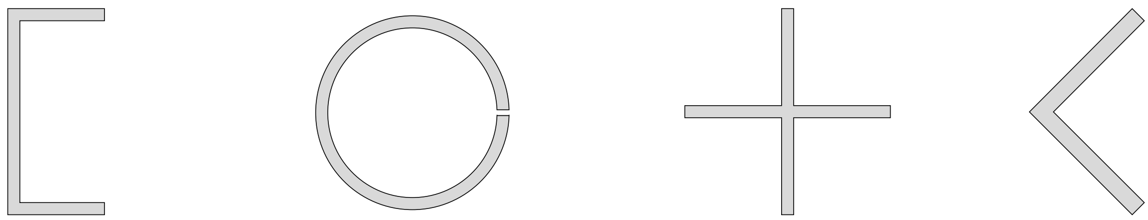
1. Aufgabe: (ca. 13 % der Gesamtpunkte)

a) Wie ist die Volumendehnung definiert und wie kann inkompressibles Materialverhalten beschrieben werden?

b) Skizzieren Sie qualitativ die Lage des Schubmittelpunktes für folgende Querschnitte:



c) Erläutern Sie die Aussage des Vertauschungssatzes von Maxwell unter Verwendung eines geeigneten Beispiels.

b) Was versteht man unter der Kernfläche des Querschnitts? Skizzieren Sie zusätzlich den Kern eines Rechteckquerschnitts.

Musterlösung - Aufgabe 1

a) Wie ist die Volumendehnung definiert und wie kann inkompressibles Materialverhalten beschrieben werden?

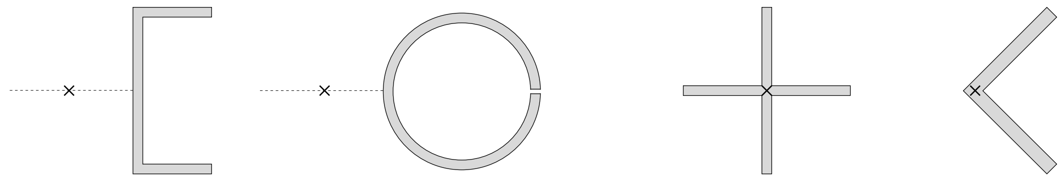
Volumendehnung

$$\epsilon_v = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$$

inkompressibles Materialverhalten

$$\nu = 0.5$$

b) Skizzieren Sie qualitativ die Lage des Schubmittelpunktes für folgende Querschnitte:



c) Erläutern Sie die Aussage des Vertauschungssatzes von Maxwell unter Verwendung eines geeigneten Beispiels.

Vertauschungssatz von Maxwell: Für die Einflusszahlen gilt:

$$\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$$

Hiernach ist die Durchbiegung α_{ik} eines Punktes i infolge einer in k angreifenden Kraft gleich der Durchbiegung α_{ki} des Punktes k infolge einer Kraft, die in i angreift.

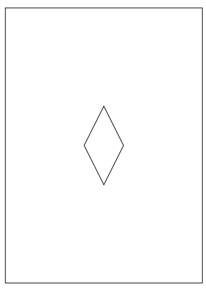
Für Beispiel siehe Buch *Technische Mechanik 2* von Gross, Hauger, Schröder und Wall, S. 241 Abb. 6.18.

d) Was versteht man unter der Kernfläche des Querschnitts? Skizzieren Sie zusätzlich den Kern eines Rechteckquerschnitts.

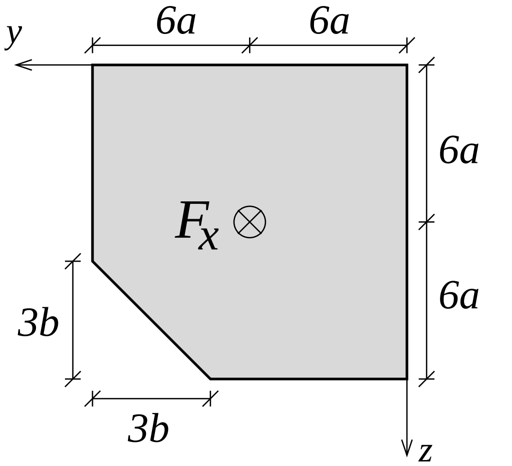
Die Kernfläche ist derjenige Teil des Querschnitts, in dem eine exzentrische Normalkraft angreifen muss, damit im gesamten Querschnitt nur Normalspannungen eines Vorzeichens auftreten (also nur Druckspannungen bei einer Druckkraft oder nur Zugspannungen bei einer Zugkraft).

