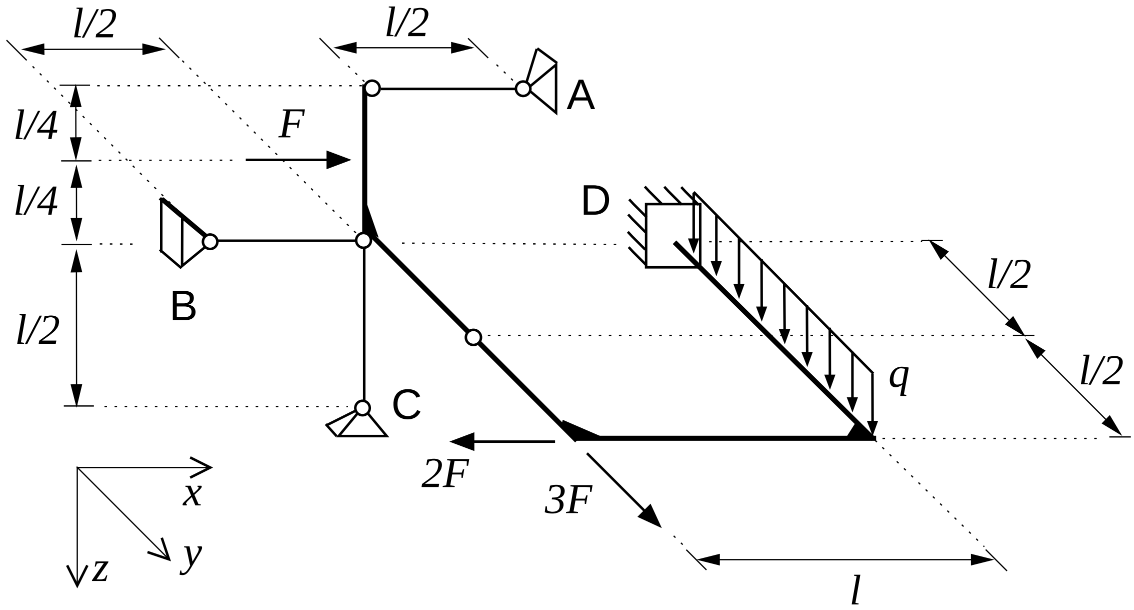
Institut für Mechanik	Prüfung in
Prof. Dr.-Ing. habil. P. Betsch	Statik starrer Körper
Prof. Dr.-Ing. habil. Th. Seelig	12. August 2014

1. Aufgabe (ca. 27 % der Gesamtpunktzahl)

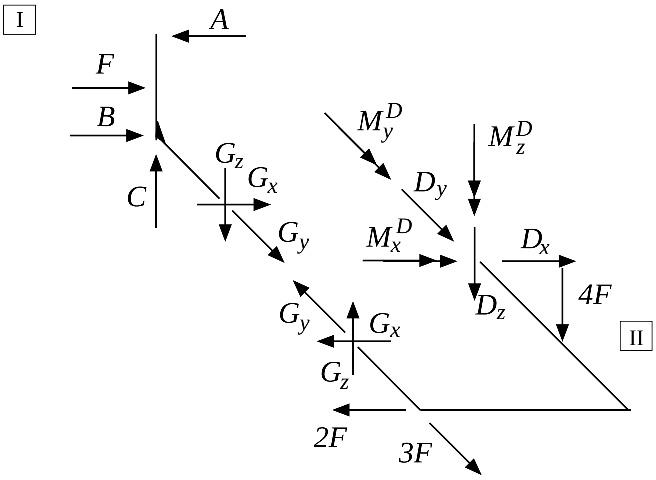


Berechnen Sie alle Lagerreaktionen und Gelenkkräfte des oben dargestellten räumlichen Systems.

Gegeben: $l,\ F,\ q = 4\dfrac{F}{l}$

Musterlösung - 1. Aufgabe

Freischnitt:



Gleichgewicht:
I:

$$\longrightarrow \Sigma F_{ix} = 0 : \quad F + B + G_x - A = 0 \tag{1}$$

$$\searrow \Sigma F_{iy} = 0 : \quad G_y = 0 \tag{2}$$

$$\downarrow \Sigma F_{iz} = 0 : \quad G_z - C = 0 \tag{3}$$

$$\twoheadrightarrow \Sigma M_x^{(G)} = 0 : \quad C \cdot \frac{1}{2} l = 0 \tag{4}$$

$$\searrow \Sigma M_y^{(G)} = 0 : \quad A \cdot \frac{1}{2} l - F \cdot \frac{1}{4} l = 0 \tag{5}$$

$$\downarrow \Sigma M_z^{(G)} = 0 : \quad -A \cdot \frac{1}{2} l + F \cdot \frac{1}{2} l + B \cdot \frac{1}{2} l = 0 \tag{6}$$

