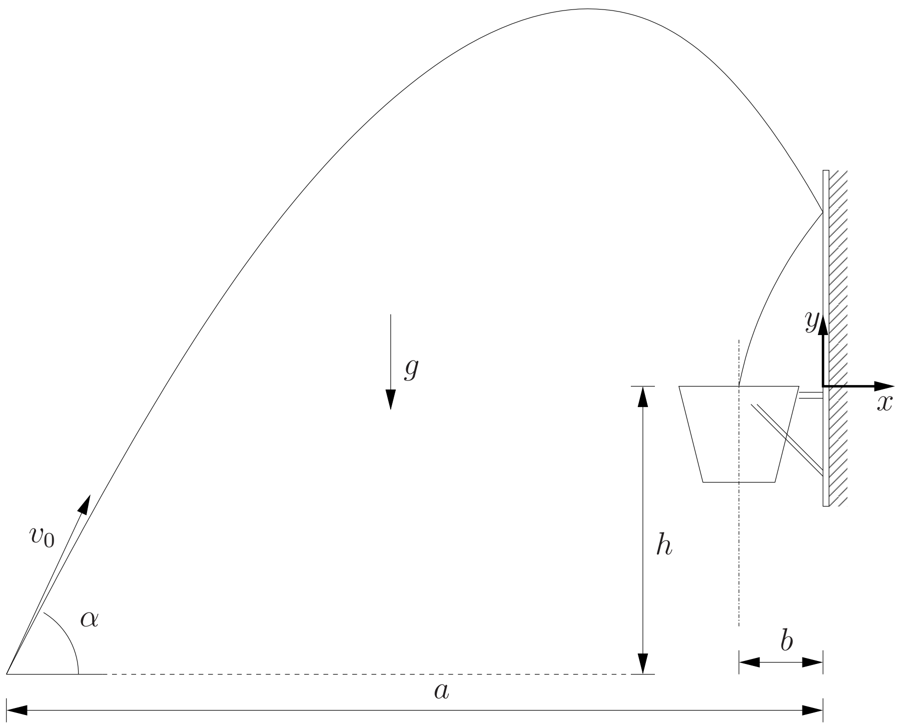
Institut für Mechanik	Prüfung in
Prof. Dr.-Ing. habil. P. Betsch	Dynamik
Prof. Dr.-Ing. habil. Th. Seelig	14. August 2013

Aufgabe 1 (10 Punkte)



Freiwurf
Ein Basketballspieler steht auf der Freiwurflinie (Abstand a) und wirft zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ indirekt in den Korb. Das heißt der Ball prallt erst am glatten Brett ab und trifft genau mittig in den Korb. Die Größen a, b, h, v_0, α und g seien bekannt. Reibungseffekte dürfen vernachlässigt und der Ball als Massenpunkt betrachtet werden.

a) Stellen Sie alle Bewegungsgleichungen im gegebenen Koordinatensystem auf!

b) Zu welchem Zeitpunkt t_B prallt der Ball an der Wand auf?

c) Zu welchem Zeitpunkt t_C taucht der Ball in den Korb ein?

d) Wie groß ist die Stoßzahl e zwischen Ball und Brett?

Musterlösung - Aufgabe 1

a) Bewegungsgleichungen

In x-Richtung:

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= 0 && \text{für } t < t_\mathrm{B} \\
\dot{x} &= v_0 \, \cos\alpha && \text{für } t < t_\mathrm{B} \\
x &= v_0 \, \cos\alpha \, t - a && \text{für } t \leq t_\mathrm{B} \\
\ddot{x} &= 0 && \text{für } t > t_\mathrm{B} \\
\dot{x} &= v_\mathrm{b} && \text{für } t > t_\mathrm{B} \\
x &= v_\mathrm{b}(t - t_\mathrm{B}) && \text{für } t \geq t_\mathrm{B}
\end{aligned}$$