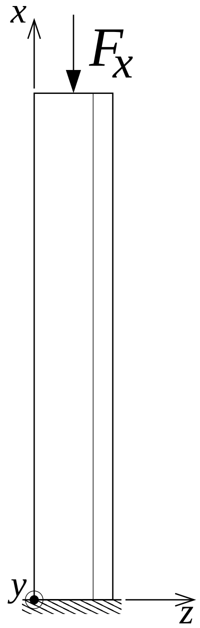
Die Kernfläche ist abhängig von der Gestalt der Querschnittsfläche.

Skizze Kern eines Rechteckquerschnitts:



2. Aufgabe: (ca. 26 % der Gesamtpunkte)





Gegeben ist der abgebildete Querschnitt unter der exzentrischen Druckbelastung F_x.

a) Berechnen Sie die Lage des Schwerpunkts des Gesamtquerschnitts bezüglich des y-z-Koordinatensystems in Abhängigkeit der Abmessungen a und b.

b) Skizzieren Sie die Lage der Hauptachsen des Gesamtquerschnitts (mit Begründung).

Für die folgenden Teilaufgaben wird $b = 2a$ gesetzt. Gehen Sie im Weiteren davon aus, dass der Schwerpunkt des Gesamtquerschnitts in $y = z = \frac{38}{7}a$ liegt.

c) Berechnen Sie die Hauptträgheitsmomente I_1 und I_2.

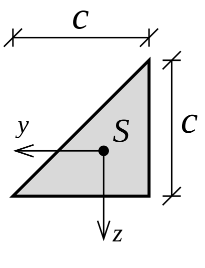
d) Geben Sie die aus der Belastung resultierenden Schnittgrößen an.

e) Ermitteln Sie die Lage der Spannungsnulllinie und skizzieren Sie diese im gegebenen Querschnitt.

f) Bestimmen Sie den Ort der betragsmäßig größten Normalspannung.

Gegeben: a, $0 < b < 4a$, F_x

Hinweis:



$$I_y = I_z = \frac{c^4}{36}$$

$$I_{yz} = -\frac{c^4}{72}$$

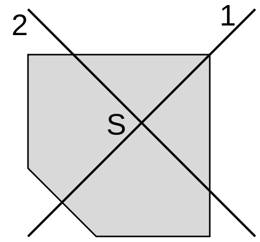
Musterlösung - Aufgabe 2

a) Berechnung des Schwerpunkts:

$$y = z = \frac{(12a)^2 \cdot 6a - \frac{1}{2}(3b)^2(12a-b)}{(12a)^2 - \frac{1}{2}(3b)^2} = \frac{864a^3 - 54b^2a + 4,5b^3}{144a^2 - 4,5b^2}$$

b) Lage der Hauptträgheitsachsen:

- eine Hauptachse entspricht der Symmetrieachse
- die andere Hauptachse steht senkrecht dazu
- Schnitt der Achsen im Schwerpunkt S
- Zuordnung der 1-/2-Achse erfolgt anschaulich durch starke/schwache Achse



$$\varphi^\star = 45^\circ$$

c) Flächenträgheitsmomente:

$$\begin{aligned} I_y = I_z &= \frac{(12a)^4}{12} + \left(12a\right)^2\left(\frac{4}{7}a\right)^2 - \frac{(6a)^4}{36} - \frac{1}{2}\left(6a\right)^2\left(\frac{46}{7}a - 2a\right)^2 \\ &= 1728a^4 + \underbrace{\frac{2304}{49}}_{=47,0} a^4 - 36a^4 - \underbrace{\frac{18432}{49}}_{=376,2} a^4 = \underbrace{\frac{9540}{7}}_{=1362,9} a^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{yz} &= 0 - \left(12a\right)^2\left(\frac{4}{7}a\right)^2 - \left[\frac{(6a)^4}{72} - \frac{1}{2}\left(6a\right)^2\left(\frac{46}{7}a - 2a\right)^2\right] \\ &= 0 - \underbrace{\frac{2304}{49}}_{=47,0} a^4 - 18a^4 + \underbrace{\frac{18432}{49}}_{=376,2} a^4 = \underbrace{\frac{2178}{7}}_{=311,1} a^4 \end{aligned}$$