II:

$$\longrightarrow \Sigma F_{ix} = 0 : \quad D_x - G_x - 2F = 0 \tag{7}$$

$$\searrow \Sigma F_{iy} = 0 : \quad D_y + 3F - G_y = 0 \tag{8}$$

$$\downarrow \Sigma F_{iz} = 0 : \quad D_z + 4F - G_z = 0 \tag{9}$$

$$\twoheadrightarrow \Sigma M_x^{(D)} = 0 : \quad M_x^D - G_z \cdot \frac{1}{2} l + 4F \cdot \frac{1}{2} l = 0 \tag{10}$$

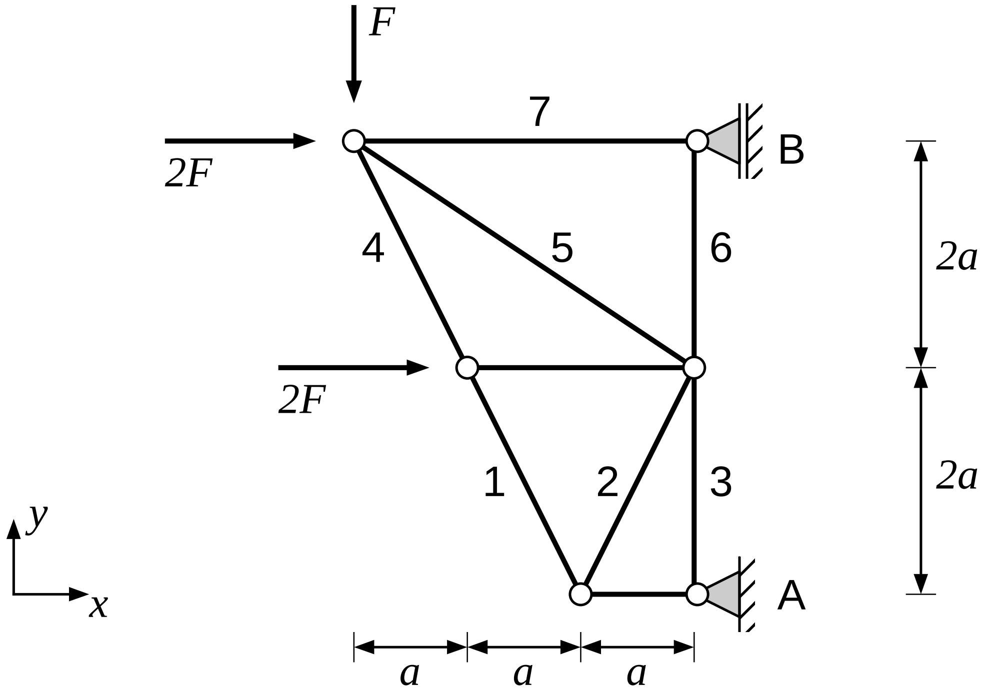
$$\searrow \Sigma M_y^{(D)} = 0 : \quad M_y^D - G_z \cdot l = 0 \tag{11}$$

$$\downarrow \Sigma M_z^{(D)} = 0 : \quad M_z^D + G_x \cdot \frac{1}{2} l + G_y \cdot l - 3F \cdot l + 2F \cdot l = 0 \tag{12}$$

Auflösen:

$(1) : G_x = 0,$	$(2) : G_y = 0,$	$(3) : G_z = 0,$
$(5) : A = \frac{1}{2} F$	$(6) : B = -\frac{1}{2} F$	$(4) : C = 0,$
$(7) : D_x = 2F,$	$(8) : D_y = -3F,$	$(9) : D_z = -4F,$
$(10) : M_x^D = -2F \cdot l,$	$(11) : M_y^D = 0,$	$(12) : M_z^D = F \cdot l.$

2. Aufgabe (ca. 18 % der Gesamtpunktzahl)



Gegeben sei das oben abgebildete Fachwerk.

Bearbeiten Sie folgende Aufgabenteile:

a) Beurteilen Sie das Tragwerk hinsichtlich der statischen Bestimmtheit.

b) Bestimmen Sie die Lagerreaktionen an den Knoten A und B.

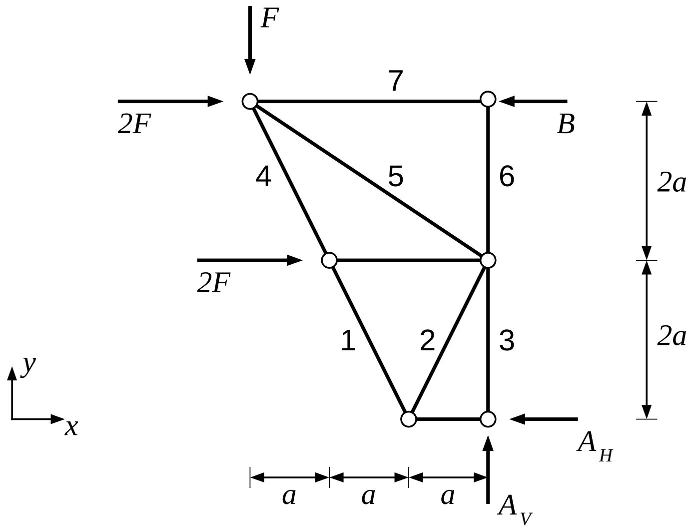
c) Bestimmen Sie die Stabkräfte der Stäbe 1-7.

