Modulprüfung in Technischer Mechanik
am 11. August 2015

Festigkeitslehre

Aufgaben

Name: ______________________ Vorname: ______________________

Matr.-Nr.: _________________ Fachrichtung: _________________

Hinweise:

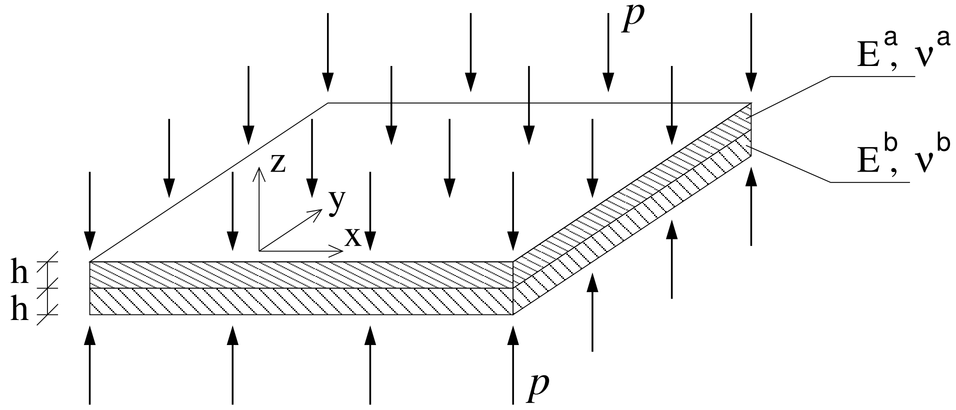
- Bitte schreiben Sie deutlich lesbar. Zeichnungen müssen sauber und übersichtlich sein. Die Benutzung roter Farbstifte ist nicht zugelassen.
- Aufgaben werden nur beurteilt, wenn sie auf den ausgegebenen Blättern gelöst sind. Eventuell abgegebene Formelsammlungen werden als nicht vorhanden betrachtet. Trennen Sie die Aufgabenblätter nicht auf.
- Bei den Aufgaben muss eindeutig der Lösungsweg erkennbar sein. Ein Ergebnis ohne Lösungsweg wird nicht bewertet. Sollten für eine Aufgabe mehrere widersprüchliche Lösungen angegeben sein, so wird keine bewertet. Streichen Sie deshalb falsche Rechenschritte oder Zeichnungen durch.

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
Punkte					

(Eintrag erfolgt durch Institut)

1. Aufgabe: (ca. 20 % der Gesamtpunkte)

Die beiden linear-elastischen Schichten a und b der Dicke h eines ebenen flächigen Verbundwerkstoffs seien fest miteinander verklebt. Es kann angenommen werden, dass in ihnen jeweils ein homogener (ortsunabhängiger) Spannungs- und Verzerrungszustand herrscht.



Das Material ist in z-Richtung durch einen ortsunabhängigen Druck p belastet, d.h. $\sigma_z^{\mathsf{a}} = \sigma_z^{\mathsf{b}} = -p$. Wegen des festen Verbundes ist $\varepsilon_x^{\mathsf{a}} = \varepsilon_x^{\mathsf{b}}$ und $\varepsilon_y^{\mathsf{a}} = \varepsilon_y^{\mathsf{b}}$.

a) Welcher Zusammenhang besteht innerhalb jeder der beiden Schichten zwischen σ_x und σ_y sowie zwischen ε_x und ε_y?

   Beachten Sie, dass weder Geometrie noch Belastung von der x- bzw. y-Richtung abhängen!

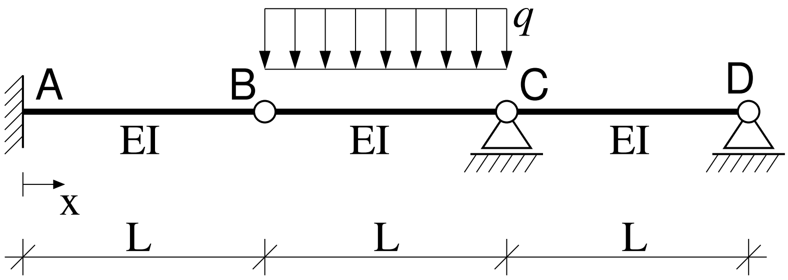
b) Welcher Zusammenhang besteht zwischen σ_x^{a} und σ_x^{b}?

   Beachten Sie, dass der Verbund in x- und y-Richtung unbelastet ist!

c) Geben sie die Spannung σ_x^{a} in Abhängigkeit von p an.

Gegeben: h, E^{a}, E^{b}, ν^{a}, ν^{b}, p.

