Modulprüfung in Technischer Mechanik
am 11. August 2015

Statik starrer Körper

Aufgaben

Name: ____________________ Vorname: ____________________

Matr.-Nr.: ________________ Fachrichtung: ________________

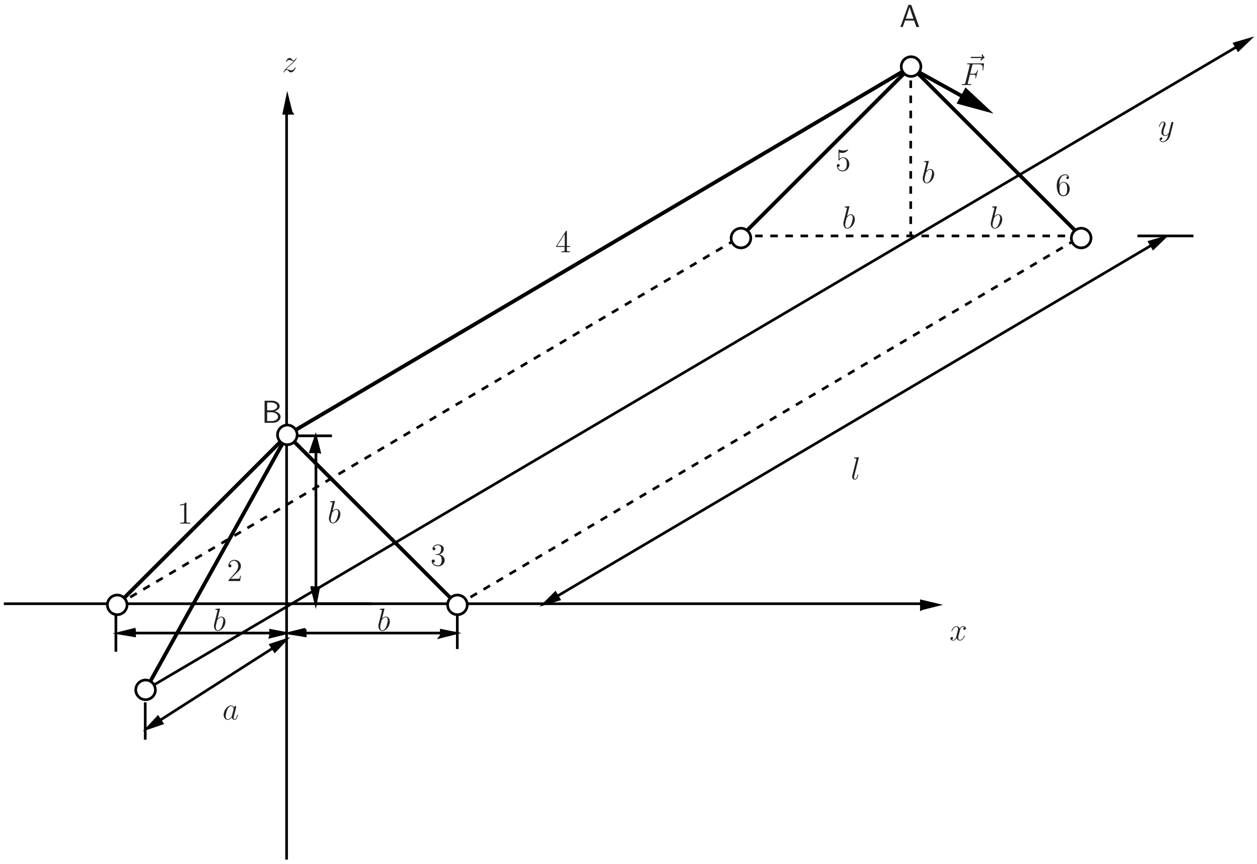
Hinweise:

- Bitte schreiben Sie deutlich lesbar. Zeichnungen müssen sauber und übersichtlich sein. Die Benutzung roter Farbstifte ist nicht zugelassen.
- Aufgaben werden nur beurteilt, wenn sie auf den ausgegebenen Blättern gelöst sind. Eventuell abgegebene Formelsammlungen werden als nicht vorhanden betrachtet. Trennen Sie die Aufgabenblätter nicht auf.
- Bei den Aufgaben muss eindeutig der Lösungsweg erkennbar sein. Ein Ergebnis ohne Lösungsweg wird nicht bewertet. Sollten für eine Aufgabe mehrere widersprüchliche Lösungen angegeben sein, so wird keine bewertet. Streichen Sie deshalb falsche Rechenschritte oder Zeichnungen durch.

