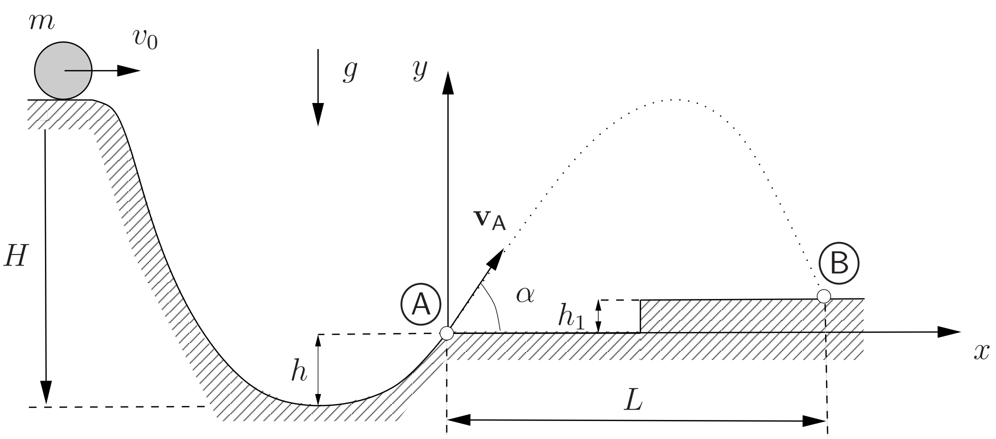
Aufgabe 1 (ca. 20 % der Gesamtpunkte)



Eine Kugel (Punktmasse m) bewegt sich reibungsfrei mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 zunächst eine schiefe Ebene hinab und dann durch eine Mulde, die sie im Punkt A unter dem Winkel α verlässt.

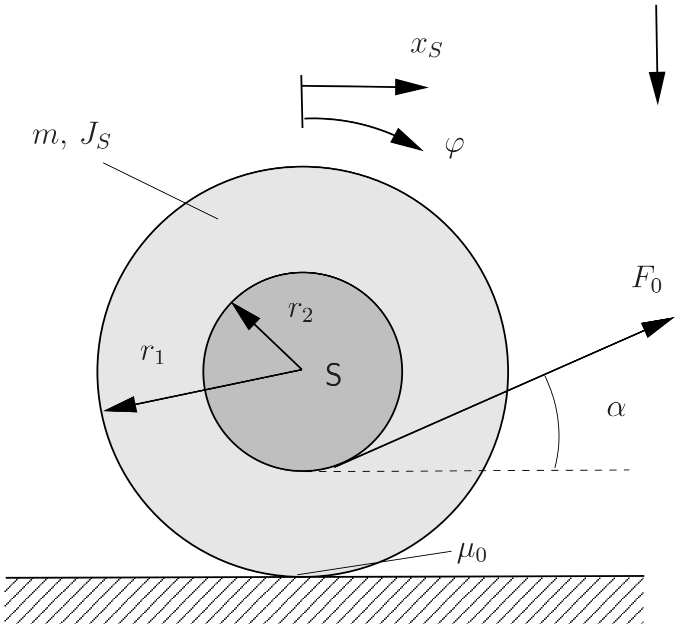
Geg.: m, v_0, H, h, L, α, g

a) Wie lautet der Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{v}_A$ der Kugel im Punkt A?

b) Wie lautet die Bahnkurve $y(x)$ der Kugel? In welcher Höhe h_1 trifft die Kugel im Punkt B auf? (jeweils mit Herleitung!)

c) Wie lautet der Geschwindigkeitsvektor beim Auftreffen der Kugel im Punkt B?

Aufgabe 2 (ca. 20 % der Gesamtpunkte)



Eine auf einer rauhen Ebene ruhende Seiltrommel (Masse m, Massenträgheitsmoment J_S) wird in Bewegung gesetzt, indem am Seil unter dem Winkel α mit der konstanten Kraft F_0 gezogen wird.

a) Schneiden Sie das System frei (Freikörperbild).