Gegeben: F, a

Musterlösung - 2. Aufgabe

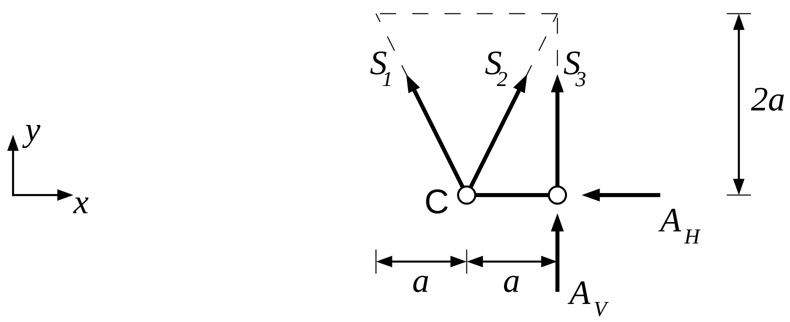
a) Fachwerk aus Dreiecken aufgebaut und statisch bestimmt gelagert.

b)



$$\sum M_A = 0 = 4a \cdot B + 3a \cdot F - 2a \cdot 2F - 4a \cdot 2F$$
$$= 4a \cdot B - 9 \cdot F$$
$$\rightarrow \underline{B = \frac{9}{4}F}$$
$$\sum F_H = 0 = A_H + B - 4 \cdot F \quad \rightarrow \quad \underline{A_H} = -\frac{9}{4}F + \frac{16}{4}F = \underline{\frac{7}{4}F}$$
$$\sum F_V = 0 = A_V - F \quad \rightarrow \quad \underline{A_V = F}$$

c) Ritterschnitt-Verfahren für Stäbe $S_1 - S_3$:



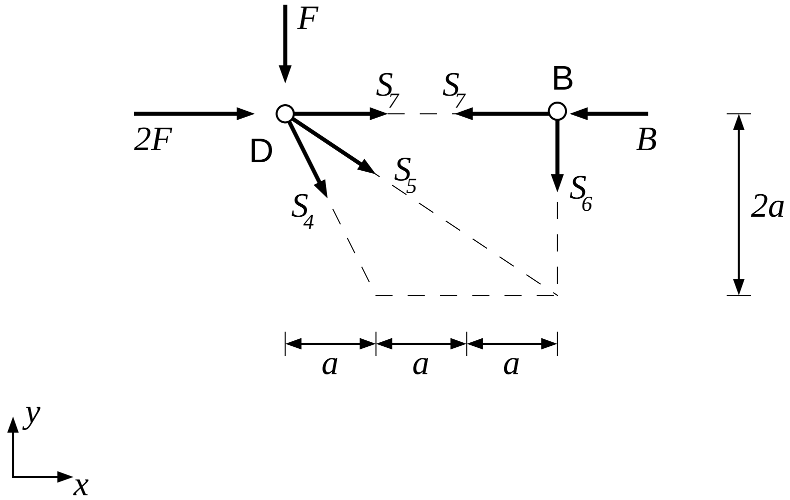
$$\sum M_C = 0 = a \cdot A_V + a \cdot S_3 \quad \rightarrow \quad \underline{S_3 = -A_V = -F}$$
$$\sum F_V = 0 = A_V + S_3 + \frac{2a}{\sqrt{5}a}S_1 + \frac{2a}{\sqrt{5}a}S_2 \quad \rightarrow \quad \underline{S_1 = -S_2}$$

$$\sum F_H = 0 = A_V + \frac{a}{\sqrt{5}a}S_1 - \frac{a}{\sqrt{5}a}S_2 = \frac{7}{4}F - \frac{2a}{\sqrt{5}a}S_2$$

$$\rightarrow \underline{S_2 = \frac{7\sqrt{5}}{8}F}$$

$$\rightarrow \underline{S_1 = -\frac{7\sqrt{5}}{8}F}$$

Knotenpunkt-Verfahren für Stäbe $S_4 - S_7$:



An Knoten B:

$$\sum F_H = 0 \quad \rightarrow \quad \underline{S_7 = -B = -\frac{9}{4}F} \quad \text{(siehe a))}$$

$$\sum F_V = 0 \quad \rightarrow \quad \underline{S_6 = 0}$$

An Knoten D:

$$\sum F_V = 0 = -F - \frac{2a}{\sqrt{5}a}S_4 - \frac{2a}{\sqrt{13}a}S_5 \quad \rightarrow \quad \underline{S_4 = -\frac{\sqrt{5}}{2}F - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{13}}S_5}$$

$$\sum F_H = 0 = -2F + \frac{9}{4}F - \frac{a}{\sqrt{5}a}S_4 - \frac{3a}{\sqrt{13}a}S_5$$