Aufgabe	1	2	3	4 5	$\sum$
Punkte					

(Eintrag erfolgt durch Institut)

1. Aufgabe (ca. 23 % der Gesamtpunktzahl)



Das aus gelenkig verbundenen Stäben bestehende System (Gerippe eines Zeltes) wird im Punkt A durch eine Seilkraft $\vec{F} = F\vec{e}_x + F\vec{e}_y - F\vec{e}_z$ belastet.

a) Diskutieren Sie die statische Bestimmtheit des Systems.

b) Stellen Sie die Stabkräfte von den Knoten A bzw. B aus als Vektoren dar.

c) Berechnen Sie die Stabkräfte S_1 bis S_6.

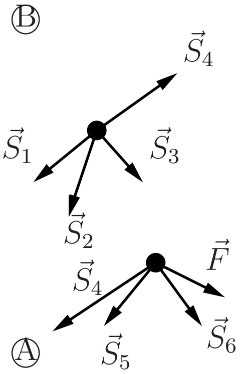
Gegeben: $a,\ b,\ F,\ l$.

Musterlösung - Aufgabe 1

a) stat. Bestimmtheit

$$a + s = 3k \quad \Leftrightarrow \quad 3 \cdot 5 + 6 = 3 \cdot 7$$

b)



$$\vec{S}_1 = |\vec{S}_1|\vec{e}_{S_1} = S_1 \frac{1}{|-b\vec{e}_x - b\vec{e}_z|}(-b\vec{e}_x - b\vec{e}_z) = -S_1 \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x + \vec{e}_z)$$

$$\vec{S}_2 = |\vec{S}_2|\vec{e}_{S_2} = S_2 \frac{1}{|-a\vec{e}_y - b\vec{e}_z|}(-a\vec{e}_y - b\vec{e}_z) = \frac{-S_2}{\sqrt{a^2+b^2}}(a\vec{e}_y + b\vec{e}_z)$$

$$\vec{S}_3 = |\vec{S}_3|\vec{e}_{S_3} = S_3 \frac{1}{|b\vec{e}_x - b\vec{e}_z|}(b\vec{e}_x - b\vec{e}_z) = S_3 \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x - \vec{e}_z)$$

$$\vec{S}_4 = |\vec{S}_4|\vec{e}_{S_4} = S_4 \frac{1}{|l\vec{e}_y|} l\vec{e}_y = S_4\vec{e}_y$$

$$\vec{F} = F(\vec{e}_x + \vec{e}_y - \vec{e}_z)$$

$$\vec{S}_4 = -S_4\vec{e}_y$$

$$\vec{S}_5 = |\vec{S}_5|\vec{e}_{S_5} = S_5 \frac{1}{|-b\vec{e}_x - b\vec{e}_z|}(-b\vec{e}_x - b\vec{e}_z) = -S_5 \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x + \vec{e}_z)$$

$$\vec{S}_6 = |\vec{S}_6|\vec{e}_{S_6} = S_6 \frac{1}{|b\vec{e}_x - b\vec{e}_z|}(b\vec{e}_x - b\vec{e}_z) = S_6 \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x - \vec{e}_z)$$

c) GGW in A:

$$\vec{S}_4 + \vec{S}_5 + \vec{S}_6 + \vec{F} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 - \frac{S_5}{\sqrt{2}} + \frac{S_6}{\sqrt{2}} + F \\ -S_4 + 0 + 0 + F \\ 0 - \frac{S_5}{\sqrt{2}} - \frac{S_6}{\sqrt{2}} - F \end{bmatrix} = \vec{0}$$

GGW in B:

$$\vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \vec{S}_3 + \vec{S}_4 = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -\frac{S_1}{\sqrt{2}} + 0 + \frac{S_3}{\sqrt{2}} + 0 \\ 0 - \frac{S_2 a}{\sqrt{a^2+b^2}} + 0 + S_4 \\ -\frac{S_1}{\sqrt{2}} - \frac{S_2 b}{\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{S_3}{\sqrt{2}} + 0 \end{bmatrix} = \vec{0}$$

