Klausur

Einführung in die Kontinuumsmechanik

22. Juli 2014

Name: .... Vorname: ....

Matr.-Nr: .... Fachrichtung: ....

Hinweise

- Bitte schreiben Sie deutlich lesbar. Zeichnungen müssen sauber und übersichtlich sein. Die Benutzung roter Farbstifte ist nicht zugelassen.
- Aufgaben werden nur beurteilt, wenn sie auf den ausgegebenen Blättern bearbeitet sind. Eventuell abgegebene Formelsammlungen werden als nicht vorhanden betrachtet.
- Bei den Aufgaben muss eindeutig der Lösungsweg erkennbar sein. Ein Ergebnis ohne Lösungsweg wird nicht bewertet. Sollten für eine Aufgabe mehrere widersprüchliche Lösungen angegeben sein, so wird keine bewertet. Streichen Sie deshalb falsche Rechenschritte oder Zeichnungen durch.

....

Aufgabe	1	2	3	4	Σ
Punkte					

(Eintrag erfolgt durch Institut)

Institut für Mechanik	Klausur ,,Einführung in die
Prof. Dr.-Ing. P. Betsch	Kontinuumsmechanik"
Prof. Dr.-Ing. Th. Seelig	22. Juli 2014

Aufgabe 1 (ca. 25 % der Gesamtpunktzahl)

In einem Punkt eines Körpers ist der Spannungszustand durch folgenden Spannungstensor bzgl. einer Basis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ gegeben:

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 100 & 250 & 0 \\ 250 & 200 & 0 \\ 0 & 0 & 300 \end{bmatrix}. \qquad [N/mm^2]$$

a) Wie lautet der Spannungsvektor auf der Schnittebene mit dem Normalenvektor
$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e}_2$?

b) Wie groß sind die Hauptspannungen?

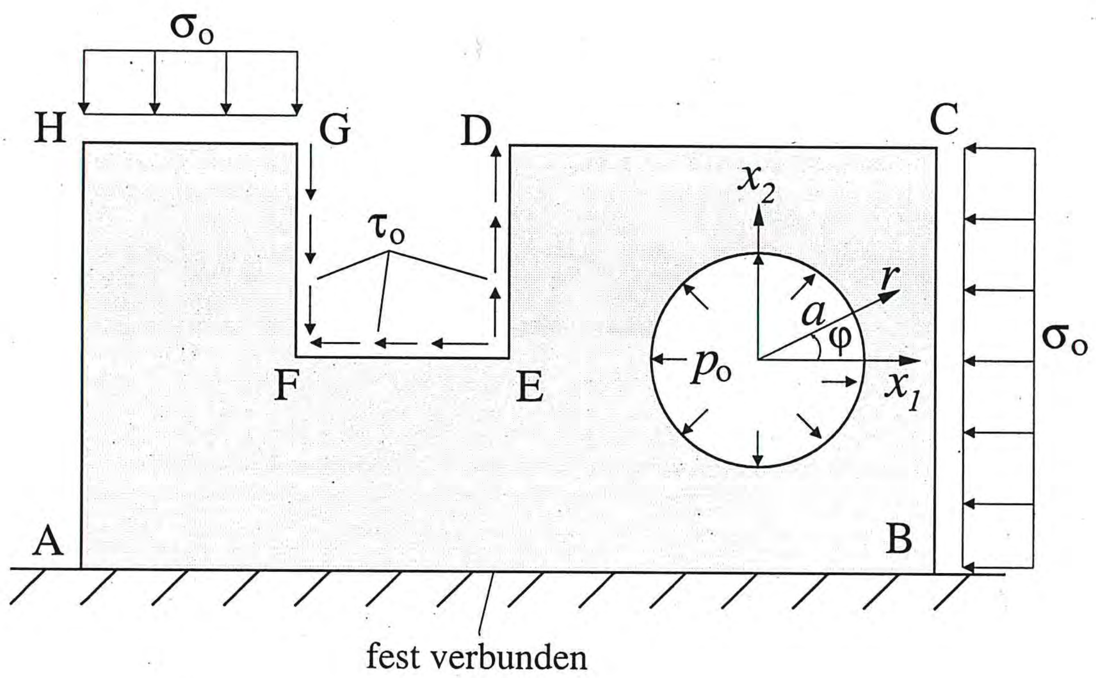
c) Wie lautet der Kugeltensor?

d) Wie lautet der Deviator und was muss für die Spur des Deviators gelten?