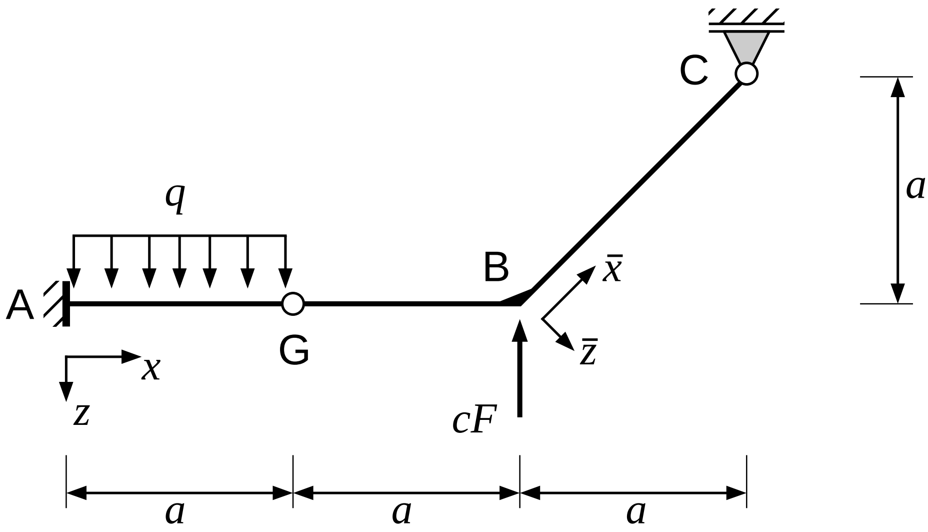
$$= -\frac{1}{4}F - \frac{a}{\sqrt{5}a}\underbrace{\left(\frac{-\sqrt{5}}{2}F - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{13}}S_5\right)}_{=S_4} - \frac{3a}{\sqrt{13}a}S_5$$

$$= -\frac{3}{4}F + \frac{1}{\sqrt{13}}S_5 - \frac{3}{\sqrt{13}}S_5$$

$$\rightarrow \underline{S_5 = \frac{3\sqrt{13}}{8}F}$$

$$\rightarrow \underline{S_4 =} - \frac{\sqrt{5}}{2}F - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{13}}\frac{3\sqrt{13}}{8}F \underline{= -\frac{7\sqrt{5}}{8}F}$$

3. Aufgabe (ca. 28 % der Gesamtpunkte)



Für das dargestellte Tragwerk unter der Belastung q und cF sind die folgenden Aufgabenteile zu bearbeiten:

a) Bestimmen Sie alle Lagerreaktionen und Gelenkkräfte.

b) Bestimmen Sie den Faktor c (vgl. Skizze) so, dass das Einspannmoment an der Stelle A verschwindet.

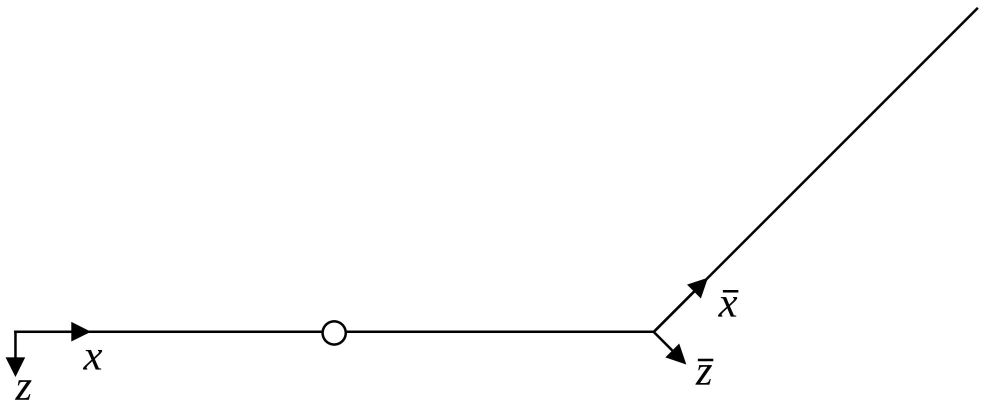
c) Bestimmen Sie für $c = 1$ die Funktion des Biegemomentenverlaufes im Bereich A-G-B.

d) Skizzieren Sie für $c = 1$ die Verläufe von Normalkraft, Querkraft und Biegemoment unter Angabe der wesentlichen Ordinaten für den Bereich A-G-B-C in die **beigefügte Vorlage** ein.