In y-Richtung:

$$\begin{aligned}
\ddot{y} &= -g && \text{für } t < t_\mathrm{B} \\
\dot{y} &= -g\,t + v_0 \, \sin\alpha && \text{für } t < t_\mathrm{B} \\
y &= -\tfrac{1}{2}\,g\,t^2 + v_0 \, \sin\alpha\,t - h && \text{für } t \leq t_\mathrm{B} \\
\ddot{y} &= -g && \text{für } t > t_\mathrm{B} \\
\dot{y} &= -g\,t + \dot{y}(t_\mathrm{B}) && \text{für } t > t_\mathrm{B} \\
y &= -\tfrac{1}{2}\,g\,(t - t_\mathrm{B})^2 + \dot{y}(t_\mathrm{B}) \cdot (t - t_\mathrm{B}) + y(t_\mathrm{B}) && \text{für } t \geq t_\mathrm{B}
\end{aligned}$$

Beim Einsetzen zeigt sich direkt, daß der Stoß keinen Einfluß in y-Richtung hat:

$$y = -\tfrac{1}{2}\,g\,t^2 + v_0 \, \sin\alpha\,t - h \qquad \text{für alle } t$$

b) Zeitpunkt t_B

$$\begin{aligned}
x(t_\mathrm{B}) = 0 &= v_0 \, \cos\alpha\,t_\mathrm{B} - a \\
t_\mathrm{B} &= \frac{a}{v_0 \cos\alpha}
\end{aligned}$$

c) Zeitpunkt t_C

$$\begin{aligned}
y(t_\mathrm{C}) = 0 &= -\frac{1}{2}\,g\,t_\mathrm{C}^2 + v_0 \, \sin\alpha\,t_\mathrm{C} - h \\
t_\mathrm{C} &= \frac{1}{-g}\left(-v_0 \, \sin\alpha \pm \sqrt{v_0^2 \, \sin^2\alpha - 2\,g\,h}\right)
\end{aligned}$$

Diese quadratische Gleichung hat zwei Lösungen. Aus der Form der Wurfparabel erkennt man, daß der spätere Zeitpunkt der gesuchte sein muß.

$$\begin{aligned}
t_\mathrm{C} &= \frac{1}{-g}\left(-v_0 \, \sin\alpha - \sqrt{v_0^2 \, \sin^2\alpha - 2\,g\,h}\right) \\
&= \frac{1}{g}\left(v_0 \, \sin\alpha + \sqrt{v_0^2 \, \sin^2\alpha - 2\,g\,h}\right)
\end{aligned}$$

d) <u>Stoßzahl e</u>

$$e \stackrel{\mathrm{D}}{=} -\frac{v_{\mathrm{b}}^{\mathrm{I}} - v_{\mathrm{b}}^{\mathrm{II}}}{v_{\mathrm{a}}^{\mathrm{I}} - v_{\mathrm{a}}^{\mathrm{II}}}$$