Institut für Mechanik	Klausur „Einführung in die
Prof. Dr.-Ing. P. Betsch	Kontinuumsmechanik"
Prof. Dr.-Ing. Th. Seelig	22. Juli 2014

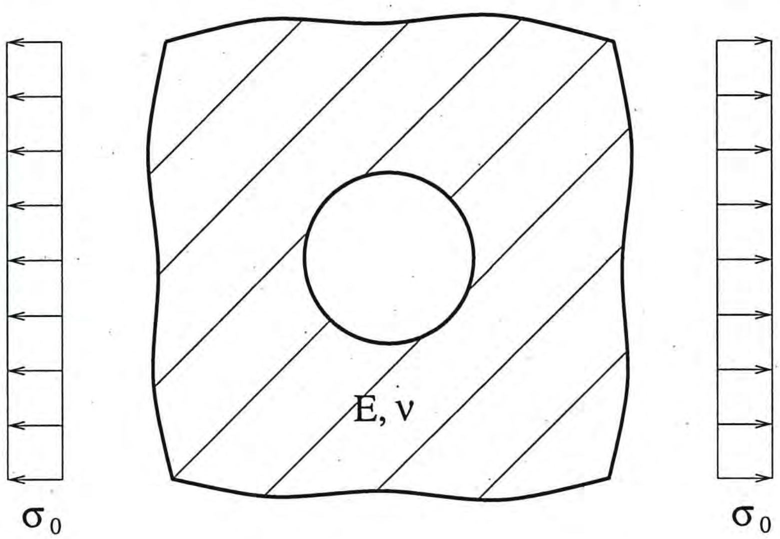
Aufgabe 2 (ca. 25 % der Gesamtpunktzahl)

Geben Sie für das dargestellte Bauteil (ebenes Problem) sämtliche Randbedingungen in Komponenten bzgl. des eingezeichneten kartesischen Koordinatensystems (x_1, x_2) bzw. des Polarkoordinatensystems (r, φ) an.
Die angegebenen Punkte A bis H können zur Bezeichnung verschiedener Randbereiche (z.B. Strecke $\overline{\text{DC}}$, u.s.w.) verwendet werden.



Aufgabe 3 (ca. 25 % der Gesamtpunktzahl)

Gegeben ist das ebene Problem einer unendlich ausgedehnten Scheibe mit Kreisloch unter einachsigem Zug.



Wie groß darf σ_0

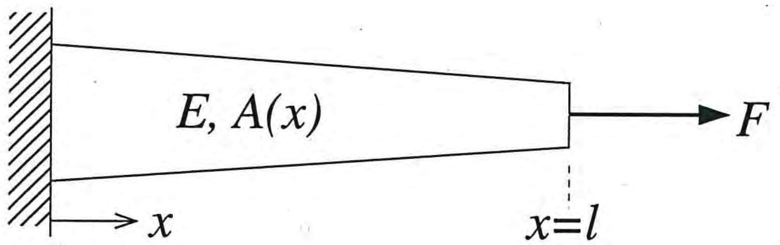
a) im ebenen Spannungszustand

b) im ebenen Verzerrungszustand

maximal sein, damit die Volumendehnung am Lochrand kleiner als ein gegebener kritischer Wert ist ($\varepsilon_V < \varepsilon_V^{krit}$)?

Aufgabe 4 (ca. 25 % der Gesamtpunktzahl)

Ein linear elastischer prismatischer Stab (E-Modul E) mit linear veränderlicher Querschnittsfläche $A(x) = A_0 \left(1 - \dfrac{x}{2l}\right)$ wird wie skizziert durch eine Einzelkraft F belastet.



a) Ermitteln Sie mit Hilfe des RITZ'schen Verfahrens und des eingliedrigen Ansatzes $\tilde{u}(x) = C\,\dfrac{x}{l}$ mit freiem Parameter C eine Näherungslösung für die Längsverschiebung.

b) Vergleichen Sie die Endverschiebung $\tilde{u}(x = l)$ mit dem exakten Wert $u(x = l) = 2 \ln 2 \,\dfrac{Fl}{EA_0} \approx 1,38\,\dfrac{Fl}{EA_0}$ und begründen Sie den Größenunterschied.