auflösen ergibt

$$S_4 = F$$

$$S_5 = 0$$

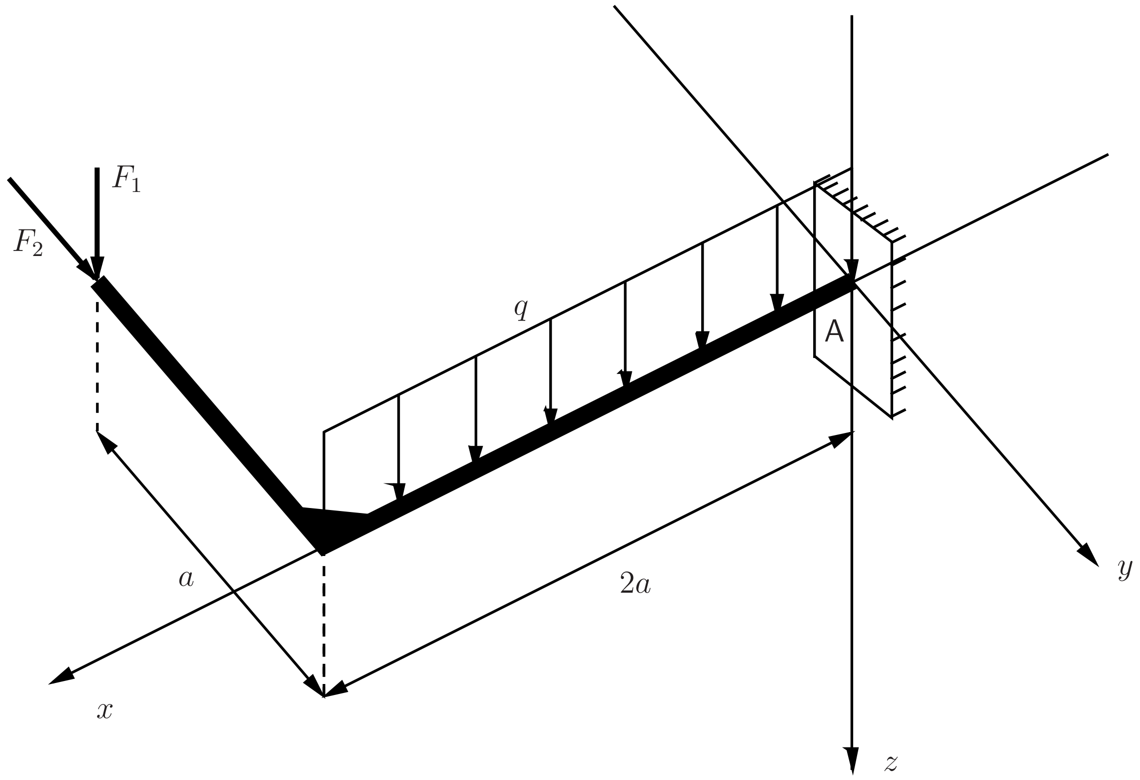
$$S_6 = -\sqrt{2}\,F$$

$$S_1 = S_3 = -F \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}}_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{b}{a}$$

$$S_2 = F \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$$

$$S_3 = -F \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}}_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{b}{a}$$

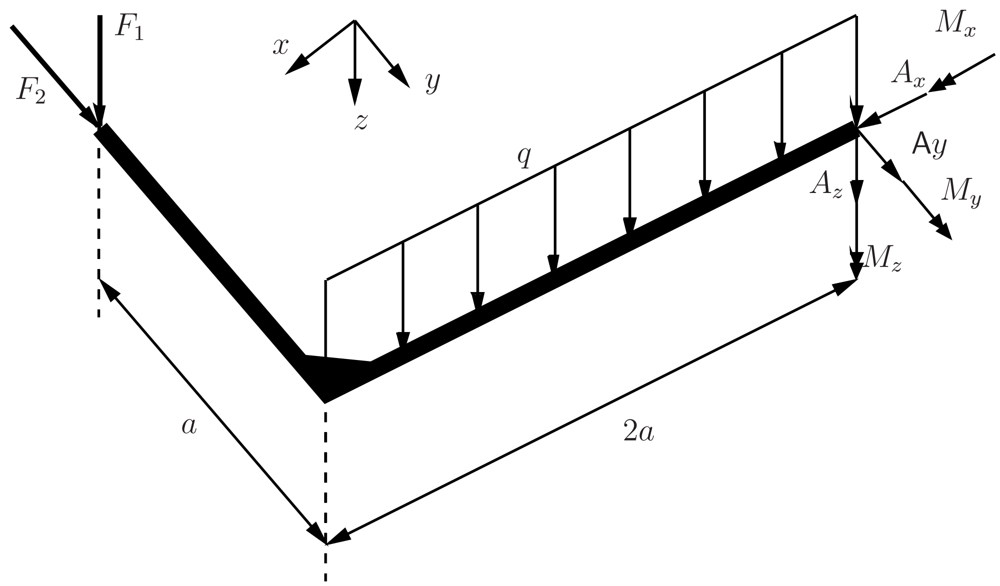
2. Aufgabe (ca. 18 % der Gesamtpunktzahl)



Ein abgewinkelter Träger wird durch die Einzelkräfte F_1 und F_2 sowie eine konstante Streckenlast belastet. Bestimmen Sie die Lagerreaktionen in A.