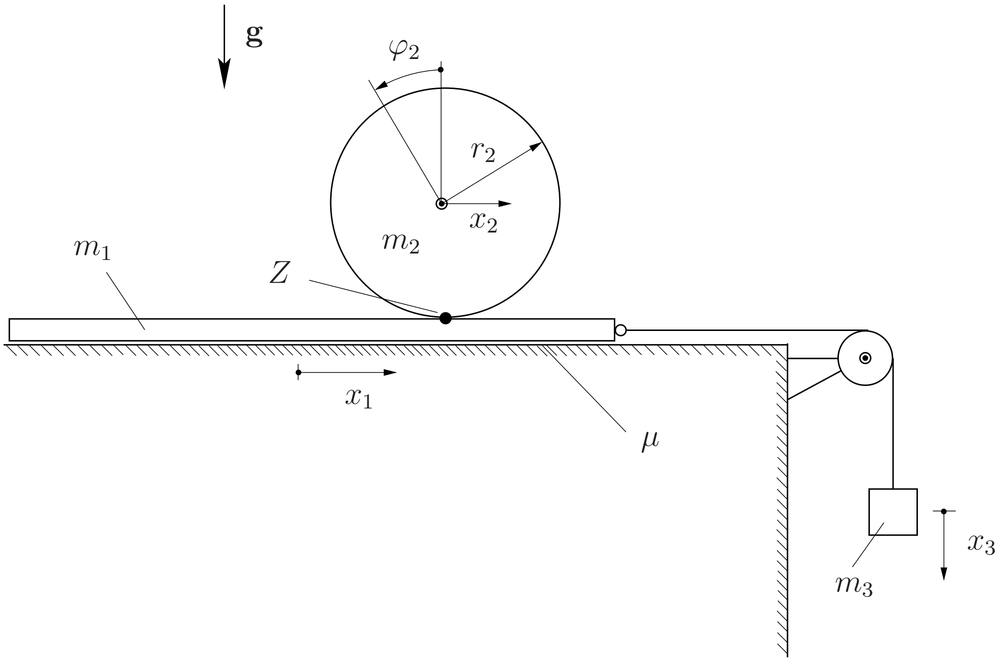
(in Stoßnormalenrichtung) mit $v_{\mathrm{a}}^{\mathrm{I}} = \dot{x}(t < t_{\mathrm{B}})$, $v_{\mathrm{b}}^{\mathrm{I}} = \dot{x}(t > t_{\mathrm{B}})$ und $v_{\mathrm{a}}^{\mathrm{II}} = v_{\mathrm{b}}^{\mathrm{II}} = 0$.

$$e = -\frac{\dot{x}(t > t_{\mathrm{B}})}{\dot{x}(t < t_{\mathrm{B}})} = -\frac{v_{\mathrm{b}}}{v_0\,\cos\alpha}$$

$$x(t_{\mathrm{C}}) = -b = v_{\mathrm{b}}\,(t_{\mathrm{C}} - t_{\mathrm{B}})$$
$$v_{\mathrm{b}} = \frac{-b}{t_{\mathrm{C}} - t_{\mathrm{B}}}$$

$$\begin{aligned} e &= -\frac{-b}{v_0\,\cos\alpha\,(t_{\mathrm{C}} - t_{\mathrm{B}})} \\ &= \frac{b}{v_0\,\cos\alpha\left(\frac{1}{g}\left(v_0\,\sin\alpha + \sqrt{v_0^2\,\sin^2\alpha - 2\,g\,h}\right) - \frac{a}{v_0\,\cos\alpha}\right)} \end{aligned}$$

Aufgabe 2 (12 Punkte)



Ein Brett (Masse m_1) ist über ein undehnbares Seil mit einem Gewicht (Masse m_3) verbunden. Das Brett liegt auf einer rauhen Unterlage (Reibkoeffizient μ) und das Seil wird über eine masselose Rolle umgelenkt. Auf dem Brett sitzt im Punkt Z eine Rolle. Das System wird nun aus dem Ruhezustand losgelassen. Es soll nun die Zeitspanne der Bewegung betrachtet werden bei der sich die Rolle noch auf dem Brett befindet und gleitfrei abrollt.

a) Schneiden Sie die massenbehafteten Körper frei und geben Sie ihre Bewegungsgleichungen an.

b) Bestimmen Sie die kinematischen Beziehungen für die Geschwindigkeiten $\dot{x}_2$ und $\dot{x}_3$.

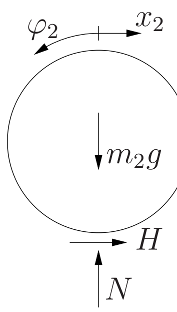
c) Berechnen Sie die Beschleunigung $\ddot{x}_3$ der Masse m_3.

d) Bestimmen Sie den Haftkoeffizienten μ_0 zwischen Unterlage und Brett bei dem das System in Ruhe bleibt.

<u>Gegeben:</u> m_1, m_2, m_3, r_2, μ, g.

