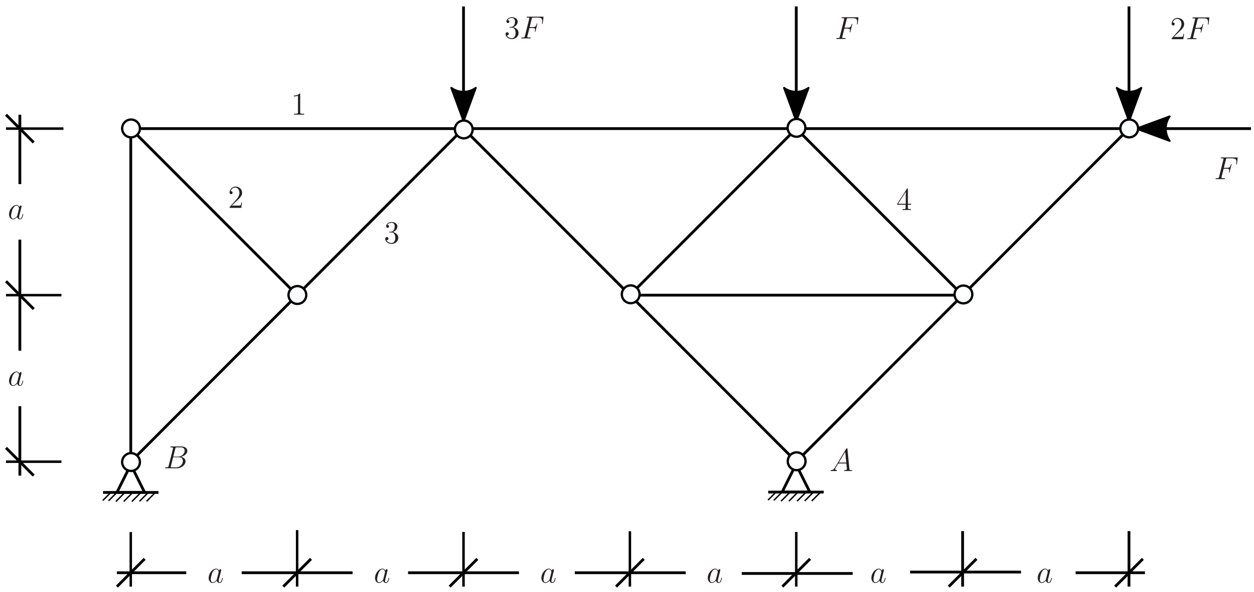
Institut für Mechanik	Modulprüfung
Prof. Dr.-Ing. habil. P. Betsch	Statik starrer Körper
Prof. Dr.-Ing. habil. Th. Seelig	15. August 2018

1. Aufgabe: (ca. 20 % der Gesamtpunkte)



Das dargestellte ebene Fachwerk ist in der angegebenen Weise belastet.

a) Beurteilen Sie das Tragwerk hinsichtlich der statischen Bestimmtheit.

b) Berechnen Sie die Stabkräfte S_1, S_2 und S_3 in den Stäben 1, 2 und 3,

c) die Lagerreaktion in Lager A,

d) die Stabkraft S_4 im Stab 4.

Zeichnen Sie jeweils den freigeschnittenen starren Körper, an dem die Gleichgewichtsbedingungen aufgestellt werden.

Gegeben: $F,\ a$

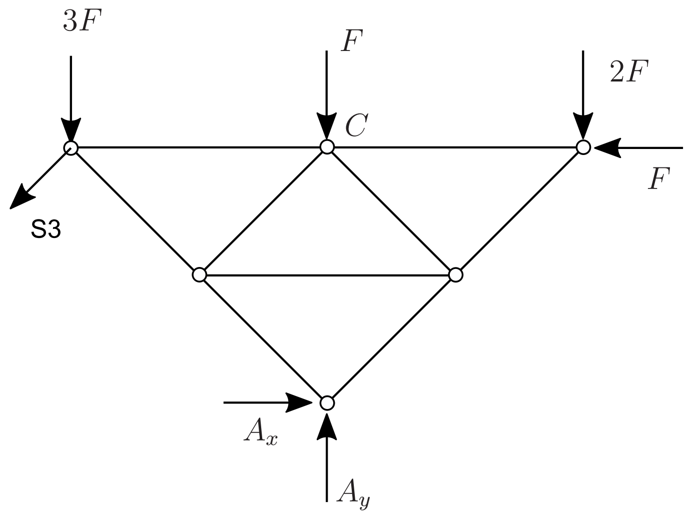
Musterlösung - Aufgabe 1

a) Statische Bestimmtheit:

$$a + s = 2 * k \qquad a = \text{Auflager}, s = \text{Stäbe}, k = \text{Knoten}$$