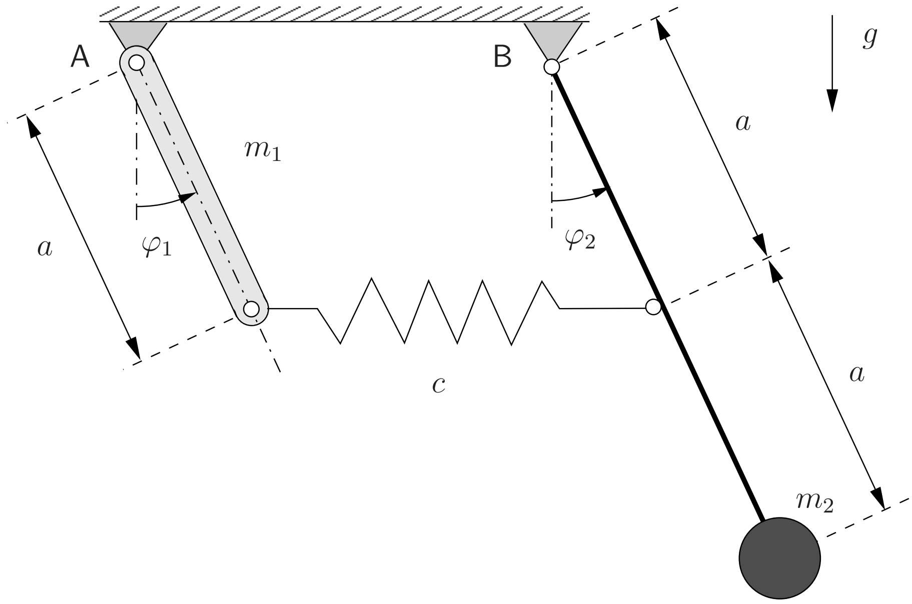
b) Bestimmen Sie die Beschleunigung a_S des Schwerpunktes S, wenn die Trommel rollt.

c) Wie groß muss dafür der Haftkoeffizient μ_0 sein?

Geg.: m, J_S, F_0, r_1, r_2, α, g

Aufgabe 3 (ca. 35 % der Gesamtpunkte)

Zwei Pendel sind wie dargestellt über eine Feder der Steifigkeit c miteinander gekoppelt. Das erste Pendel besteht aus einem schlanken homogenen Stab der Masse m_1 und der Länge a, während das zweite Pendel aus einem masselosen Stab der Länge $2a$ besteht, an dessen freiem Ende eine Punktmasse m_2 befestigt ist. Beide Stäbe können sich um ihre Drehachsen A und B reibungslos drehen. In der Lage $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ sei die Feder entspannt. *Für die Auslenkung der Feder sei nur der horizontale Anteil zu berücksichtigen!*



Bestimmen Sie:

a) die Bewegungsgleichungen in den angegebenen generalisierten Koordinaten φ_1 und φ_2 mit Hilfe der Lagrange'schen Gleichungen,