Musterlösung - Aufgabe 2

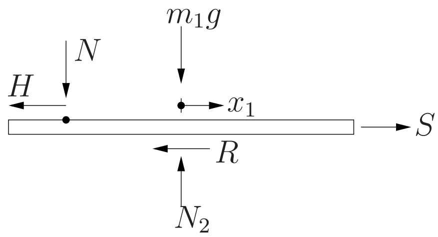
a) Kinetik:



$$m_2\,\ddot{x}_2 = H \tag{1}$$

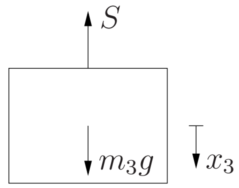
$$0 = N - m_2\,g \tag{2}$$

$$\Theta\,\ddot{\varphi}_2 = H\,r_2 \qquad | \quad \Theta = \frac{1}{2}\,m_2\,r_2^2 \tag{3}$$



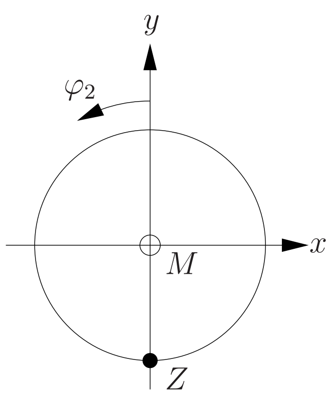
$$m_1\,\ddot{x}_1 = S - H - R \qquad | \quad R = \mu\,N_2 \tag{4}$$

$$0 = N_2 - N - m_1\,g \tag{5}$$



$$m_3\,\ddot{x}_3 = m_3\,g - S \tag{6}$$

b) Kinematik:



$$\dot{x}_2 = -\dot{\varphi}_2\,r_2 + \dot{x}_1 \quad \Leftrightarrow \quad \dot{x}_1 = \dot{x}_2 + \dot{\varphi}_2\,r_2 \tag{7}$$

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_3 \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_3 = \dot{x}_2 + \dot{\varphi}_2\,r_2 \tag{8}$$

alternativ zu Lösen über Euler-Beziehung:

$$
\begin{aligned}
&\vec{v}_{\text{ZS}} = \vec{v}_{\text{MGP}} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{\text{MGP-2s}} \qquad | \quad \text{2s} \mathrel{\widehat{=}} \text{Schwerpunkt von m} \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi}_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ r_2 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -r_2\,\dot{\varphi}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{x}_2 = \dot{x}_1 - \dot{\varphi}_2\, r_2
\end{aligned}
$$

c) (1) in (3)

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2} m_2\, r_2^2\, \ddot{\varphi}_2 &= m_2\, r_2\, \ddot{x}_2 \qquad |\, \text{mit (7)} \\
\Leftrightarrow \ddot{\varphi}_2\, r_2 &= \frac{2}{3}\, \ddot{x}_1 = \frac{2}{3}\, \ddot{x}_3 \qquad (9)
\end{aligned}
$$

$$
m_3\, \ddot{x}_3 = m_3\, g - S \qquad (10)
$$

(4) nach S umstellen mit (5), (1)

$$
\begin{aligned}
S = m\, \ddot{x}_1 + H + R &= m_1\, \ddot{x}_1 + m_2\, \ddot{x}_2 + \mu\, (N + m_1\, g) \\
&= m_1\, \ddot{x}_1 + \frac{1}{2}\, m_2\, r_2\, \ddot{\varphi}_2 + \mu\, (m_2\, g + m_1\, g) \qquad |\, \text{mit (8)} \\
&= m_1\, \ddot{x}_3 + \frac{1}{3}\, m_2\, \ddot{x}_3 + \mu\, (m_2\, g + m_1\, g) \qquad |\, \text{in (6)}
\end{aligned}
$$