- $4 + 14 = 2 \cdot 9 \Rightarrow$ notwendige Bedingung
- nicht kinematisch gelagert $\Rightarrow$ hinreichende Bedingung

Freischnitt (mit Pendelstütze)



b) Berechnung der Stabkräfte S_1, S_2, S_3

Nullstäbe

- $S_2 = 0$ (Unbelasteter Knoten, drei Stäbe, zwei in gleicher Richtung)
- $S_1 = 0$ (Unbelasteter Stabzweischlag!)

Stabkraft S_3

$$\curvearrowleft \text{A:} \quad S_3\, 2\sqrt{2}\, a + 3\, F\, 2a - 2\, F\, 2a + F\, 2a = 0$$

$$\Rightarrow S_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\, 2\, F = -\sqrt{2}\, F$$

c) Lagerreaktionen

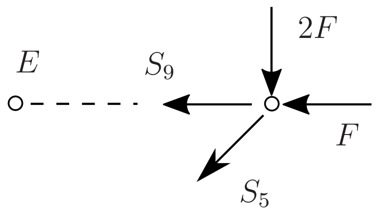
$$\rightarrow: \qquad A_x - S_3\, \frac{1}{\sqrt{2}} - F = 0$$

$$\uparrow: \qquad -S_3\, \frac{1}{\sqrt{2}} - 6\, F + A_y = 0$$

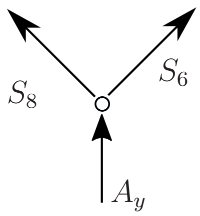
$$\Rightarrow A_x = F + \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sqrt{2}\, F) = 0$$

$$\Rightarrow A_y = 6\, F + \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sqrt{2}\, F) = 5\, F$$

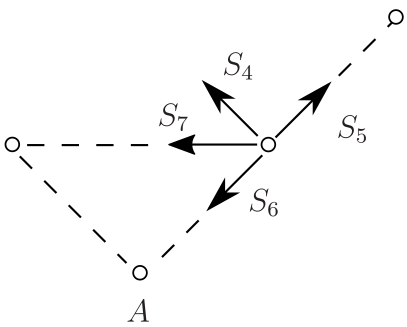
Knotenpunktverfahren



$$\curvearrowleft \text{E:} \quad -2F2a - S_5 2a\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$
$$\Rightarrow S_5 = -\sqrt{2}\,2F$$



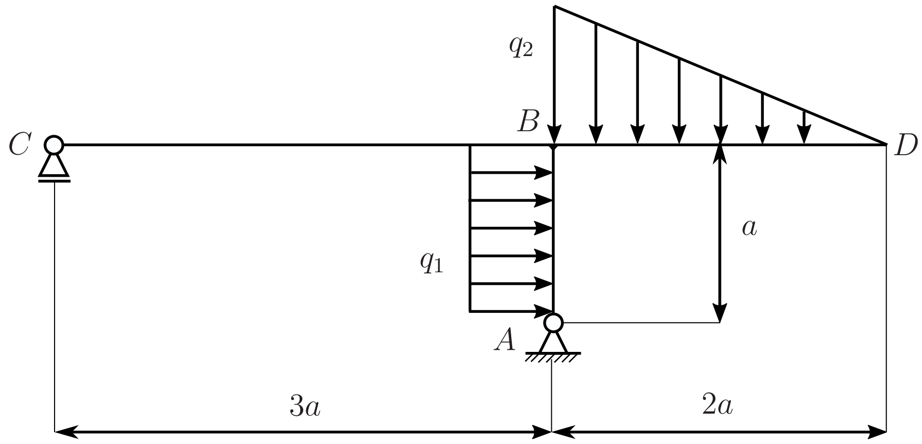
$$\rightarrow: \qquad S_6 = S_8$$
$$\uparrow: \qquad \frac{\sqrt{2}}{2}(S_8 + S_6) = -A_y$$
$$\Rightarrow S_6 = -\frac{A_y}{\sqrt{2}} = -\frac{5}{\sqrt{2}}F$$



$$\nearrow: \qquad -S_6 + S_5 - \frac{\sqrt{2}}{2}S_7 = 0$$
$$\nwarrow: \qquad S_4 + \frac{\sqrt{2}}{2}S_7 = 0$$

$$\Rightarrow \quad S_7 = \sqrt{2}(S_5 - S_6) = -4F + 5F = F$$
$$\Rightarrow \quad S_4 = -\frac{\sqrt{2}}{2}S_7 = -\frac{\sqrt{2}}{2}F$$