Gegeben: $a,\ q,\ F_1 = qa,\ F_2 = 2qa.$

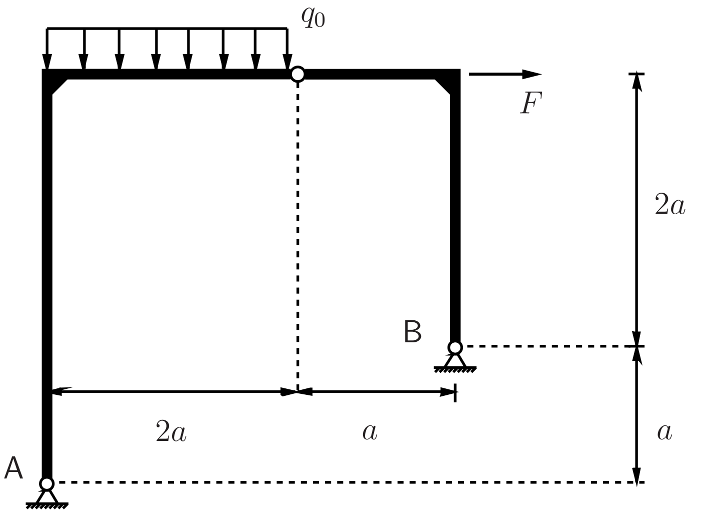
/**Musterlösung - Aufgabe 2**



$$
\begin{array}{rlcl}
\longrightarrow \Sigma F_x = 0: & A_x = 0 & & \\
\searrow \Sigma F_y = 0: & F_2 + A_y = 0 & \Rightarrow & A_y = -2\,qa \\
\downarrow \Sigma F_z = 0: & F_1 + 2\,qa + A_z = 0 & \Rightarrow & A_z = -3\,qa \\
\twoheadrightarrow \Sigma M_x^{(0)} = 0: & F_1 \cdot a + M_x = 0 & \Rightarrow & M_x = -F_1 \cdot a = -qa^2 \\
\searrow \Sigma M_y^{(0)} = 0: & F_1 \cdot 2\,a + 2\,qa \cdot a + M_y = 0 & \Rightarrow & M_y = -4\,qa^2 \\
\downarrow \Sigma M_z^{(0)} = 0: & -F_2 \cdot 2\,a + M_z = 0 & \Rightarrow & M_z = 4\,qa^2
\end{array}
$$

Achtung: bei dem hier gegebenen Koordinatensystem handelt es sich um ein Linkssystem !

3. Aufgabe (ca. 36 % der Gesamtpunkte)

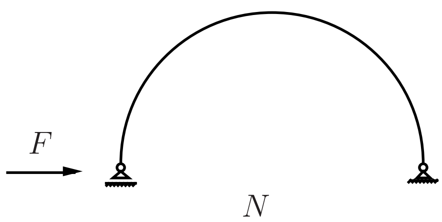


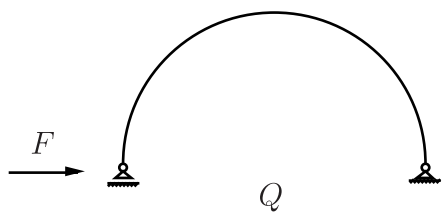
a) Diskutieren Sie für den dargestellten Dreigelenkbogen die statische Bestimmtheit.

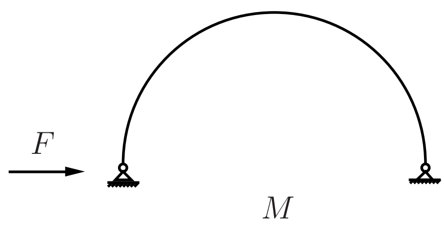
b) Bestimmen Sie die Lagerreaktionen in A und B.

c) Bestimmen Sie die Schnittgrößen für den Fall $q_0 a = 3F$ und tragen Sie die Schnittgrößenverläufe unter Angabe der maßgeblichen Ordinaten in die vorgesehenen Diagramme auf der folgenden Seite ein.

d) Skizzieren Sie qualitativ (ohne Rechnung möglich) die N-, Q- und M-Verläufe in dem unten dargestellten halbkreisförmigen Bogen.





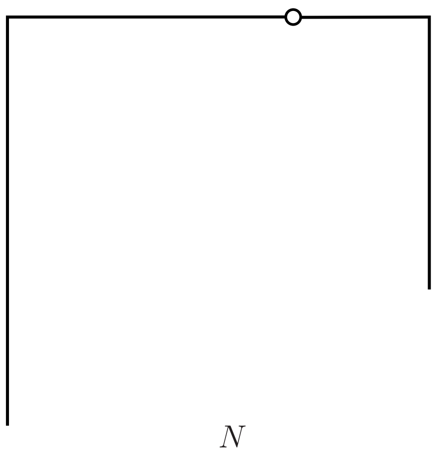


Gegeben: $F,\ q_0,\ a$.