Hauptträgheitsmomente:

$$I_{1/2} = \frac{1}{2}\left(I_y + I_z\right) \pm \sqrt{\underbrace{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2}_{=0} + I_{yz}^2} = \frac{9540}{7}a^4 \pm \frac{2178}{7}a^4 \quad \Rightarrow I_1 = 1674a^4, \quad I_2 = \underbrace{\frac{7362}{7}}_{=1051,7} a^4$$

d) Schnittgrößen:

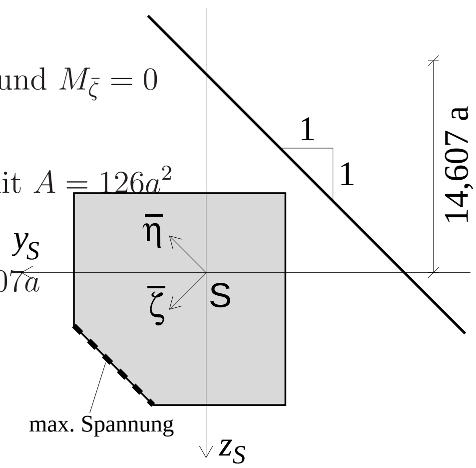
Normalkraft: $N = -F_x$ (Druck) Biegemomente: $M_y = -\frac{4}{7}aF_x$, $M_z = \frac{4}{7}aF_x$

e) Spannungsnulllinie: $\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_{\bar\eta}}{I_2}\bar\zeta - \frac{M_{\bar\zeta}}{I_1}\bar\eta \overset{!}{=} 0$

mit Momente bzgl. der Hauptträgheitsachsen: $M_{\bar\eta} = -\frac{4\sqrt{2}}{7}F_x a$ und $M_{\bar\zeta} = 0$

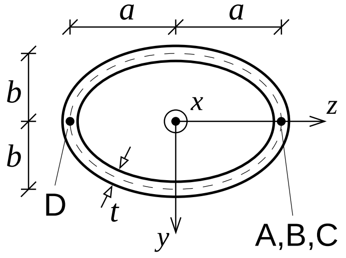
$$\Leftrightarrow \bar\zeta = -\frac{N}{A}\frac{I_2}{M_{\bar\eta}} = -\frac{-F_x}{A}\frac{7362a^4}{(-\sqrt{2})\ 4\ F_x} = -10,33a \quad \text{mit } A = 126a^2$$

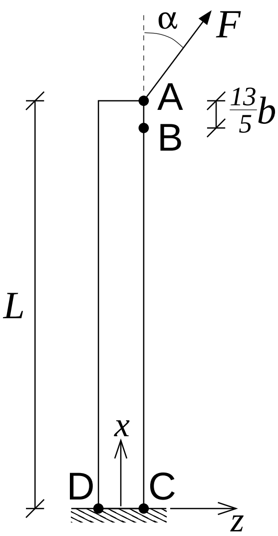
$$\text{bzw. } z_s = -y_s - \sqrt{2} \cdot 10,33a = -y_s - 14,607a$$



f) aus Aufgabenteil e) ergibt sich die größte Normalspannung an der Stelle des größten Abstands zur Spannungsnulllinie innerhalb des Querschnitts (siehe Skizze).

3. Aufgabe: (ca. 22 % der Gesamtpunkte)





Ein Ankermast mit dünnwandigem elliptischem Querschnitt ($t \ll a,b$) wird außermittig am Punkt A durch eine Kraft F in der x-z-Ebene belastet. Bei der Bemaßung gilt $b = \dfrac{2}{3}a$ und $L = 24a$.

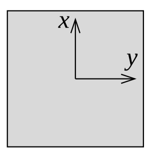
a) Berechnen Sie die Schnittgrößenverläufe.