2. Aufgabe: (ca. 35 % der Gesamtpunkte)



Die dargestellte Konstruktion wird durch die Steckenlasten q_1 und q_2 belastet.

a) Bestimmen Sie alle Lagerreaktionen im Lager A und C.

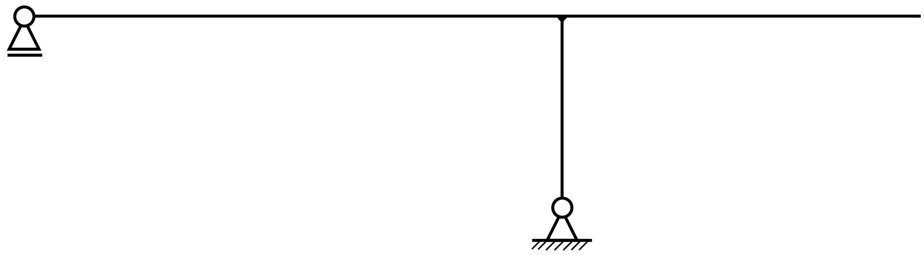
b) Bestimmen Sie den Biegemomenten- und Querkraftverlauf zwischen den Punkten A-B und B-D.

c) Zeichnen Sie diese Verläufe in die vorgegebenen Diagramme unter Angabe der extremalen Ordinaten ein.

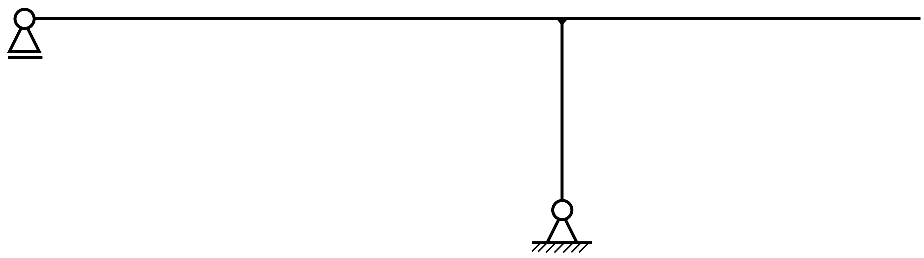
Gegeben: $a,\ q_1 = 6q_0,\ q_2 = 9q_0,\ q_0$

Vorlagen zur Aufgabe 2 c)

M:

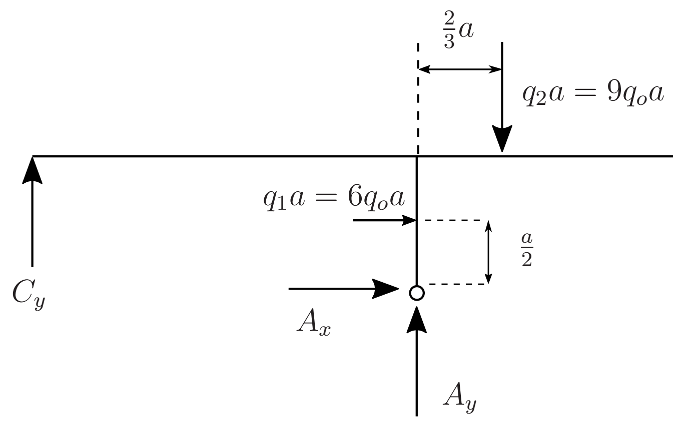


Q:



Musterlösung - Aufgabe 2

a) Freischnitt Lagerreaktionen



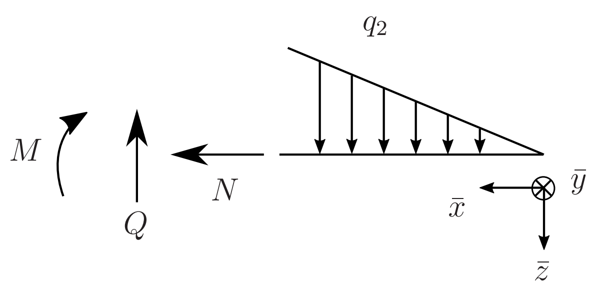
$$\sum F_x = 0: \quad A_x = -6q_o a$$
$$\sum F_z = 0: \quad C_y + A_y - 9q_0 a = 0 \quad \rightarrow \quad A_y = 9q_0 a - C_y = 12q_0 a$$