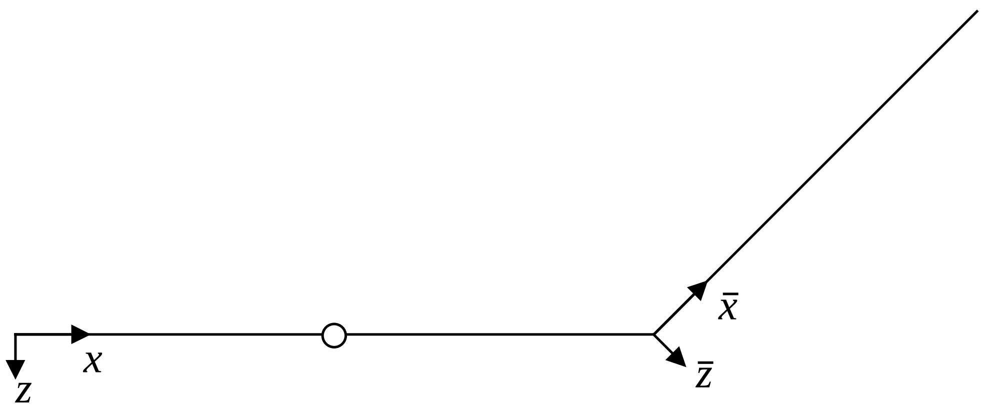
Gegeben: $a, q, F = qa$

Vorlage zur 3. Aufgabe, d)

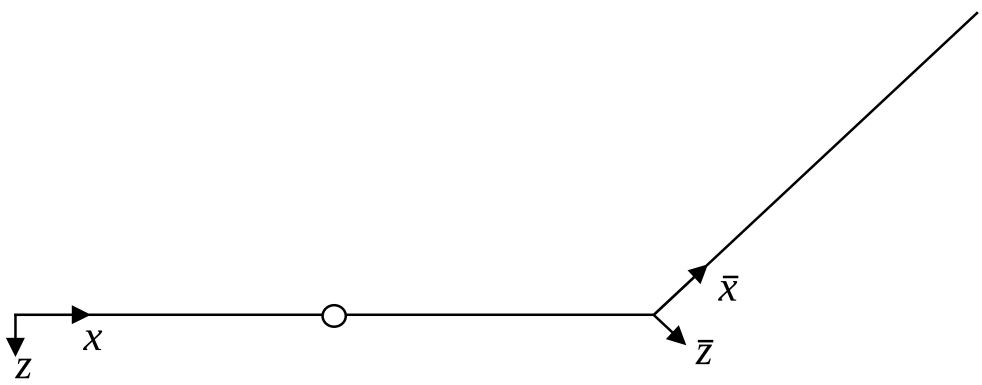
N



Q

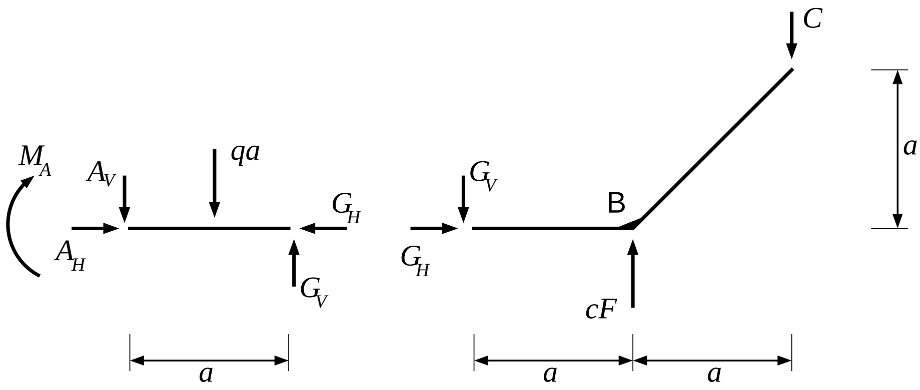


M



Musterlösung - 3. Aufgabe

a)



Am rechten Teilsystem:

$$\sum M_{(G)} = 0 = C \cdot 2a - c \cdot F \cdot a \quad \rightarrow \quad \underline{C = \frac{1}{2}\, c \cdot F = \frac{1}{2}\, c \cdot qa}$$

$$\sum F_V = 0 = -G_V + c \cdot F - C \quad \rightarrow \quad \underline{G_V =} c \cdot F - \frac{1}{2}\, c \cdot F = \underline{\frac{1}{2}\, c \cdot F = \frac{1}{2}\, c \cdot qa}$$

$$\sum F_H = 0 \rightarrow \quad \underline{G_H = 0}$$

Am linken Teilsystem:

$$\sum F_H = 0 \rightarrow \quad \underline{A_H = 0}$$

$$\sum F_V = 0 = A_V + qa - G_V \quad \rightarrow \quad \underline{A_V = \frac{1}{2}\, c \cdot F - qa = qa\left(\frac{1}{2}c - 1\right)}$$

$$\sum M_{(A)} = 0 = M_A + qa \cdot \frac{a}{2} - G_V \cdot a$$

$$\rightarrow \quad \underline{M_A = \frac{1}{2}\, c \cdot F \cdot a - \frac{1}{2}\, qa^2 = \frac{1}{2} qa^2\,(c-1)}$$