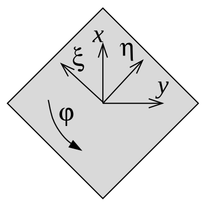
b) Bestimmen Sie die auftretenden Normalspannungen infolge Biegung und Normalkraft an den Punkten B,C und D.

c) Zeichnen Sie den in Punkt D ermittelten Spannungszustand in das unten gegebene infinitesimale Element ein. Bestimmen Sie für diesen Punkt mithilfe des Mohr'schen Spannungskreises die Spannungen in einem um $\varphi = +45°$ gedrehten Element und zeichnen Sie diese ebenfalls unten ein.

d) Bestimmen Sie die minimale konstante Wandstärke $t_{\min}$, so dass die zulässige Normalspannung σ_{Zul} nicht überschritten wird.

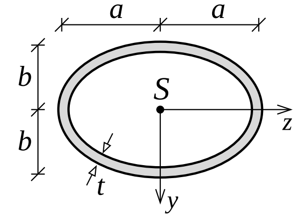
Spannungszustand im Punkt D:





Gegeben: a, $b = \dfrac{2}{3}a$, t, $L = 24a$, F, $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$, $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$, σ_{Zul}

Hinweis:



$$A = \pi t(a+b)$$
$$I_y = \frac{\pi}{8}a^2 t(3b+2a)$$
$$I_z = \frac{\pi}{8}b^2 t(3a+2b)$$

Musterlösung - Aufgabe 3

a) Schnittgrößenverläufe:

$$N = \frac{4}{5}F, \qquad Q_z = \frac{3}{5}F, \qquad (M_z = 0), \qquad M_y = \frac{3}{5}Fx + \frac{4}{5}Fa - \frac{3}{5}FL$$

b) Querschnittswerte:

$$I_y = \frac{\pi}{8}a^2t(3b + 2a) = \frac{\pi}{2}a^3t \qquad A = \pi t(a + b) = \frac{5}{3}\pi at$$

Normalspannung im Punkt B:

$$M_y^B = M_y(x = L - \frac{13}{5}b) = -\frac{3}{5}\left(\frac{13}{5}\frac{2}{3}a\right)F + \frac{4}{5}Fa = -\frac{6}{25}Fa$$

$$\sigma^B = \sigma(z = a) = \frac{4}{5}\frac{3F}{5\pi at} + \frac{-6}{25}Fa\frac{2}{\pi a^3t}a = 0$$

Normalspannungen im Punkt C und D:

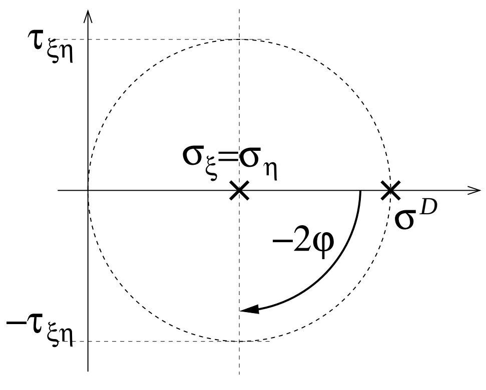
$$M_y^C = M_y^D = M_y(x = 0) = \frac{4}{5}Fa - \frac{3}{5}FL = -\frac{68}{5}Fa = -13{,}6Fa$$

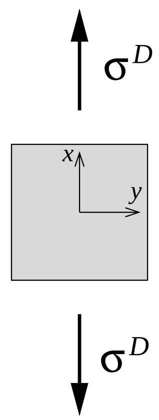
$$\sigma^C = \sigma(z = a) = \frac{4}{5}\frac{3F}{5\pi at} + \frac{-68}{5}Fa\frac{2}{\pi a^3t}a = -\frac{668}{25}\frac{F}{\pi at} = -26{,}72\frac{F}{\pi at}$$

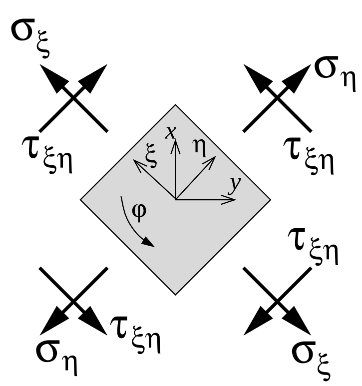
$$\sigma^D = \sigma(z = -a) = \frac{4}{5}\frac{3F}{5\pi at} + \frac{-68}{5}Fa\frac{2}{\pi a^3t}\cdot(-a) = \frac{692}{25}\frac{F}{\pi at} = 27{,}68\frac{F}{\pi at}$$

c) Spannung im Punkt D:

$$\tau_{\xi\eta}^D = \sigma_\xi^D = \sigma_\eta^D = \frac{\sigma^D}{2} = \frac{346}{25}\frac{F}{\pi at} = 13{,}84\frac{F}{\pi at}$$