b) die linearisierten Bewegungsgleichungen für kleine Auslenkungen,

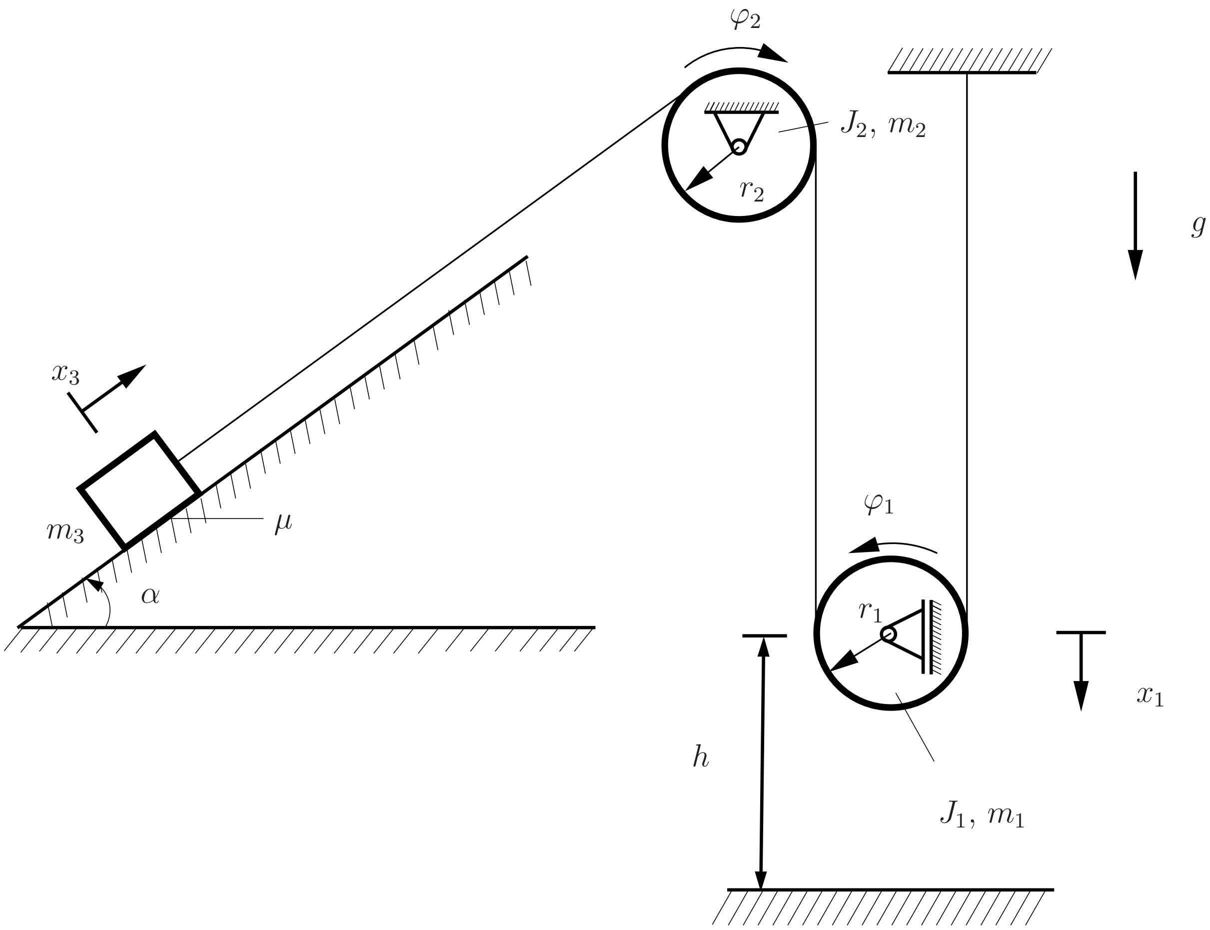
c) die Eigenkreisfrequenzen des Systems für den Fall: $m_1 = 3m$, $m_2 = m$, $c = \dfrac{mg}{2a}$,

d) Berechnen Sie unter der Näherungsannahme $\omega_1 = 0.8\sqrt{\dfrac{g}{a}}$ und $\omega_2 = 1.5\sqrt{\dfrac{g}{a}}$ die Eigenvektoren des Systems und skizzieren Sie die Schwingungsformen.

Gegeben: m_1, m_2, a, c, g

Aufgabe 4 (ca. 25 % der Gesamtpunkte)

Das dargestellte System besteht aus einer vertikal frei beweglichen Rolle 1 (m_1, J_1, r_1), einer gelenkig gelagerten Rolle 2 (m_2, J_2, r_2) und einer Masse m_3, die über ein masseloses, dehnstarres Seil verbunden sind. Der Reibungskoeffizient zwischen der Masse m_3 und der schiefen Ebene ist μ. Das System befindet sich zu Beginn in Ruhe und der Mittelpunkt der Rolle 1 in einer Höhe h über dem Boden. Es ist davon auszugehen, dass das Seil auf den Rollen nicht gleitet.



a) Geben Sie die kinematischen Beziehungen zwischen den Koordinaten $x_1, \varphi_1, \varphi_2$ und x_3 an.

b) Ermitteln Sie mit Hilfe des Arbeitssatzes die Geschwindigkeit, mit der die Rolle 1 auf dem Boden aufsetzt.

Gegeben: m_1, m_2, m_3, J_1, J_2, r_1, r_2, α, μ, g, h

Lösung zu Aufgabe 1

a) Wie lautet der Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{v}_\mathsf{A}$ der Kugel im Punkt A?

Der Energieerhaltungssatz lautet:

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \tag{1}$$

Das Nullniveau wird in den Punkt A gelegt. Somit folgt für die Energieterme:

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2}\, m\, v_0^2 \\ V_1 &= m\, g\, (H - h) \\ T_2 &= \frac{1}{2}\, m\, v_A^2 \\ V_2 &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Setzen wir die Terme ein und lösen nach v_A:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\, m\, v_0^2 + m\, g\, (H - h) &= \frac{1}{2}\, m\, v_A^2 \\ v_A &= \sqrt{2\, g\, (H - h) + v_0^2} \end{aligned} \tag{3}$$

Somit gilt für den Geschwindigkeitsvektor:

$$\mathbf{v}_A = v_A \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix} \tag{4}$$

b) In welcher Höhe h_1 trifft die Kugel im Punkt B auf? Wie lautet die Bahnkurve $y(x)$ der Kugel? (jeweils mit Herleitung!)