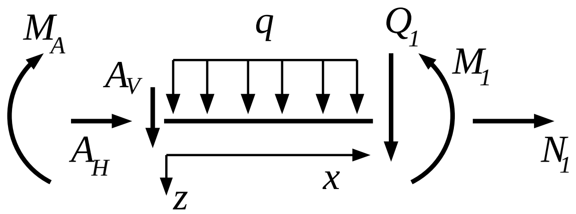
b)

$$M_A \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} qa^2\,(c-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad c = 1$$

c)

Abschnitt 1, A-G: $(0 \leq x \leq a)$



$$\sum M_x = 0 = M_1(x) + qx \cdot \frac{1}{2}x + A_V \cdot x - M_A$$

$$\Leftrightarrow M_1(x) = -\frac{1}{2}qx^2 - \big(\underbrace{\frac{1}{2}\,qa - qa}_{=A_V}\big) \cdot x + 0$$

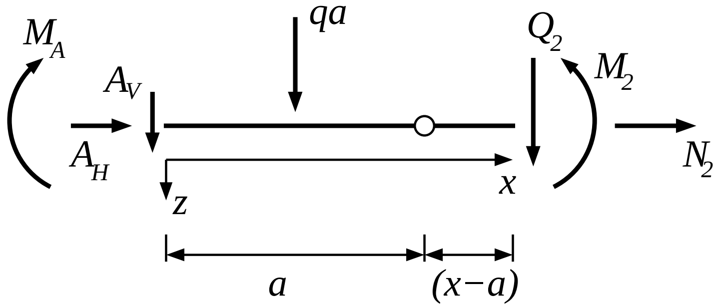
$$\Leftrightarrow \underline{M_1(x)} = -\frac{1}{2}qx^2 + \frac{1}{2}\,qa \cdot x = \underline{-\frac{1}{2}qx\big(x-a\big)}$$

$$\sum F_V = 0 = Q_1(x) + qx + A_V$$

$$\rightarrow \quad \underline{Q_1(x) = -qx + \frac{1}{2}\,qa}$$

$$\sum F_H = 0 \rightarrow \quad \underline{N_1 = -A_H = 0}$$

Abschnitt 2, G-B: $(a \leq x \leq 2a)$



$$\sum M_x = 0 = M_2(x) + qa \cdot \left(\frac{1}{2}a + x - a\right) + A_V \cdot x - M_A$$

$$\Leftrightarrow M_2(x) = -qa\,x + \frac{1}{2}qa^2 - \big(\underbrace{\frac{1}{2}\,qa - qa}_{=A_V}\big) \cdot x + 0$$

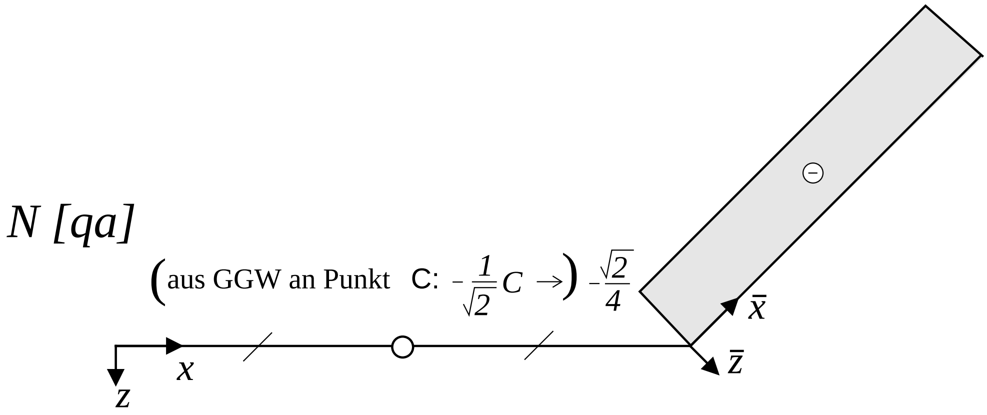
$$\Leftrightarrow \underline{M_2(x)} = -\frac{1}{2}qa\,x + \frac{1}{2}\,qa^2 = \underline{-\frac{1}{2}qa\big(x-a\big)}$$