Gleichgewicht:

$$\sum M^A = 0: \quad -C_y 3a - 9q_0 a\frac{2}{3}a - 6q_0 a\frac{a}{2} = 0$$
$$3C_y = -6q_0 a - 3q_0 a = -9q_o aq \quad \rightarrow \quad C_y = -3q_0 a$$

b) **Bereich** $B - D$

Freischnitt negatives Schnittufer



Geradengleichung für $q_2(\bar{x})$

$$q_2(\bar{x}) = \frac{9q_0}{2a}\bar{x}$$

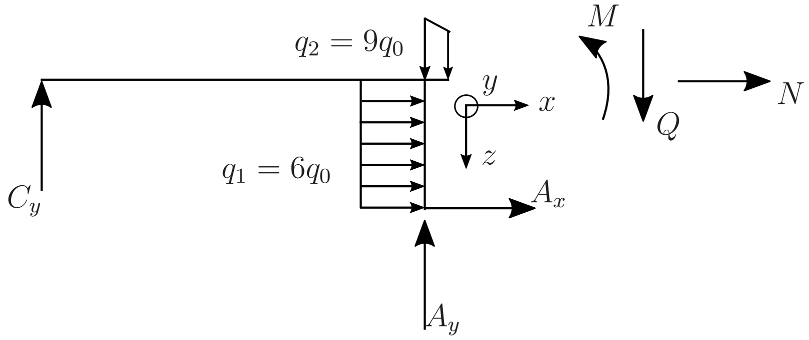
Gleichgewichtsbeziehungen

$$\sum F_{\bar{z}} = 0: \quad -Q(\bar{x}) + \frac{1}{2}(\frac{9q_0}{2a}\bar{x})\bar{x} = 0$$
$$Q(\bar{x}) = \frac{1}{2}(\frac{9q_0}{2a}\bar{x})\bar{x} = \frac{9q_0}{4a}\bar{x}^2$$
$$\sum M^{\bar{x}} = 0: \quad M(\bar{x}) + \frac{1}{3}\bar{x}(\frac{1}{2}\frac{9q_0}{2a}\bar{x}\bar{x}) = 0$$
$$M(\bar{x}) = -\frac{3}{4}\frac{q_0}{a}\bar{x}^3$$

Auswertung an der Stelle $\bar{x} = 2a$

$$Q(\bar{x} = 2a) = 9q_0 a$$
$$M(\bar{x} = 2a) = -6q_0 a^2$$

Alternativ Freischnitt positives Schnittufer



Gleichgewicht vertikal

$$\sum F_x = 0 : -A_y - C_y + Q(x) + \int_0^x q_2(x)\mathrm{d}x = 0$$
$$Q(x) = A_y + C_y - \int_0^x q_2(x)\mathrm{d}x$$

Geradengleichung

$$q_2(x) = mx + b$$
$$q_2 \overset{!}{=} b$$
$$0 \overset{!}{=} 2ma + b$$

und somit

$$q_2(x) = q_2(-\frac{1}{2a}x + 1)$$
$$\int_0^x q_2(x)\mathrm{d}x = q_2 \int_0^x -\frac{1}{2a}x + 1\mathrm{d}x = q_2(-\frac{1}{4}x^2 + x)$$
$$= 9q_0(-\frac{1}{4}x^2 + x)$$

daraus folgt

$$Q(x) = 12q_0a - 3q_0a - 9q_0(-\frac{1}{4}x^2 + x)$$

$M(x)$ durch Integration von $Q(x)$

$$M(x) = \int Q(x)\mathrm{d}x = 9q_0ax - 9q_0(-\frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{2}x^2) + c$$

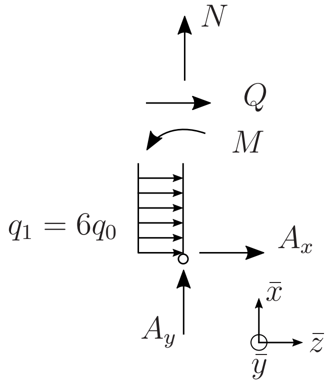
Integrationskonstante bestimmen

$$M(x = 2a) = q_0a^2(18 + 6 - 18) = 6q_0a^2 + c \overset{!}{=} 0 \quad \rightarrow \quad c = -6q_0a^2$$