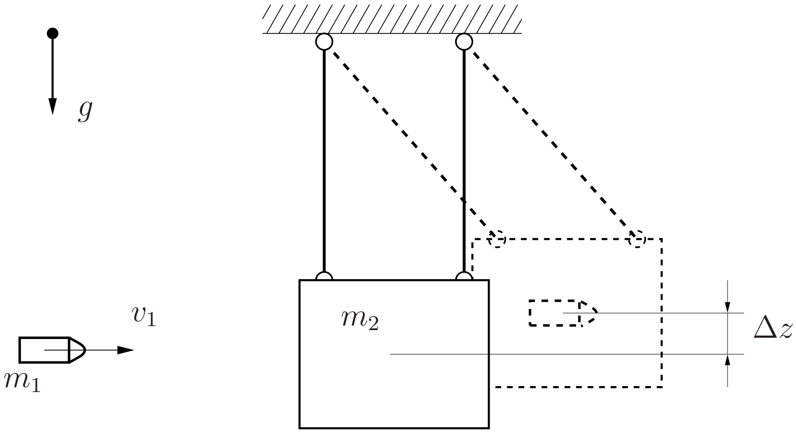
$$
\Rightarrow m_3\, \ddot{x}_3 = m_3\, g - m\, \ddot{x}_3 - \frac{1}{3}\, m_2\, \ddot{x}_3 - \mu\, (m_2\, g + m_1\, g)
$$

$$
\begin{aligned}
\Leftrightarrow \ddot{x}_3 \left(m_3 + m_1 + \frac{1}{3}\, m_2 \right) &= m_3\, g - \mu\, g\, (m_2 + m_1) \\
\Leftrightarrow \ddot{x}_3 &= \frac{m_3\, g - \mu\, g\, (m_1 + m_2)}{m_1 + \frac{m_2}{3} + m_3}
\end{aligned}
$$

d) $\mu_0 = ?$

$$
\begin{aligned}
\ddot{x}_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 &= \frac{m_3\, g - \mu_0\, g\, (m_1 + m_2)}{m_1 + \frac{m_2}{3} + m_3} \qquad (11) \\
\Rightarrow \mu_0 &= \frac{m_3}{m_1 + m_2} \qquad (12)
\end{aligned}
$$

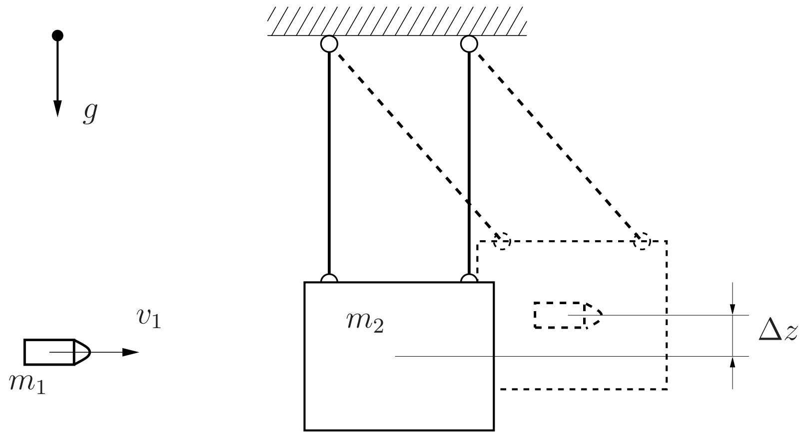
Aufgabe 3 (6 Punkte)



Zur Messung der Geschwindigkeit eines Geschosses (m_1) wird das in der oberen Abbildung dargestellte ballistische Pendel verwendet. Das Geschoss dringt mit einer Geschwindigkeit v_1 in das Pendel (m_2) ein und bleibt stecken. Dabei bewegt sich das System um eine Höhe Δz nach oben. Aus dieser Höhendifferenz soll nun die Geschossgeschwindigkeit (v_1) ermittelt werden. Der Stoßvorgang erfolgt dabei voll plastisch.