$$\sum F_V = 0 = Q_2(x) + qa + A_V$$

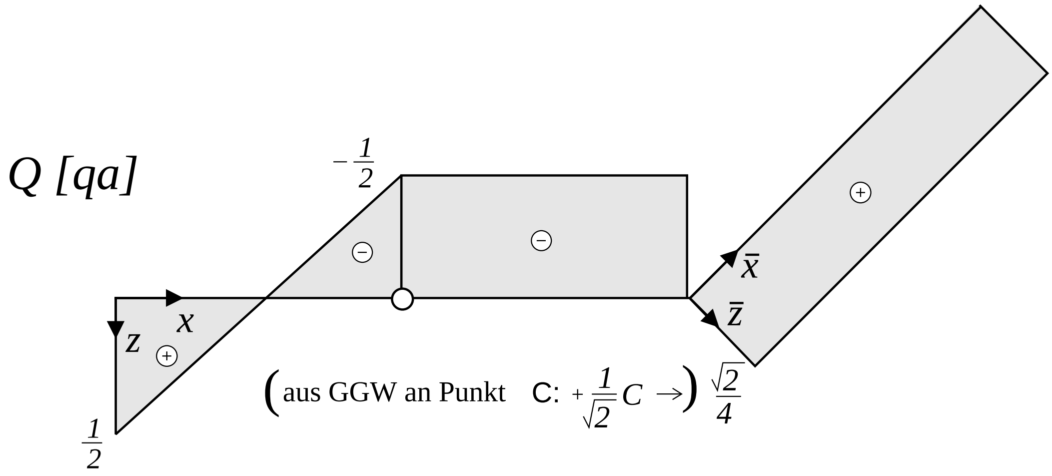
$$\rightarrow \quad \underline{Q_2(x) = -qa + \frac{1}{2}\,qa = -\frac{1}{2}\,qa}$$

$$\sum F_H = 0 \rightarrow \quad \underline{N_2 = -A_H = 0}$$

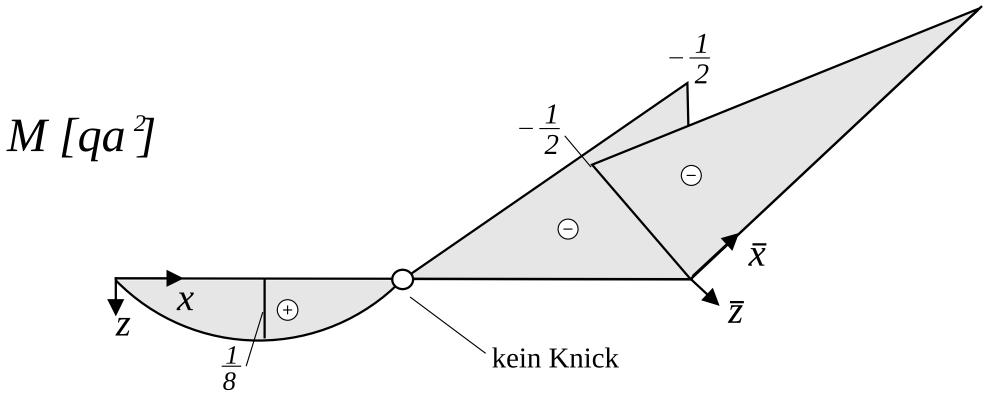
d)



N [qa]
(aus GGW an Punkt C: $-\frac{1}{\sqrt{2}}C \rightarrow$) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$
x
z
$\bar{x}$
$\bar{z}$

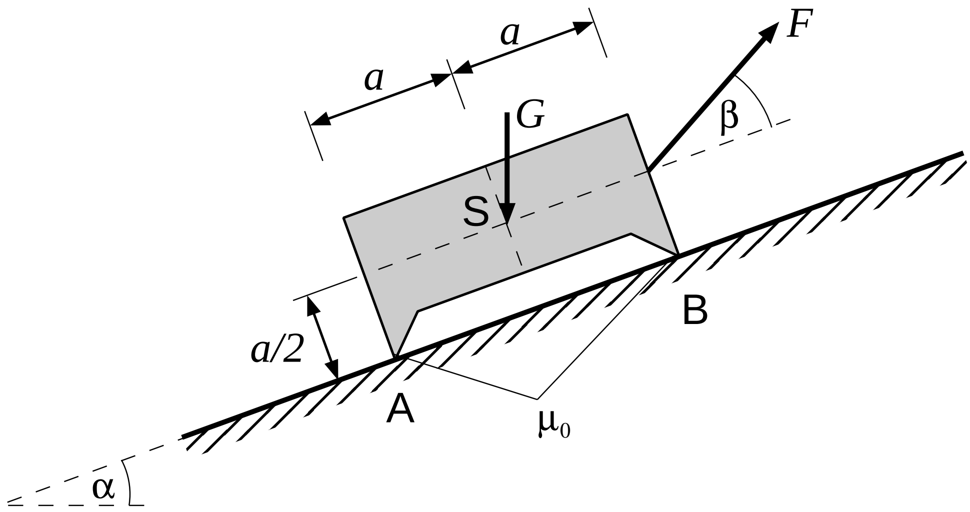


Q [qa]
$-\frac{1}{2}$
x
z
$\bar{x}$
$\bar{z}$
(aus GGW an Punkt C: $+\frac{1}{\sqrt{2}}C \rightarrow$) $\frac{\sqrt{2}}{4}$
$\frac{1}{2}$



M [qa^2]
$-\frac{1}{2}$
$-\frac{1}{2}$
$\bar{x}$
x
z
$\bar{z}$
$\frac{1}{8}$
kein Knick

4. Aufgabe (ca. 27 % der Gesamtpunkte)



Eine Kiste (Schwerpunkt S, Gewicht G) soll eine schiefe Ebene (Neigungswinkel α) hinaufgezogen werden. Dazu greift an der Kiste die Kraft F unter dem Winkel β an. Der Haftkoeffizient zwischen der Kiste und der schiefen Ebene beträgt μ_0 (vgl. Abbildung). Nehmen Sie an, dass die Kiste im Punkt B nicht abhebt.