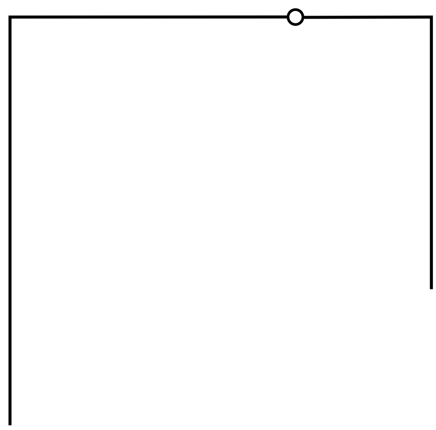
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. habil. P. Betsch
Prof. Dr.-Ing. habil. Th. Seelig

Prüfung in
Statik starrer Körper
11. August 2015

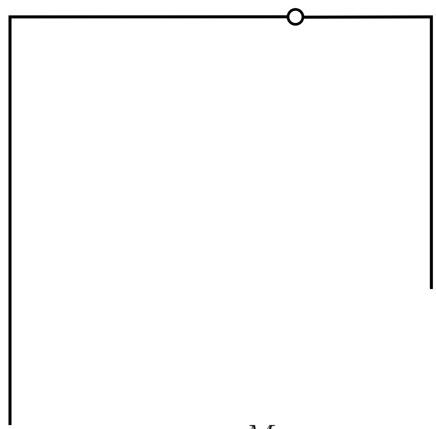
Vorlage zur 3. Aufgabe, c)