Geg.: m_1, m_2, g, Δz

Musterlösung - Aufgabe 3



- Stoßgesetz:

$$\epsilon = \frac{\bar{v}_2 - \bar{v}_1}{v_1 - v_2} \qquad |\text{ plastischer Stoß: } \varepsilon = 0$$
$$\Rightarrow \bar{v}_2 = \bar{v}_1$$

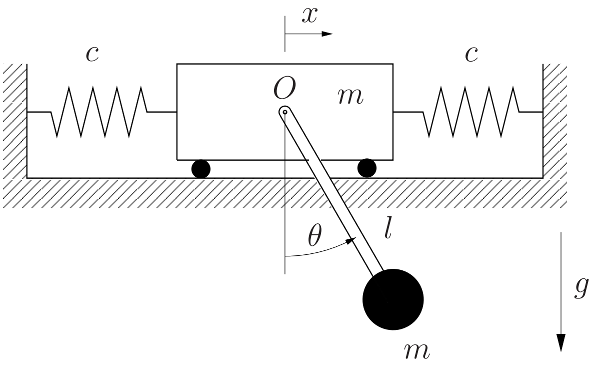
- Impulserhaltung

$$m_1\, v_1 + m_2\, v_2 = m_1\, \bar{v}_1 + m_2\, \bar{v}_2 \qquad |\, v_2 = 0, \bar{v}_2 = \bar{v}_1$$
$$\Leftrightarrow v_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1}\, \bar{v}_2 \tag{1}$$

- Energieerhaltung nach dem Stoß

$$E_{kin}^{Stoß} + E_{pot}^{Stoß} = E_{kin}^{\Delta z} + E_{pot}^{\Delta z}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\,(m_1 + m_2)\, \bar{v}_2^2 + 0 = 0 + (m_1 + m_2)\, g\, \Delta z$$
$$\Leftrightarrow \bar{v}_2 = \sqrt{2\, g\, \Delta z} \qquad |\text{ in } (1)$$
$$\Rightarrow v_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1} \sqrt{2\, g\, \Delta z}$$

Aufgabe 4 (12 Punkte)



Ein Körper mit der Masse m bewegt sich ohne Reibung entlang einer horizontalen Fläche. Er ist über zwei Federn mit identischen Federsteifigkeiten c an starre Wände angeschlossen. Ein Pendel mit der gleichen Masse m und der Länge l ist im Punkt O drehbar befestigt. Das Pendel ist als Massenpunkt zu betrachten, der Pendelstab ist masselos.

Gegeben: m, g, c, $mg = \dfrac{c\,l}{2}$

Berechnen Sie unter Verwendung der generalisierten Koordinaten x und θ:

1. die Bewegungsgleichungen des Systems mit Hilfe der Lagrange Gleichungen 2. Art,

2. die linearisierten Bewegungsgleichungen,

3. die Eigenfrequenzen des Systems und

4. die zugehörigen Eigenvektoren.

Musterlösung - Aufgabe 4

1. Potentielle Energie:

$$E_{\text{pot}} = -m\,g\,l\,\cos(\theta) + 2\left[\frac{1}{2}\,c\,x^2\right]$$

2. Kinetische Energie:

   Ortsvektoren der Schwerpunkte:

Wagen:	$\vec{x}_1 = x\,\vec{e}_x$
Pendel:	$\vec{x}_2 = [x + l\,\sin(\theta)]\,\vec{e}_x - [l\,\cos(\theta)]\,\vec{e}_y$

   Aus den Ortsvektoren folgt:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{x}}_1 &= \dot{x}\,\vec{e}_x\\ |\dot{\vec{x}}_1|^2 &= \dot{x}^2\\ \dot{\vec{x}}_2 &= \left[\dot{x} + l\,\cos(\theta)\,\dot{\theta}\right]\,\vec{e}_x + \left[l\,\sin(\theta)\,\dot{\theta}\right]\,\vec{e}_y\\ |\dot{\vec{x}}_2|^2 &= \dot{x}^2 + 2\,\dot{x}\,\dot{\theta}\,l\,cos(\theta) + l^2\,\dot{\theta}^2\end{aligned}$$

$$E_{\text{kin}} = m\,\dot{x}^2 + m\,\dot{x}\,\dot{\theta}\,l\,\cos\theta + \frac{1}{2}\,m\,l^2\,\dot{\theta}^2$$

