (siehe Aufgabenteil b)).