Auswertung an der Stelle $x = 0$

$$Q(x = 0) = 9q_0a$$
$$M(x = 0) = -6q_0a^2$$

Bereich $A - B$
Freischnitt



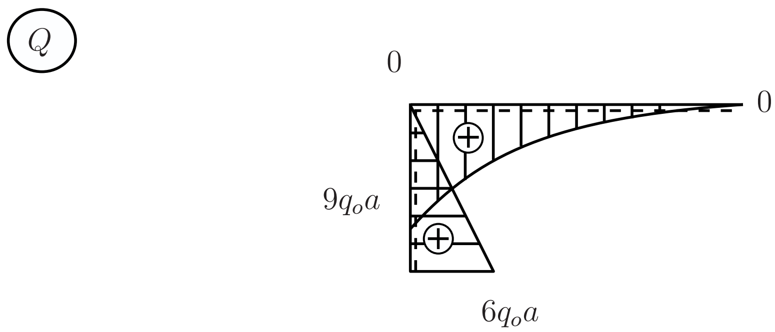
Gleichgewichtsbeziehungen

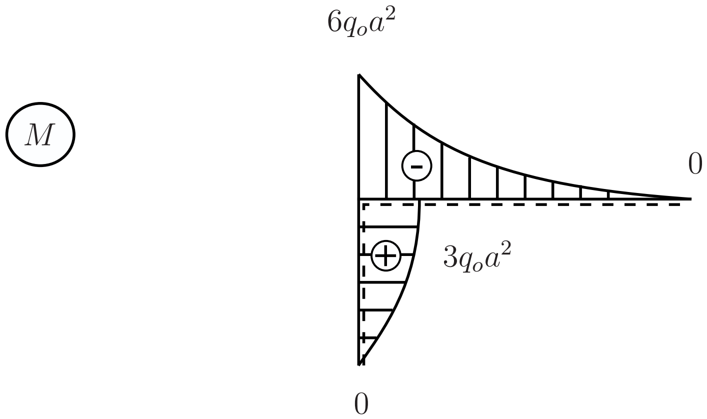
$$\sum F_{\bar{z}} = 0: \quad Q(\tilde{x}) + A_x + 6q_0\tilde{x} = 0$$
$$Q(\tilde{x}) = 6q_0a - 6q_0\tilde{x}$$
$$\sum M^{\tilde{x}} = 0: \quad M(\tilde{x}) + A_x x + 6q_0\tilde{x}\frac{1}{2}\tilde{x} = 0$$
$$M(\tilde{x}) = 6q_0ax - 3q_0x^2$$

Auswertung an der Stelle $\tilde{x} = a$

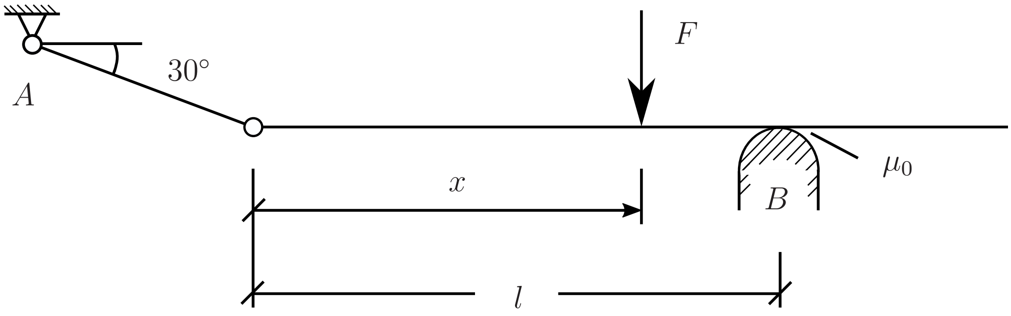
$$Q(\tilde{x} = a) = 0$$
$$M(\tilde{x} = a) = 3q_0a^2$$