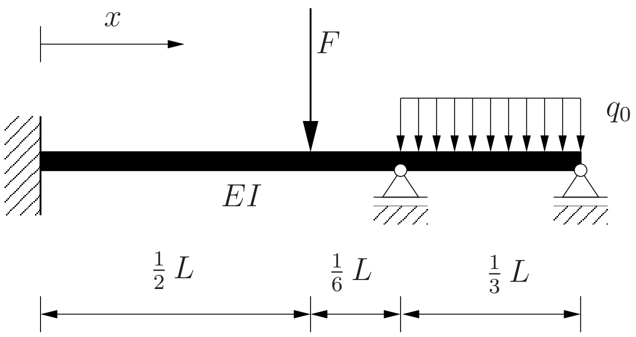


d) Bemessung von $t_{\min}$:

→ t muss an der Stelle der betragsmäßig größten Normalspannung bemessen werden, also an Punkt D:

$$t_{\min} = \frac{692}{25}\frac{F}{\pi a \cdot \sigma_{\text{zul}}}$$

4. Aufgabe: (ca. 17 % der Gesamtpunkte)



Der dargestellte Balken ($EI = konst.$) der Länge L wird durch eine konstante Streckenlast q_0 und eine Einzelast F belastet.

a) Geben Sie den Grad der statischen Unbestimmtheit an.

b) Führen Sie die Integrationen der DGL der Biegelinie für den gesamten Träger durch, so dass Sie die Biegelinie in Abhängigkeit der Integrationskonstanten und der Koordinate x erhalten. Wieviele Integrationskonstanten gibt es?

c) Geben Sie alle erforderlichen Übergangs- und Randbedingungen an.

Gegeben: L, q_0, EI, F.

<u>Hinweis</u>: In den Aufgabenteilen b) und c) müssen die Integrationskonstanten nicht bestimmt werden!

Musterlösung - Aufgabe 4

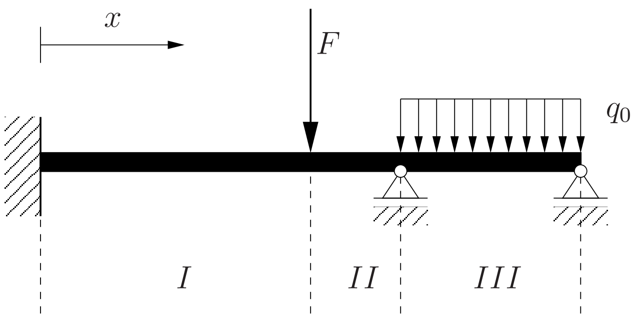
a) Geben Sie den Grad der statischen Unbestimmtheit an.

Balken in Ebene → 3 FHGe
Feste Einspannung in Ebene → 3 Bindungen
2 Einwertige Lager → 2 Bindungen

⇒ 2 fach statisch unbestimmtes System

b) Führen Sie die Integrationen der DGL der Biegelinie für den gesamten Träger durch, so dass Sie die Biegelinie in Abhängigkeit der Integrationskonstanten und der Koordinate x erhalten.

Bereiche:



I:

$$\begin{aligned} EI\,w_I'''' &= 0 \\ EI\,w_I''' &= C_1 \\ EI\,w_I'' &= C_1\,x + C_2 \\ EI\,w_I' &= \frac{1}{2}\,C_1\,x^2 + C_2\,x + C_3 \\ EI\,w_I &= \frac{1}{6}\,C_1\,x^3 + \frac{1}{2}\,C_2\,x^2 + C_3\,x + C_4 \end{aligned}$$

II:

$$\begin{aligned} EI\,w_{II}'''' &= 0 \\ EI\,w_{II}''' &= C_5 \\ EI\,w_{II}'' &= C_5\,x + C_6 \\ EI\,w_{II}' &= \frac{1}{2}\,C_5\,x^2 + C_6\,x + C_7 \\ EI\,w_{II} &= \frac{1}{6}\,C_5\,x^3 + \frac{1}{2}\,C_6\,x^2 + C_7\,x + C_8 \end{aligned}$$