2. Aufgabe: (ca. 24 % der Gesamtpunkte)



Bearbeiten Sie für den dargestellten Träger folgende Teilaufgaben:

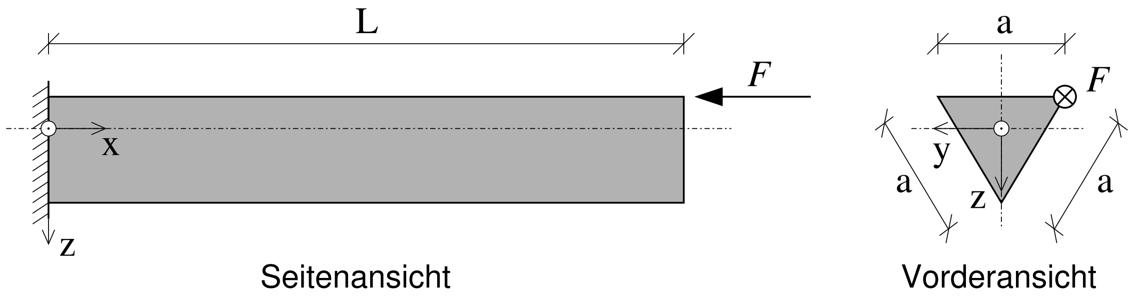
a) Geben Sie die erforderlichen Übergangsbedingungen zur Integration der Biegelinie in den Punkten B und C an.

b) Ermitteln Sie für den Bereich BC die Durchbiegung $w(x)$ durch Integration der Differentialgleichung der Biegelinie.

c) Skizzieren Sie die Biegelinie für den gesamten Träger unter Angabe der wesentlichen Werte.

Gegeben: L, q, EI.

3. Aufgabe: (ca. 28 % der Gesamtpunkte)



Der dargestellte Kragträger mit dreieckförmigem Vollquerschnitt wird wie angegeben durch eine exzentrisch angreifende Einzelkraft F belastet.

a) Ermitteln Sie die durch die Last F hervorgerufenen Schnittgrößen an den Stellen $x = \frac{L}{3}$ und $x = \frac{2L}{3}$.

b) Berechnen Sie an der Stelle $x = \frac{L}{3}$ die Normalspannung im Schwerpunkt sowie Ort und Größe der extremalen Normalspannungen im Querschnitt.

c) Skizzieren Sie in der obigen Vorderansicht die Spannungsnulllinie.

d) Wo muss ganz allgemein die Nulllinie verlaufen, wenn die Kraft F innerhalb des „Kerns des Querschnitts“ angreift?