N



Q



M

Musterlösung - Aufgabe 3

a) Statische Bestimmtheit

- $a + g = 3\,n \quad \Rightarrow \quad 4 + 2 = 3 \cdot 2 \quad \checkmark$

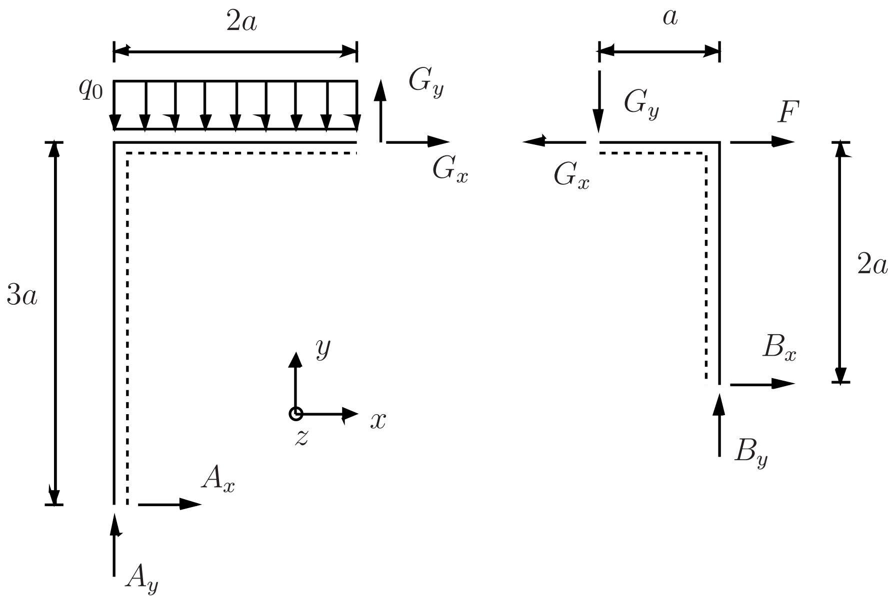
  $\rightarrow$ notwendige Bedingung

- nicht kinematisch

  $\rightarrow$ hinreichende Bedingung

$\Rightarrow$ statisch bestimmt

b) Lagerreaktionen in A und B



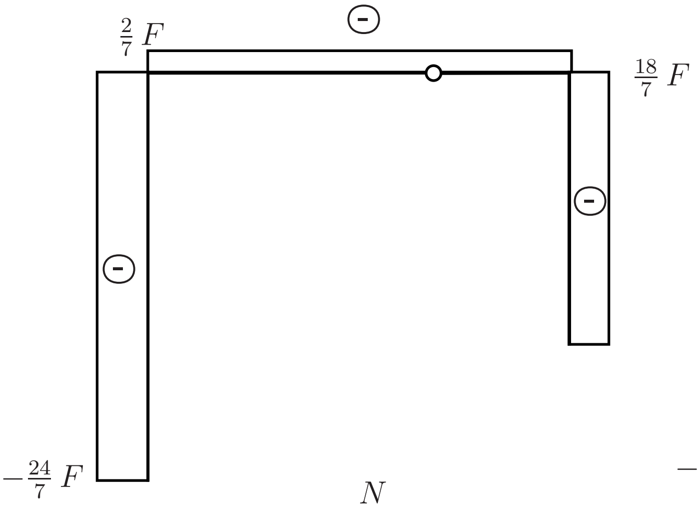
$$\begin{aligned}
&\textbf{I:} & \rightarrow \Sigma F_x = 0: &\quad A_x + G_x = 0 && (1)\\
&& \uparrow \Sigma F_y = 0: &\quad A_y - q_0 \cdot 2\,a + G_y = 0 && (2)\\
&& \circlearrowleft \Sigma M^{(G)} = 0: &\quad -A_y \cdot 2\,a + A_x \cdot 3\,a + q_0 \cdot 2\,a \cdot a = 0 && (3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\textbf{II:} & \rightarrow \Sigma F_x = 0: &\quad B_x + F - G_x = 0 && (4)\\
&& \uparrow \Sigma F_y = 0: &\quad B_y - G_y = 0 && (5)\\
&& \circlearrowleft \Sigma M^{(G)} = 0: &\quad G_y \cdot a + G_x \cdot 2\,a - F \cdot 2\,a = 0 && (6)
\end{aligned}$$

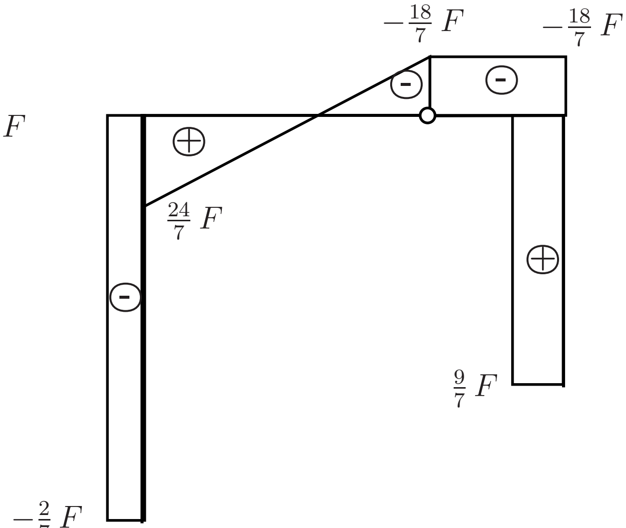
$$\begin{aligned}
\text{aus}\,(3): &\quad A_y = \frac{3}{2}\,A_x + q_0 a && (7)\\
\text{in}\,(2): &\quad \frac{3}{2}\,A_x + q_0 a - 2\,q_0 a + G_y = 0 \quad \Rightarrow \quad G_y = q_0 a - \frac{3}{2}\,A_x && (8)\\
(1): &\quad A_x = -G_x && (9)\\
(8),(9)\,\text{in}\,(6): &\quad q_0 a - \frac{3}{2}\,A_x - 2\,A_x - 2\,F = 0 && (10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{7}{2}\,A_x - 2\,F + q_0 a = 0 \\
\Rightarrow \quad & A_x = \frac{2}{7}\,(-2\,F + \underbrace{q_0 a}_{3\,F}) = \frac{2}{7}\,F && = \frac{2}{21}\,q_0 a\\
& A_y = \frac{3}{2}\,\frac{2}{7}\,F + 3\,F = \frac{24}{7}\,F && = \frac{8}{7}\,q_0 a\\
& G_x = \frac{2}{7}\,F && = \frac{2}{21}\,q_0 a\\
& B_x = G_x - F = -\frac{9}{7}\,F && = -\frac{3}{7}\,q_0 a\\
& G_y = 2\,F - 2\,G_x = \frac{18}{7}\,F && = \frac{6}{7}\,q_0 a\\
& B_y = \frac{18}{7}\,F && = \frac{6}{7}\,q_0 a
\end{aligned}$$