III:

$$\begin{aligned} EI\,w_I'''' &= q_0 \\ EI\,w_I''' &= q_0\,x + C_9 \\ EI\,w_I'' &= \frac{1}{2}\,q_0\,x^2 + C_9\,x + C_{10} \\ EI\,w_I' &= \frac{1}{6}\,q_0\,x^3 + \frac{1}{2}\,C_9\,x^2 + C_{10}\,x + C_{11} \\ EI\,w_I &= \frac{1}{24}\,q_0\,x^4 + \frac{1}{6}\,C_9\,x^3 + \frac{1}{2}\,C_{10}\,x^2 + C_{11}\,x + C_{12} \end{aligned}$$

Wieviele unbekannte Integrationskonstanten gibt es?

12 unbekannte Integrationskonstanten.

c) Geben Sie alle erforderlichen Übergangs- und Randbedingungen an.

geometrische RBen

$$w_I(0) = 0 \qquad w_{II}(\frac{2}{3}\,L) = 0$$

$$w_I'(0) = 0 \qquad w_{III}(L) = 0$$

geometrische ÜBen

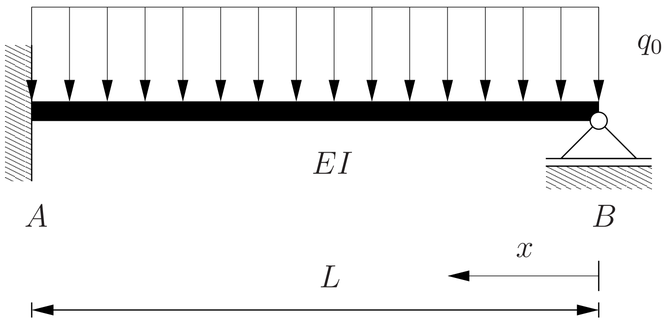
$$w_I(\frac{1}{2}\,L) = w_{II}(\frac{1}{2}\,L) \qquad w_{II}(\frac{2}{3}\,L) = w_{III}(\frac{2}{3}\,L)$$

$$w_I'(\frac{1}{2}\,L) = w_{II}'(\frac{1}{2}\,L) \qquad w_{II}'(\frac{2}{3}\,L) = w_{III}'(\frac{2}{3}\,L)$$

statische RB und ÜBen

$$\begin{aligned}
M_{III}(L) &= w_{III}''(L) = 0 \\
M_{II}(\frac{2\,L}{3}) &= M_{III}(\frac{2\,L}{3}) = EI\,w_{II}''(\frac{2}{3}\,L) = EI\,w_{III}''(\frac{2}{3}\,L) \\
M_I(\frac{L}{2}) &= M_{II}(\frac{L}{2}) = w_I''(\frac{1}{2}\,L) = EI\,w_{II}''(\frac{1}{2}\,L) \\
Q_I(\frac{L}{2}) &= Q_{II}(\frac{L}{2}) + F = EI\,w_I'''(\frac{1}{2}\,L) = EI\,w_{II}'''(\frac{1}{2}\,L) + F
\end{aligned}$$

5. Aufgabe: (ca. 22 % der Gesamtpunkte)



Der dargestellte Träger (EI = *konst.*) wird durch eine konstante Streckenlast q_0 belastet. Bestimmen Sie unter Verwendung des Prinzips der virtuellen Kräfte (PdvK)

a) die Auflagerkraft B,

b) den Funktionsverlauf des Biegemoments und das Einspannmoment in A,

c) sowie die Durchbiegung in der Mitte des Trägers.