Die Beschleunigungen in x- und y-Richtung sind wie folgt gegeben:

$$\ddot{x} = 0 \qquad\qquad \ddot{y} = -g \tag{5}$$

Durch Integration erhalten wir:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v_{A_x} & \dot{y} &= -g\, t + v_{A_y} \\ x &= v_{A_x}\, t + x_0 & y &= -\frac{1}{2}\, g\, t^2 + v_{A_y}\, t + y_0 \end{aligned} \tag{6}$$

mit den Randbedingungen $x_0 = 0$ und $y_0 = 0$ erhalten wir:

$$t = \frac{x}{v_{A_x}} \qquad\qquad y = -\frac{1}{2}\, g\, t^2 + v_{A_y}\, t \tag{7}$$

Setzen wir diese Gleichungen ineinander ein, erhält man die Bahnkurve $y(x)$ des Massenpunktes:

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{2}\, g \left(\frac{x}{v_{A_x}}\right)^2 + v_{A_y}\, \frac{x}{v_{A_x}} \\ y &= -\frac{1}{2}\, g\, \frac{x^2}{v_A^2\, \cos^2\alpha} + v_A\, \sin\alpha\, \frac{x}{v_A\, \cos\alpha} \\ y &= -\frac{1}{2}\, g\, \frac{x^2}{v_A^2\, \cos^2\alpha} + x\, \tan\alpha \end{aligned} \tag{8}$$

Die Höhe h_1 kann somit durch die Länge L berechnet werden:

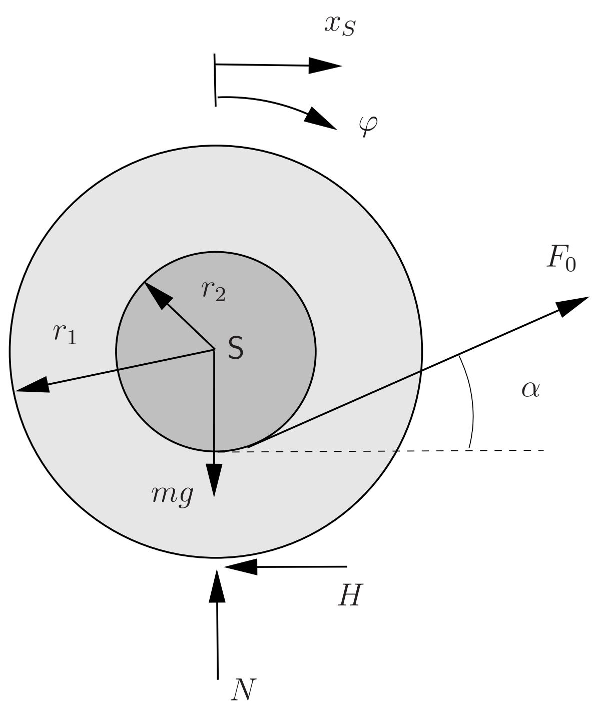
$$h_1 = -\frac{1}{2}\, g\, \frac{L^2}{v_A^2\, \cos^2\alpha} + L\, \tan\alpha \tag{9}$$

c) Wie lautet der Geschwindigkeitsvektor kurz vor dem Auftreffen der Kugel am Punkt B?

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_B &= \begin{bmatrix} v_A\, \cos\alpha \\ -g\, t + v_{A_y} \end{bmatrix} \\ \mathbf{v}_B &= \begin{bmatrix} v_A\, \cos\alpha \\ -g\, \frac{L}{v_A\, \cos\alpha} + v_A\, \sin\alpha \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{10}$$

Lösung zu Aufgabe 2

a) Freikörperbild



b) Kräfte- und Momentensatz

$$
\begin{aligned}
ma_S &= F_0 \cos\alpha - H \qquad (11)\\
0 &= N - mg + F_0 \sin\alpha \qquad (12)\\
J_s\ddot{\varphi} &= r_1 H - r_2 F_0 \qquad (13)
\end{aligned}
$$