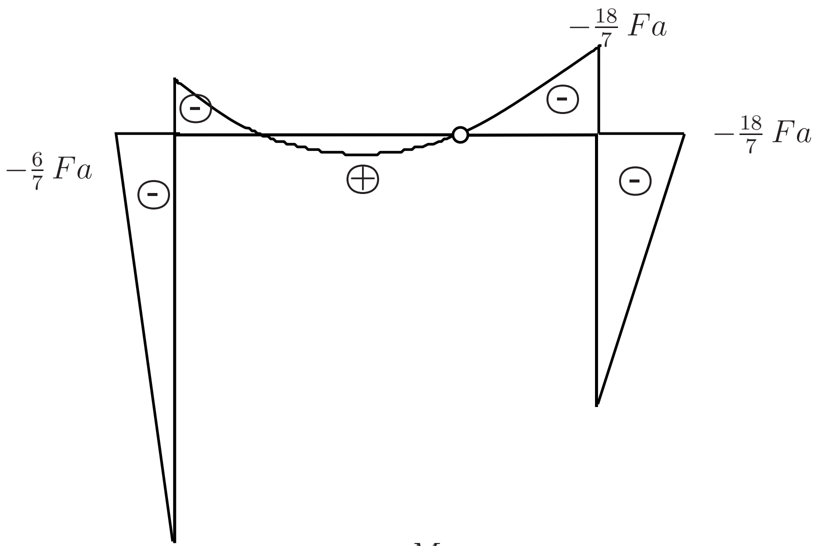
c)


$\frac{2}{7}\,F$
$\frac{18}{7}\,F$
$-\frac{24}{7}\,F$

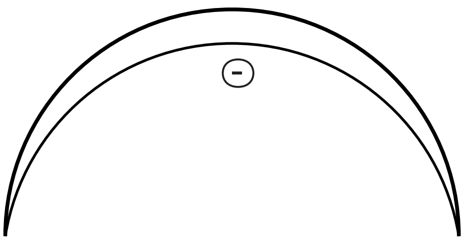
N


$-\frac{18}{7}\,F$
$-\frac{18}{7}\,F$
$\frac{24}{7}\,F$
$\frac{9}{7}\,F$
$-\frac{2}{7}\,F$