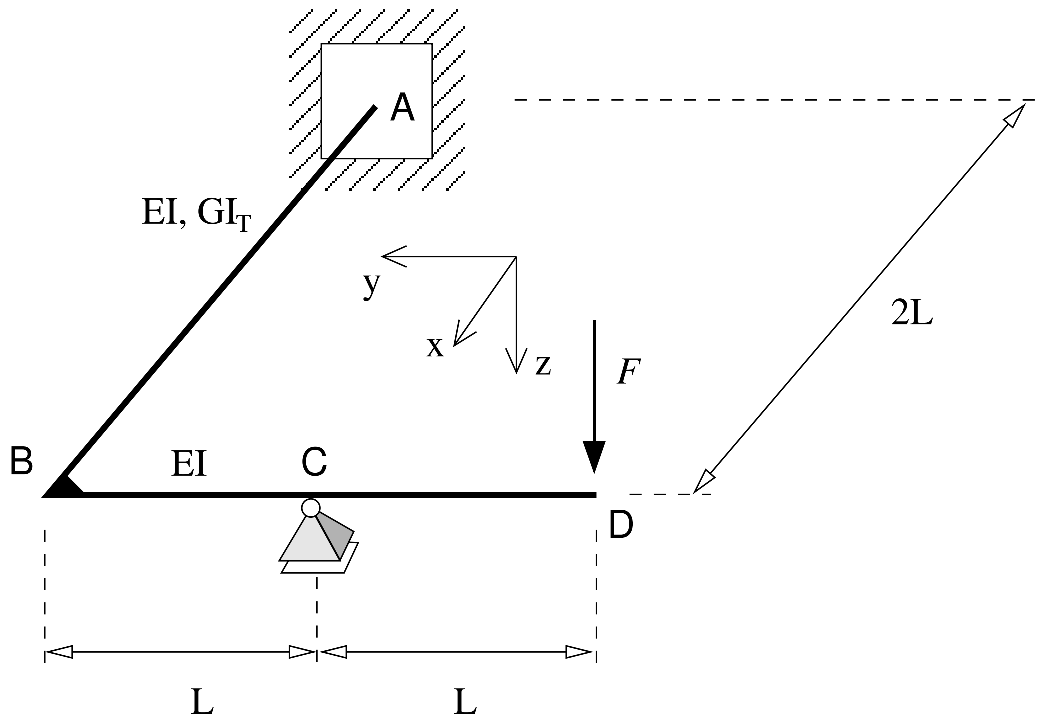
☐ durch den Schwerpunkt

☐ tangential an die Querschnittsfläche

☐ außerhalb der Querschnittsfläche

Gegeben: a, $L = 24\,a$, F, $I_y = I_z = a^4 \frac{\sqrt{3}}{96}$

4. Aufgabe: (ca. 28 % der Gesamtpunkte)

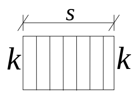
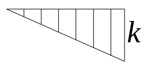
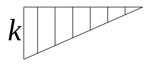
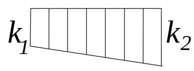
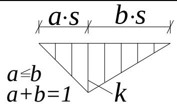
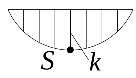
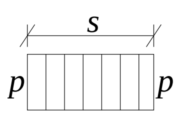
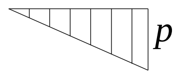
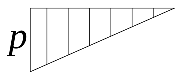
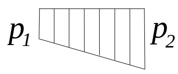
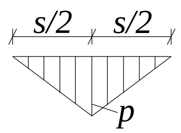
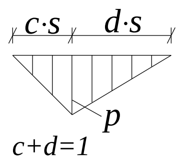
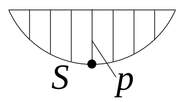
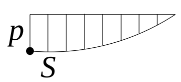
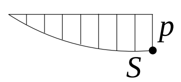
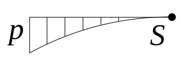
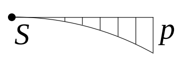


Das dargestellte räumliche Tragwerk wird im Punkt D durch eine Kraft F belastet. Bestimmen Sie die Auflagerkraft C im Punkt C sowie die Verschiebung des Punktes B in z-Richtung mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Kräfte.

Gegeben: $L, EI, GI_T = 2\,EI, F$

<u>Hinweis</u>: Die Aufgabe ist mit dem *Prinzip der virtuellen Kräfte* zu lösen. Andere Lösungswege werden nicht bewertet.

Werte der Integrale $\int_0^s P(x) \cdot K(x) \mathrm{d}x$

$K(x)$ / $P(x)$						
	pks	$\frac{1}{2}pks$	$\frac{1}{2}pks$	$\frac{p}{2}(k_1+k_2)s$	$\frac{1}{2}pks$	$\frac{2}{3}pks$
	$\frac{1}{2}pks$	$\frac{1}{3}pks$	$\frac{1}{6}pks$	$\frac{p}{6}(k_1+2k_2)s$	$\frac{1}{6}pk(1+a)s$	$\frac{1}{3}pks$
	$\frac{1}{2}pks$	$\frac{1}{6}pks$	$\frac{1}{3}pks$	$\frac{p}{6}(2k_1+k_2)s$	$\frac{1}{6}pk(1+b)s$	$\frac{1}{3}pks$
	$\frac{k}{2}(p_1+p_2)s$	$\frac{k}{6}(p_1+2p_2)s$	$\frac{k}{6}(2p_1+p_2)s$	$[\frac{p_1}{6}(2k_1+k_2) + \frac{p_2}{6}(k_1+2k_2)]s$	$[\frac{k}{6}[p_1(1+b) + p_2(1+a)]s$	$\frac{k}{3}(p_1+p_2)s$
	$\frac{1}{2}pks$	$\frac{1}{4}pks$	$\frac{1}{4}pks$	$\frac{p}{4}(k_1+k_2)s$	$\frac{pk}{12b}(3-4a^2)s$	$\frac{5}{12}pks$
	$\frac{1}{2}pks$	$\frac{pk}{6}(1+c)s$	$\frac{pk}{6}(1+d)s$	$\frac{p}{6}[k_1(1+d)+k_2(1+c)]s$	$\frac{pk}{6bc}(2c-c^2-a^2)s$ für $c \geq a$	$\frac{pk}{3}(1+cd)s$
	$\frac{2}{3}pks$	$\frac{1}{3}pks$	$\frac{1}{3}pks$	$\frac{p}{3}(k_1+k_2)s$	$\frac{pk}{3}(1+ab)s$	$\frac{8}{15}pks$
	$\frac{2}{3}pks$	$\frac{1}{4}pks$	$\frac{5}{12}pks$	$\frac{p}{12}(5k_1+3k_2)s$	$\frac{pk}{12}(5-a-a^2)s$	$\frac{7}{15}pks$
	$\frac{2}{3}pks$	$\frac{5}{12}pks$	$\frac{1}{4}pks$	$\frac{p}{12}(3k_1+5k_2)s$	$\frac{pk}{12}(5-b-b^2)s$	$\frac{7}{15}pks$
	$\frac{1}{3}pks$	$\frac{1}{12}pks$	$\frac{1}{4}pks$	$\frac{p}{12}(3k_1+k_2)s$	$\frac{pk}{12}(1+b+b^2)s$	$\frac{1}{5}pks$
	$\frac{1}{3}pks$	$\frac{1}{4}pks$	$\frac{1}{12}pks$	$\frac{p}{12}(k_1+3k_2)s$	$\frac{pk}{12}(1+a+a^2)s$	$\frac{1}{5}pks$