Kinematik

$$x_S = r_1\varphi, \quad v_S = r_1\dot{\varphi}, \quad a_S = r_1\ddot{\varphi} \qquad (14)$$

Schwerpunktbeschleunigung

$$a_S = \frac{F_0}{m}\frac{\cos\alpha - \dfrac{r_2}{r_1}}{1 + \dfrac{J_S}{r_1^2 m}}$$

c) Damit kein Rutschen auftritt, muss gelten $H \leq \mu_0 N$

$$\text{aus (11), (13)} \qquad H = F_0 \frac{\dfrac{J_S\cos\alpha}{r_1^2 m} + \dfrac{r_2}{r_1}}{1 + \dfrac{J_S}{r_1^2 m}} \qquad (15)$$

$$\text{aus (12)} \qquad N = mg - F_0 \sin\alpha \qquad (16)$$

einsetzen liefert

$$\mu_0 \geq \frac{\dfrac{J_S\cos\alpha}{r_1^2 m} + \dfrac{r_2}{r_1}}{\left(\dfrac{mg}{F_0} - \sin\alpha\right)\left(1 + \dfrac{J_S}{r_1^2 m}\right)}$$

Lösung zu Aufgabe 3

a) Lösungsmöglichkeit über Lagrange 2. Art

Kinetische Energie

$$T = \frac{1}{2}J_1^{(\mathsf{A})}\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}J_2^{(\mathsf{B})}\dot{\varphi}_2^2$$

mit MTM bzgl. jeweiligem MGP:

$$\begin{aligned} J_1^{(\mathsf{A})} &= J_1^{(\mathsf{S})} + m(\frac{a}{2})^2 \\ &= \frac{1}{12}m_1a^2 + m\frac{a^2}{4} \\ &= \frac{1}{3}m_1a^2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} J_2^{(\mathsf{B})} &= m_2(2a)^2 \\ &= 4m_2a^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{6}m_1a^2\dot{\varphi}_1^2 + 2m_2a^2\dot{\varphi}_2^2$$

Potentielle Energie

$$V = -m_1g\frac{a}{2}\cos(\varphi_1) - 2m_2ga\cos(\varphi_2) + \frac{1}{2}ca^2\left(\sin(\varphi_2) - \sin(\varphi_1)\right)^2$$

Lagrange Funktion

$$\begin{aligned} L &= T - V \\ &= \frac{1}{6}m_1a^2\dot{\varphi}_1^2 + 2m_2a^2\dot{\varphi}_2^2 + m_1g\frac{a}{2}\cos(\varphi_1) + 2m_2ga\cos(\varphi_2) - \frac{1}{2}ca^2\left(\sin(\varphi_2) - \sin(\varphi_1)\right)^2 \end{aligned}$$

Lagrange Formalismus (Lagrange 2. Art; konservatives System)

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} = \frac{1}{3}m_1a^2\dot{\varphi}_1 \qquad \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1}\right) = \frac{1}{3}m_1a^2\ddot{\varphi}_1$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_1} = -m_1g\frac{a}{2}\sin(\varphi_1) - ca^2(\sin(\varphi_2) - \sin(\varphi_1))\left(-\cos(\varphi_1)\right)$$

$$\underline{\Rightarrow \frac{1}{3}m_1a^2\ddot{\varphi}_1 + m_1g\frac{a}{2}\sin(\varphi_1) - ca^2\cos(\varphi_1)(\sin(\varphi_2) - \sin(\varphi_1)) = 0}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} = 4m_2a^2\dot{\varphi}_2 \qquad \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2}\right) = 4m_2a^2\ddot{\varphi}_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_2} = -2m_2ga\sin(\varphi_2) - ca^2\cos(\varphi_2)(\sin(\varphi_2) - \sin(\varphi_1))$$

$$\underline{\Rightarrow 4m_2a^2\ddot{\varphi}_2 + 2m_2ga\sin(\varphi_2) + ca^2\cos(\varphi_2)(\sin(\varphi_2) - \sin(\varphi_1)) = 0}$$

b) Linearisierung

$$\sin(\varphi) \approx \varphi \qquad \cos(\varphi) \approx 1 \qquad \sin(\varphi)\cos(\varphi) \approx \varphi$$