3. Lagrangefunktion:

$$L = E_{\text{kin}} - E_{\text{pot}}$$

   Bewegungsgleichungen:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \qquad\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= 2\,m\,\dot{x} + m\,\dot{\theta}\,l\,\cos\theta\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) &= 2\,m\,\ddot{x} + m\,l\,\left[\ddot{\theta}\,\cos\theta - \sin\theta\,\dot{\theta}^2\right]\\ \frac{\partial L}{\partial x} &= -\,2\,c\,x\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} &= 0\end{aligned}$$

$$2\,m\,\ddot{x} + m\,l\,\ddot{\theta}\,\cos\theta - m\,l\,\sin\theta\,\dot{\theta}^2 + 2\,c\,x = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\theta} = m\,\dot x\,l\,\cos\theta + m\,l^2\,\dot\theta$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right) = m\,l\,\left[\ddot x\,\cos\theta - \dot x\,\sin\theta\,\dot\theta\right] + m\,l^2\,\ddot\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -\,m\,\dot x\,\dot\theta\,l\,\sin\theta - m\,g\,l\,\sin\theta$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$m\,l\,\ddot x\,\cos\theta + m\,l^2\,\ddot\theta + m\,g\,l\,\sin\theta = 0$$

Gleichgewichtslage:

$$2\,c\,x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$$

$$m\,g\,l\,\sin\theta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \theta = 0$$

Linearisierung:

$$2\,m\,\ddot x + m\,l\,\ddot\theta + 2\,c\,x = 0$$

$$m\,l\,\ddot x + m\,l^2\,\ddot\theta + m\,g\,l\,\theta = 0$$

Ansatz:

$$x(t) = a_1\,\cos(\omega\,t - \psi) \qquad \theta(t) = a_2\,\cos(\omega\,t - \psi)$$

$$x(t) = -\,a_1\,\omega^2\,\cos(\omega\,t - \psi) \qquad \theta(t) = -\,a_2\,\omega^2\,\cos(\omega\,t - \psi)$$

4. Eigenfrequenzen:

$$2\,m\,\ddot x + m\,l\,\ddot\theta + 2\,c\,x = 0 \qquad m\,l\,\ddot x + m\,l^2\,\ddot\theta + m\,g\,l\,\theta = 0$$

$$(-2\,m\,\omega^2 + 2\,c)\,a_1 + (-\,m\,l\,\omega^2)\,a_2 = 0 \quad (-\,m\,l\,\omega^2)\,a_1 + (-\,m\,l^2\,\omega^2 + m\,g\,l)\,a_2 = 0$$

$$\begin{vmatrix} (-\,2\,m\,\omega^2 + 2\,c) & -\,m\,l\,\omega^2 \\ -\,m\,l\,\omega^2 & -\,m\,l^2\,\omega^2 + m\,g\,l \end{vmatrix} = 0$$

$$\omega^4\left(m^2\right) + \omega^2\,(-\,3\,c\,m) + c^2 = 0$$

Lösung:

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\,\frac{c}{m}}$$

5. Modalvektoren:

$$a_2 = \frac{(-2\,m\,\omega^2 + 2\,c)\,a_1}{(m\,l\,\omega^2)} \qquad \text{für } \omega = \omega_1, \omega_2$$

$$\mu_1 = \frac{a_2^{(1)}}{a_1^{(1)}} = \frac{3.24}{l} \qquad\qquad \vec{a}^{(1)} = a_1^{(1)} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3.24}{l} \end{bmatrix}$$

$$\mu_2 = \frac{a_2^{(2)}}{a_1^{(2)}} = \frac{-1.24}{l} \qquad\qquad \vec{a}^{(2)} = a_1^{(2)} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{-1.24}{l} \end{bmatrix}$$