Bearbeiten Sie folgende Punkte:

a) Welche Kraft F ist gerade notwendig, um die Kiste entlang der Ebene nach oben in Bewegung zu setzen?

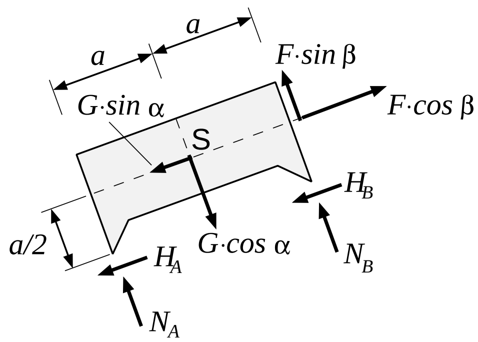
b) Unter welchem Winkel β^* wird die Kraft F aus Aufgabenteil a) minimal?

c) Wie groß darf α maximal sein, damit die Kiste für $\mu_0 = 1$ und $\beta = \beta^*$ im Punkt B nicht abhebt?

Gegeben: G, a, μ_0
Hinweis: $0° \leq \beta < 90°$

Musterlösung - 4. Aufgabe

a)



$$\text{Haftbedingung:} \quad H = \mu_0 \cdot N \quad \rightarrow \quad H_A + H_B = \mu_0 (N_A + N_B) \tag{1}$$

$$\sum F_{\parallel} = 0: \quad H_A + H_B = F \cdot \cos\beta - G \cdot \sin\alpha \tag{2}$$

$$\sum F_{\perp} = 0: \quad N_A + N_B = G \cdot \cos\alpha - F \cdot \sin\beta \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \text{(2) und (3) in (1)}: \quad & F \cdot \cos\beta - G \cdot \sin\alpha = \mu_0 \left(G \cdot \cos\alpha - F \cdot \sin\beta\right) \\ \Leftrightarrow \quad & F\left(\cos\beta + \mu_0 \sin\beta\right) = G\left(\mu_0 \cos\alpha + \sin\alpha\right) \\ \rightarrow \quad & F = G \cdot \frac{\sin\alpha + \mu_0 \cos\alpha}{\cos\beta + \mu_0 \sin\beta} \end{aligned}$$

b) $F(\beta)$ wird minimal, wenn der Nenner $g(\beta) = \cos\beta + \mu_0 \sin\beta$ maximal wird:

$$g'(\beta) = -\sin\beta + \mu_0 \cos\beta \qquad g''(\beta) = -\left(\cos\beta + \mu_0 \sin\beta\right)$$

$$g'(\beta^*) \stackrel{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin\beta^* = \mu_0 \cos\beta^* \quad \rightarrow \quad \underline{\beta^* = \arctan\mu_0}$$

$$g''(\beta^*) \stackrel{!}{<} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \beta^* \in [0°, 90°)\text{und} \ldots$$

$\Rightarrow$ $F(\beta)$ wird im Bereich $\beta^* \in [0°, 90°)$ minimal für $\beta^* = \arctan\mu_0$.

c) Für $\mu_0 = 1$ gilt: $\beta^* = \arctan 1 = 45°$ $\quad \rightarrow \quad$ $F(\beta^*) = \dfrac{G}{\sqrt{2}}(\sin\alpha + \cos\alpha)$

Bedingung, damit Kiste in Punkt B nicht abhebt: $N_B \geq 0$:

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0 &= a \cdot G \cdot \cos\alpha - \frac{a}{2} \cdot G \cdot \sin\alpha - 2a \cdot N_B - 2a \cdot F \cdot \sin 45° + \frac{a}{2} \cdot F \cdot \cos 45° \\ \Leftrightarrow \quad 2N_B &= G\left(\cos\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha\right) + \sqrt{2}F\left(-1 + \frac{1}{4}\right) \\ &= G\left(\cos\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha - \frac{3}{4}\sin\alpha - \frac{3}{4}\cos\alpha\right) = G\left(\frac{1}{4}\cos\alpha - \frac{5}{4}\sin\alpha\right) \stackrel{!}{\geq} 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \cos\alpha \geq 5\sin\alpha \quad \wedge \quad G > 0 \\ \Rightarrow \quad & \alpha \leq \arctan\frac{1}{5} = 11.3° \end{aligned}$$