Matrix-Vektor-Notation

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3}m_1a^2 & 0 \\ 0 & 4m_2a^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m_1g\frac{a}{2} + ca^2 & -ca^2 \\ -ca^2 & 2m_2ga + ca^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

c) Eigenkreisfrequenzen

$$\begin{aligned}
\det(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}) &= \left| \begin{bmatrix} m_1g\frac{a}{2} + ca^2 - \omega^2\frac{1}{3}m_1a^2 & -ca^2 \\ -ca^2 & 2m_2ga + ca^2 - \omega^2 4m_2a^2 \end{bmatrix} \right| \\
&= \left| \begin{bmatrix} 2mga - \omega^2ma^2 & -\frac{1}{2}mga \\ -\frac{1}{2}mga & \frac{5}{2}mga - \omega^2 4ma^2 \end{bmatrix} \right| \\
&= \left(2mga - \omega^2ma^2\right)\left(\frac{5}{2}mga - \omega^2 4ma^2\right) - \frac{1}{4}m^2g^2a^2 \\
&= \omega^4 4m^2a^4 - \omega^2\left(\frac{21}{2}m^2ga^3\right) + \frac{19}{4}m^2g^2a^2 \\
&= \omega^4 + \left(-\frac{21}{8}\frac{g}{a}\right)\omega^2 + \frac{19}{16}\frac{g^2}{a^2} = 0
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \omega_{1/2}^2 = \frac{21}{16}\frac{g}{a} \mp \sqrt{\left(-\frac{21}{16}\frac{g}{a}\right)^2 - \frac{19}{16}\frac{g^2}{a^2}}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\left(\frac{21}{16} - \sqrt{\left(-\frac{21}{16}\right)^2 - \frac{19}{16}}\right)\frac{g}{a}} = 0.7622\sqrt{\frac{g}{a}} \qquad \omega_2 = \sqrt{\left(\frac{21}{16} + \sqrt{\left(-\frac{21}{16}\right)^2 - \frac{19}{16}}\right)\frac{g}{a}} = 1.4297\sqrt{\frac{g}{a}}$$

Modalformen

1) Eigenform/Hauptschwingung

$$
\begin{aligned}
&\left(\mathbf{K} - \omega_1^2 \mathbf{M}\right) \mathbf{a}_1 = \mathbf{0} \\
\Rightarrow &\begin{bmatrix} 2mga - \omega_1^2 ma^2 & -\frac{1}{2}mga \\ -\frac{1}{2}mga & \frac{5}{2}mga - \omega_1^2 4ma^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \left(2mga - \omega_1^2 ma^2\right) a_{11} - \frac{1}{2} mga\, a_{12} = 0 \\
&\Rightarrow a_{12} = \frac{2\left(2mga - \omega_1^2 ma^2\right)}{mga} a_{11} \\
&\Rightarrow a_{12} = \left(4 - 2\omega_1^2 \frac{a}{g}\right) a_{11}
\end{aligned}
$$

$$
\underline{\Rightarrow \mathbf{a}_1 = a_{11} \begin{bmatrix} 1 \\ \left(4 - 2\omega_1^2 \frac{a}{g}\right) \end{bmatrix} = a_{11} \begin{bmatrix} 1 \\ 2.72 \end{bmatrix}}
$$

2) Eigenform/Hauptschwingung

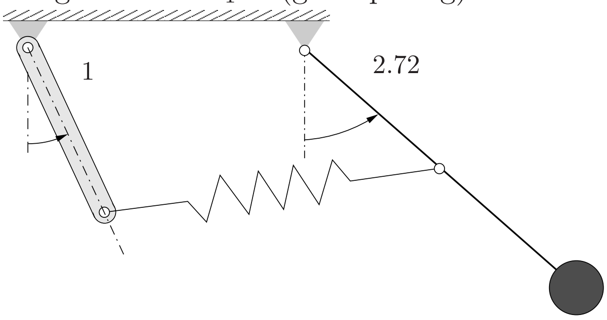
$$
\begin{aligned}
&\left(\mathbf{K} - \omega_2^2 \mathbf{M}\right) \mathbf{a}_2 = \mathbf{0} \\
\Rightarrow &\begin{bmatrix} 2mga - \omega_2^2 ma^2 & -\frac{1}{2}mga \\ -\frac{1}{2}mga & \frac{5}{2}mga - \omega_2^2 4ma^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Rightarrow \left(2mga - \omega_2^2 ma^2\right) a_{21} - \frac{1}{2} mga\, a_{22} = 0 \\
&\Rightarrow a_{22} = \frac{2\left(2mga - \omega_2^2 ma^2\right)}{mga} a_{21} \\
&\Rightarrow a_{22} = \left(4 - 2\omega_2^2 \frac{a}{g}\right) a_{21}
\end{aligned}
$$