c) Schnittgrößenverläufe





3. Aufgabe: (ca. 20 % der Gesamtpunkte)

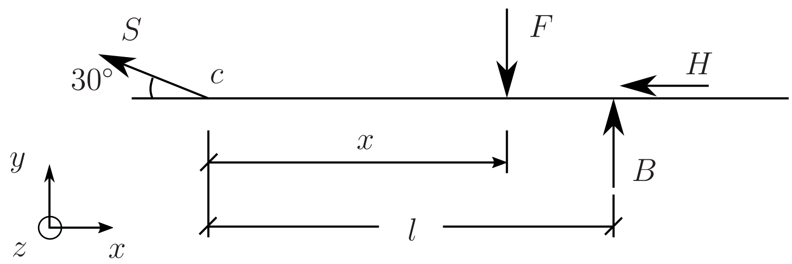


Ein horizontaler gewichtsloser Balken wird in A über eine Pendelstütze gelagert und liegt in B lose auf einer rauhen Unterlage (Haftkoeffizient μ_0). In welchem Bereich $x_{\min} \leq\ x \leq\ x_{\max}$ muss die lotrechte Kraft F angreifen, damit der Balken in der gezeichneten Lage im Gleichgewicht ist, also in B weder nach rechts noch nach links gleitet?

Gegeben: $F,\ l,\ \mu_0 = \frac{1}{3}$

Musterlösung - Aufgabe 3

Grenzfall: $H = \mu_0 B$
Bewegung nach rechts:



$$\sum F_x: \quad -S\cos(30°) - H = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_0 B = -S\cos(30°) \quad \Rightarrow \quad B = -\frac{1}{\mu_0} S\cos(30°) \qquad \text{(I)}$$

$$\sum F_y: \quad S\sin(30°) + B - F = 0 \quad \Rightarrow \quad S = \frac{1}{\sin(30°)}(F - B) \qquad \text{(II)}$$

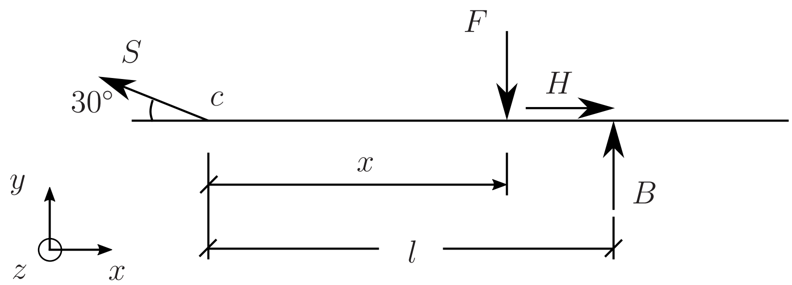
$$\sum M^z: \quad Bl - Fx = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{l}{F} B \qquad \text{(III)}$$

$$\text{(II) in (I):} \quad B = -\frac{1}{\mu_0}\left(\frac{\cos(30°)}{\sin(30°)}\right)(F - B) = -\frac{1}{\mu_0}\sqrt{3}(F - B)$$

$$\Rightarrow \quad B\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{\mu_0}\right) = -\left(\frac{\sqrt{3}}{\mu_0}\right)F \quad \Rightarrow \quad B = -\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{\mu_0}\right)^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{\mu_0}\right)F$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{l}{F}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{\mu_0}\right)^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}F}{\mu_0}\right) = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{\mu_0}}{-4.2} l = 1.24l = x_{max}$$

Bewegung nach links:



$$\sum F_x: \quad -S\cos(30°) + H = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_0 B = S\cos(30°) \quad \Rightarrow \quad B = \frac{1}{\mu_0} S\cos(30°) \qquad \text{(I)}$$

$$\sum F_y: \quad S\sin(30°) + B - F = 0 \quad \Rightarrow \quad S = \frac{1}{\sin(30°)}(F - B) \qquad \text{(II)}$$

$$\sum M^z: \quad Bl - Fx = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{l}{F} B \qquad \text{(III)}$$

$$\text{(II) in (I):} \quad B = +\frac{1}{\mu_0}\left(\frac{\cos(30°)}{\sin(30°)}\right)(F - B) = +\frac{1}{\mu_0}\sqrt{3}(F - B)$$