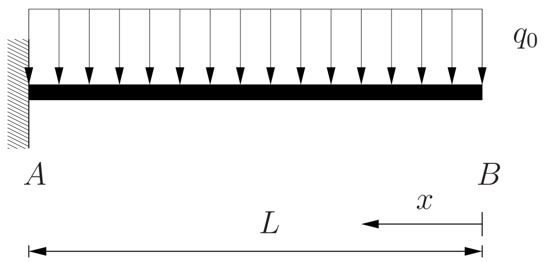
Gegeben: L, EI, q_0

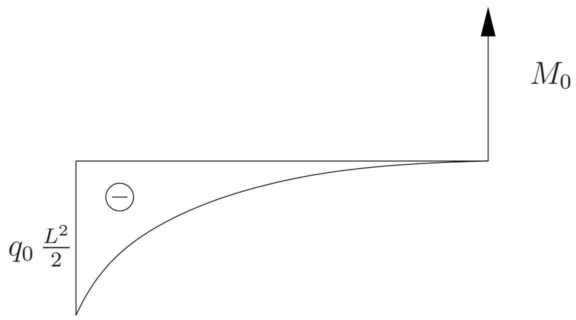
<u>Hinweis</u>: Die Aufgabe ist mit dem *Prinzip der virtuellen Kräfte* zu lösen. Andere Lösungswege werden nicht bewertet.

Musterlösung - Aufgabe 5

a) die Auflagerkraft B,

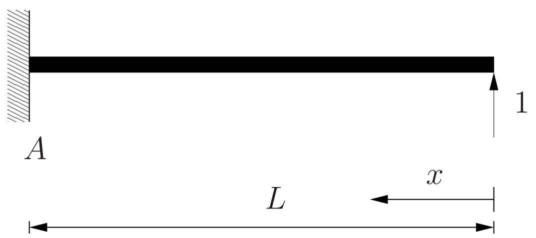
0-System

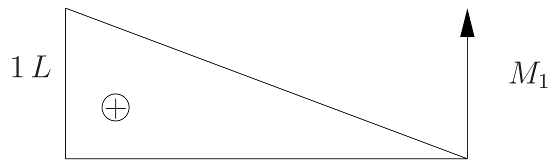




$$M_0(x) = -q_0\,\frac{x^2}{2}$$

1-System





$$M_1(x) = x$$

Einflusszahlen

$$\alpha_{10} = \int_0^L \frac{M_1\,M_0}{EI}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{EI}\int_0^L x\,(-q_0\,\frac{x^2}{2})\,\mathrm{d}x = -\frac{q_0\,L^4}{8\,EI}$$

$$\alpha_{11} = \int_0^L \frac{M_1^2}{EI}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{EI}\int_0^L x^2\,\mathrm{d}x = \frac{L^3}{3\,EI}$$

Kompatibilität/Auflagerkraft B

$$\alpha_{10} + X\,\alpha 11 = 0$$

$$\Rightarrow B = X = -\frac{\alpha_{10}}{\alpha_{11}} = \frac{3}{8}\,q_0\,L$$

b) den Funktionsverlauf des Biegemoments,

Momentenverlauf (Superposition)

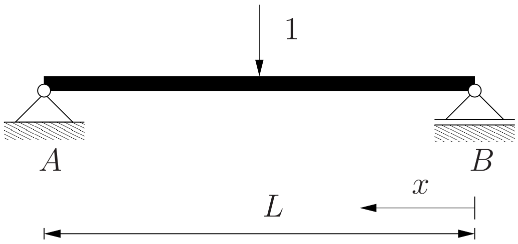
$$M(x) = M_0 + X\,M_1 = -q_0\,\frac{x^2}{2} + \frac{3}{8}\,q_0\,L\,x$$

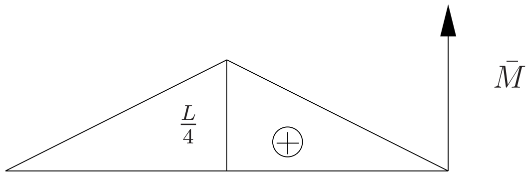
Einspannmoment

$$M_A = M(L) = -\frac{1}{8}\,q_0\,L^2$$

c) sowie die Durchbiegung in der Mitte des Trägers.

1 Last in Richtung der unbekannten Verschiebung





$$\bar{M}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\,x & 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \\ -\frac{1}{2}\,x + \frac{L}{2} & \frac{L}{2} \leq x \leq L \end{cases}$$

Reduktionssatz

$$\begin{aligned} f &= \int_0^L \frac{M\,\bar{M}}{EI}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{EI}[\frac{7}{48}\,(-\frac{q_0\,L^2}{2})\,\frac{L}{4}\,L + \frac{1}{4}\,(\frac{3}{8}\,q_0\,L^2)\,\frac{L}{4}\,L] = \frac{1}{192}\,\frac{q_0\,L^4}{EI} \end{aligned}$$