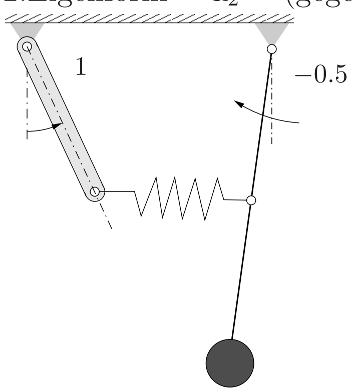
$$
\underline{\Rightarrow \mathbf{a}_2 = a_{21} \begin{bmatrix} 1 \\ \left(4 - 2\omega_2^2 \frac{a}{g}\right) \end{bmatrix} = a_{21} \begin{bmatrix} 1 \\ -0.5 \end{bmatrix}}
$$

Darstellung Eigenformen

1.Eigenform $\mathbf{a}_1$ (gleichphasig)



2.Eigenform $\mathbf{a}_2$ (gegenphasig)



Lösung zu Aufgabe 4

a) Kinematik:

$$r_1\dot\varphi_1 = \dot x_1 \quad \longrightarrow \quad r_1\varphi_1 = x_1$$

$$r_2\dot\varphi_2 = 2\,r_1\dot\varphi_1 \quad \longrightarrow \quad r_2\dot\varphi_2 = 2\dot x_1, \quad r_2\varphi_2 = 2\,x_1$$

$$r_2\dot\varphi_2 = \dot x_3 \quad \longrightarrow \quad r_2\dot\varphi_2 = 2\dot x_1, \quad x_3 = 2\,x_1$$

b) Arbeitssatz:

$$T_2 + V_2 = T_1 + V_1 + W^*\Big|_1^2 \qquad (\#)$$

Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned} &x_1 = \varphi_1 = \varphi_2 = x_3 = 0\\ &\dot x_1 = \dot\varphi_1 = \dot\varphi_2 = \dot x_3 = 0\\ &T_1 = 0\\ &V_1 = 0 \end{aligned}$$

Potentielle Energie:

$$V_2 = m_3 g \sin(\alpha) x_3 - m_1 g x_1$$

Reibarbeit:

$$W^*\Big|_1^2 = -\mu m_3 g \cos(\alpha) x_3$$

Kinetische Energie:

$$T_2 = \tfrac{1}{2}\,m_3\,\dot x_3^2 + \tfrac{1}{2}\,J_2\dot\varphi_2^2 + \tfrac{1}{2}\,J_1\dot\varphi_1^2 + \tfrac{1}{2}\,m_1\dot x_1^2$$

Die kinematischen Beziehungen werden in den Arbeitssatz eingesetzt:

$$W^*\Big|_1^2 = -\mu\, m_3\, g\, \cos(\alpha)\, 2x_1$$

$$V_2 = m_3 g 2 x_1 \sin(\alpha) - m_1 g x_1$$

$$T_2 = \frac{1}{2}\, m_3\, \left(4\dot x_1^2\right) + \frac{1}{2} J_2 \left(\frac{4}{r_2^2}\dot x_1^2\right) + \frac{1}{2} J_1 \left(\frac{\dot x_1^2}{r_1^2}\right) + \frac{1}{2}\, m_1 \dot x_1^2$$

Einsetzen in (#)

$$\dot x_1^2 = \frac{-2\mu\, m_3\, g\, \cos(\alpha) - 2\, m_3\, g\, \sin(\alpha) + m_1\, g}{4\, m_3 + J_2 \frac{4}{r_2^2} + J_1 \frac{1}{r_1^2} + m_1}\, 2\, x_1$$

$$\dot x_1 = \sqrt{\frac{-2\mu\, m_3\, g\, \cos(\alpha) - 2\, m_3\, g\, \sin(\alpha) + m_1\, g}{4\, m_3 + J_2 \frac{4}{r_2^2} + J_1 \frac{1}{r_1^2} + m_1}}\, \sqrt{2\,(h - r_1)}$$