Einführung in die Kontinuumsmechanik SS 2014

Aufgabe 1

a) $\vec{t} = \sigma \cdot \vec{n}$

$$\rightsquigarrow [\vec{t}] = \begin{bmatrix} 100 & 250 & 0 \\ 250 & 200 & 0 \\ 0 & 0 & 300 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -150 \\ 50 \\ 0 \end{bmatrix}$$

b)

$\rightsquigarrow$ aus Matrix $\Rightarrow \sigma_1 = 300$

restlichen Eigenwerte aus

$$\begin{vmatrix} 100-\sigma & 250 \\ 250 & 200-\sigma \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (100-\sigma)(200-\sigma) - 250^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sigma^2 - 300\sigma - 42500 = 0$$

$$\rightsquigarrow \sigma_{1,3} = 150 \pm 50\sqrt{26}$$

Sortieren: $\sigma_1 = 50(3+\sqrt{26}) + 150$

$\sigma_2 = 300$

$\sigma_3 = -50(3+\sqrt{26}) + 150$

c) Kugeltensor $\sigma_{ij}^k = \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}$

mit $\sigma_{kk} = 200$

$$\rightsquigarrow [\sigma^k] = \begin{bmatrix} 200 & 0 & 0 \\ 0 & 200 & 0 \\ 0 & 0 & 200 \end{bmatrix}$$

d) Deviator $S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{ij}^k$

$$\rightsquigarrow [S] = \begin{bmatrix} -100 & 250 & 0 \\ 250 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{bmatrix}$$

$Sp(S) \overset{!}{=} 0$ ✓

Aufgabe 2

$\overline{AB}: u_1 = u_2 = 0$

$\overline{BC}: \sigma_{11} = -\sigma_0, \ \sigma_{12} = 0$

$\overline{CD}: \sigma_{12} = 0, \ \sigma_{22} = 0$

$\overline{DE}: \sigma_{11} = 0, \ \sigma_{12} = -\tau_0$

$\overline{EF}: \sigma_{12} = -\tau_0, \ \sigma_{22} = 0$

$\overline{FG}: \sigma_{11} = 0, \ \sigma_{12} = -\tau_0$

$\overline{GH}: \sigma_{12} = 0, \ \sigma_{22} = -\sigma_0$

$\overline{AH}: \sigma_{11} = 0, \ \sigma_{12} = 0$

$r = a: \sigma_{rr} = -p_0, \ \sigma_{r\varphi} = 0$

Aufgabe 3

Volumendehnung $\varepsilon_v = \varepsilon_{ii} = \frac{1}{3K} \sigma_{kk} < \varepsilon_v^{krit}$

a) ESZ (am Lochrand):

$\underset{\sim}{\sigma} = \text{diag}(3\sigma_0, 0, 0)$

$\sigma_{kk} = 3\sigma_0$

$\rightsquigarrow \varepsilon_v = \frac{1}{3K} 3\sigma_0 = \frac{\sigma_0}{K} < \varepsilon_v^{krit}$

$\Longrightarrow \underline{\underline{\sigma_0 < \varepsilon_v^{krit} K}}$

b) EVZ (am Lochrand):

$\underset{\sim}{\sigma} = \text{diag}(3\sigma_0, 0, \nu 3\sigma_0)$

$\sigma_{kk} = 3\sigma_0 (1+\nu)$

$\rightsquigarrow \varepsilon_v = \frac{1}{3K} 3\sigma_0 (1+\nu) = \frac{\sigma_0 (1+\nu)}{K} < \varepsilon_v^{krit}$

$\Longrightarrow \underline{\underline{\sigma_0 < \frac{\varepsilon_v^{krit} K}{1+\nu}}}$

Aufgabe 4

a) $\Pi(u) = \frac{1}{2} \int_0^l \left(EA(x) u'^2 - 2nu \right) dx - F \cdot u(l)$

mit $\hat{u}(x) = c\frac{x}{l}$, $\hat{u}'(x) = \frac{c}{l}$, $n = 0$

$\rightsquigarrow \Pi(\hat{u}) = \frac{1}{2} \int_0^l EA_0 \left(1 - \frac{x}{2l}\right) \frac{c^2}{l^2} dx - Fc$

$= \frac{1}{2} EA_0 \frac{c^2}{l^2} \left(l - \frac{l^2}{4l} \right) - Fc$

$= \frac{3}{8} EA_0 \frac{c^2}{l} - Fc$

C mit $\Pi' = 0$ bestimmen

$\Pi' = \frac{3}{4} EA_0 \frac{c}{l} - F = 0$

$\rightsquigarrow C = \frac{4}{3} \frac{Fl}{EA_0}$

$\Longrightarrow \hat{u}(x) = \frac{4}{3} \frac{F}{EA_0} x$

b) $\hat{u}(x=l) = \frac{4}{3} \frac{Fl}{EA_0} = 1{,}\overline{33} \frac{Fl}{EA_0} < u \approx 1{,}38 \frac{Fl}{EA_0}$

Durch Prinzip der Minimierung des Gesamtpotentials kleinste mögliche Lösung. Durch lin. Ansatz zu steif.