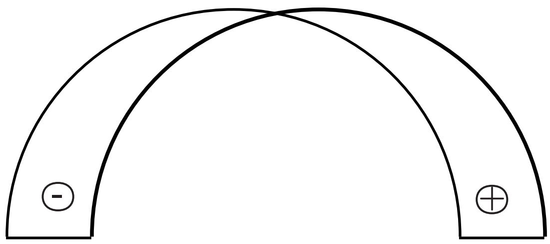
Q


$-\frac{18}{7}\,Fa$
$-\frac{18}{7}\,Fa$
$-\frac{6}{7}\,Fa$

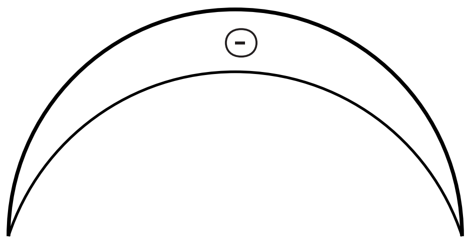
M



N



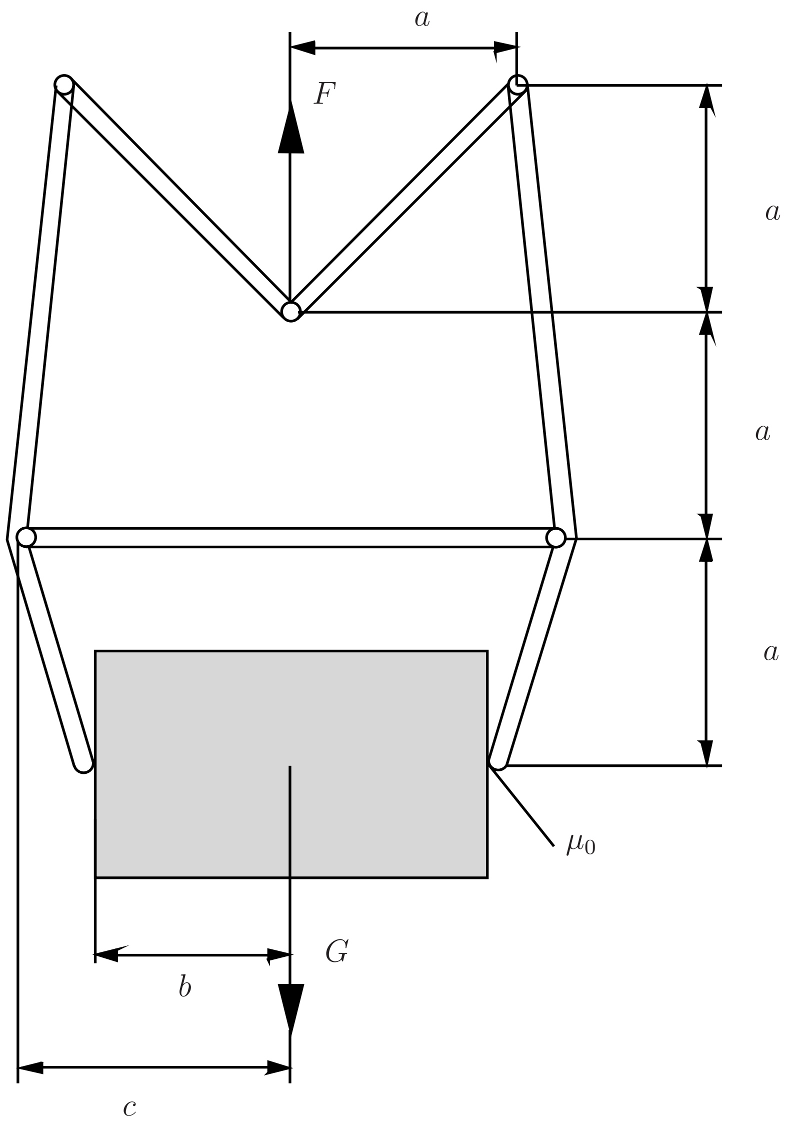
Q



d)

M

4. Aufgabe (ca. 23 % der Gesamtpunkte)



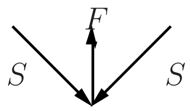
Wie groß muss bei der skizzierten Greiferzange der Haftungskoeffizient μ_0 sein, damit die Last G nicht rutscht?

Hinweis: Nutzen Sie die Symmetrie des Problems aus!

Gegeben: $a,\ b,\ c,\ F,\ G$.

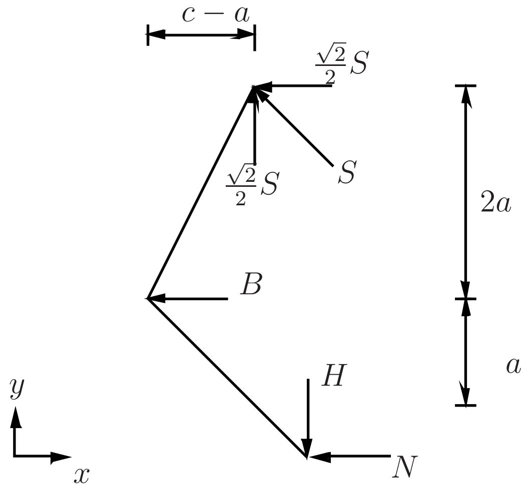
Musterlösung - Aufgabe 4

FKB 1

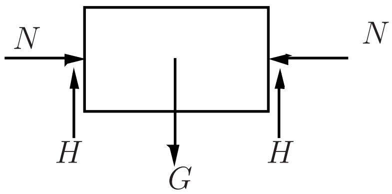


mit $\vec{S} = \frac{1}{\sqrt{2}} S \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} S \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

FKB 2



FKB 3



GGW

$$\text{FKB 1:} \quad \rightarrow \quad F = 2S\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow S = \frac{1}{\sqrt{2}}F = \frac{\sqrt{2}}{2}F \tag{11}$$

$$\text{FKB 2:} \quad \overset{\curvearrowright}{B} \quad -\frac{\sqrt{2}}{2}S\,2a - \frac{\sqrt{2}}{2}S\,(c-a) + H(c-b) + Na = 0 \tag{12}$$

$$\text{FKB 3:} \quad \uparrow \quad G = 2H \Leftrightarrow H = \frac{G}{2} \tag{13}$$

$$\text{Haftgesetz:} \quad H \leq \mu_0 N \tag{14}$$

$$\text{Gesamtsystem:} \quad \uparrow \quad F = G \tag{15}$$

(13) in (12)

$$-S\frac{\sqrt{2}}{2}2a - S\frac{\sqrt{2}}{2}(c-a) + \frac{G}{2}(c-b) + Na = 0$$

mit (11)

$$-F\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}2a - F\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}(c-a) + \frac{G}{2}(c-b) + Na = 0$$

mit (15)

$$N = \frac{G}{a}(a - \frac{a}{2} + \frac{c}{2} - \frac{c}{2} + \frac{b}{2}) = \frac{G}{2}(1 + \frac{b}{a})$$

in(14) mit (13)

$$\frac{G}{2} \leq \mu_0 \frac{G}{2}(1 + \frac{b}{a})$$

$$\Leftrightarrow \mu_0 \geq \frac{a}{1 + \frac{b}{a}} = \frac{a}{(a+b)}$$

Modulprüfung
in Technischer Mechanik
am 11. August 2015

Statik starrer Körper

Lösungen

Name: ____________________ Vorname: ____________________

Matr.-Nr.: ________________ Fachrichtung: ________________