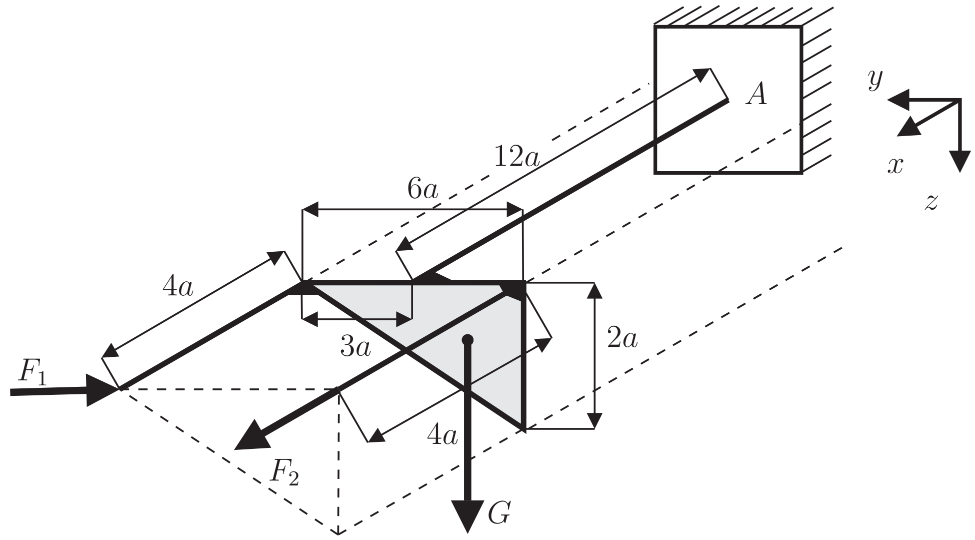
$$\Rightarrow \quad B\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{\mu_0}\right) = +\left(\frac{\sqrt{3}}{\mu_0}\right)F \quad \Rightarrow \quad B = +\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{\mu_0}\right)^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{\mu_0}\right)F$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{l}{F}B = \frac{l}{F}\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{\mu_0}\right)^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}F}{\mu_0}\right) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{\mu_0}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{\mu_0}} = 0.84l = x_{min}$$

Bereich für Gleichgewicht:

$$0.84l \leq \ x \leq 1.24l$$

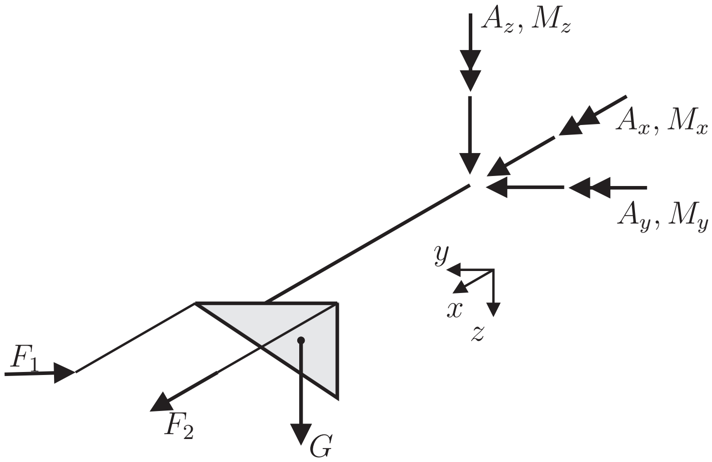
4. Aufgabe: (ca. 25 % der Gesamtpunkte)



Das dargestellte Tragwerk ist in A eingespannt und wird durch die Einzelkräfte $\mathbf{F}_1 = -F_1\boldsymbol{e}_y$, $\mathbf{F}_2 = F_2\boldsymbol{e}_x$ sowie durch das Eigengewicht der Scheibe G (homogene Dreiecksscheibe mit konstanter Dicke) belastet. Bestimmen Sie alle Lagerreaktionen in A.

Gegeben: $a,\ F_1,\ F_2,\ G$

Musterlösung - Aufgabe 4 Freischnitt



$$\sum F_x = 0: \quad A_x + F_2 = 0 \quad \rightarrow \quad A_x = -F_2$$
$$\sum F_y = 0: \quad A_y - F_1 = 0 \quad \rightarrow \quad A_y = F_1$$
$$\sum F_z = 0: \quad A_z + G = 0 \quad \rightarrow \quad A_z = -G$$
$$\sum M_x = 0: \quad M_x - G1a = 0 \quad \rightarrow \quad M_x = Ga$$
$$\sum M_y = 0: \quad M_y - G12a = 0 \quad \rightarrow \quad M_y = G12a$$
$$\sum M_z = 0: \quad M_z - F_1(12a + 4a) + F_2 3a = 0 \quad \rightarrow \quad M_z = 16F_1a - 3F_2a$$