$S \mathrel{\hat{=}}$ Scheitel einer quadratischen Parabel

Modulprüfung
in Technischer Mechanik
am 11. August 2015

Festigkeitslehre

Lösungen

Name: ____________________ Vorname: ____________________

Matr.-Nr.: ________________ Fachrichtung: ________________

Aufgabe 1

Elastizitätsgesetz:

$$\begin{aligned} E\varepsilon_x &= \sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z) \\ \sigma\gamma_{xyz} &= \tau_{xy} \end{aligned}$$

a) Richtungs- und ortsunabhängiger Verzerrungs- bzw. Spannungszustand

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^a &= \varepsilon_y^a \qquad \sigma_x^a = \sigma_y^a \\ \varepsilon_x^b &= \varepsilon_y^b \qquad \sigma_x^b = \sigma_y^b \end{aligned}$$

b) Gleichgewicht in x- bzw. y-Richtung

$$\begin{aligned} h\sigma_x^a + h\sigma_x^b &= 0 \Rightarrow \sigma_x^a = -\sigma_x^b \\ h\sigma_y^a + h\sigma_y^b &= 0 \Rightarrow \sigma_y^a = -\sigma_y^b \end{aligned}$$

c)

$$\varepsilon = \varepsilon_x^a = \varepsilon_x^b = \varepsilon_y^a = \varepsilon_y^b$$

$$E^a\varepsilon = \sigma_x^a - \nu^a(\sigma_x^a - p) \tag{1}$$

$$E^b\varepsilon = -\sigma_x^a - \nu^b(-\sigma_x^a - p) \tag{2}$$

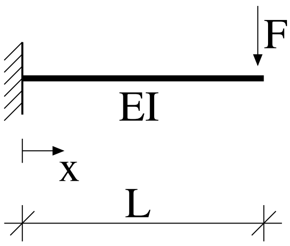
$$\begin{aligned} \text{aus (2)} \Rightarrow \varepsilon &= -\frac{\sigma_x^a}{E^b} + \nu^b\frac{\sigma_x^a}{E^b} + \frac{\nu^b p}{E^b} \\ &= \frac{-1+\nu^b}{E^b}\sigma_x^a + \frac{\nu^b p}{E^b} \\ \text{mit (1)} \Rightarrow \sigma_x^a &= \frac{E^a\varepsilon - \nu^a p}{1-\nu^a} = \frac{E^a}{1-\nu^a}\frac{-1+\nu^b}{E^b}\sigma_x^a + \frac{E^a}{E^b}\frac{\nu^b p}{1-\nu^a} - \frac{\nu^a p}{1-\nu^a} \\ &= \frac{\frac{E^a}{E^b}\frac{\nu^b p}{1-\nu^a} - \frac{\nu^a p}{1-\nu^a}}{(1 + \frac{E^a}{1-\nu^a}\frac{1-\nu^b}{E^b})} = \frac{E^a\nu^b p - E^b\nu^a p}{(1-\nu^a)E^b + (1-\nu^b)E^a} \end{aligned}$$

Aufgabe 2

a)

$$w''(x = L) = 0 \qquad w_B(x = L) = \frac{L^3}{3EI}\frac{qL}{2} = \frac{qL^4}{6EI}$$
$$w''(x = 2L) = 0 \qquad w_C(x = L) = 0$$

Hinweis:



$$w = \frac{FL^3}{3EI}$$

auswendig!

b)

$$EIw'''' = q$$
$$EIw''' = qx + C_1$$
$$EIw'' = \frac{1}{2}qx^2 + C_1x + C_2$$
$$EIw' = \frac{1}{6}qx^3 + \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3$$
$$EIw = \frac{1}{24}qx^4 + \frac{1}{6}C_1x^3 + \frac{1}{2}C_2x^2 + C_3x + C_4$$

$$M = -EIw'' = -\frac{1}{2}qx^2 - C_1x - C_2$$

$$w''(x = 2L) = 0 : -2qL^2 - 2C_1L - C_2 = 0 \tag{3}$$
$$w''(x = L) = 0 : -\frac{1}{2}qL^2 - C_1L - C_2 = 0 \tag{4}$$

$$(3) - (4) \Rightarrow -\frac{3}{2}qL^2 - C_1L = 0$$
$$C_1 = -\frac{3}{2}qL$$
$$C_2 = -\frac{1}{2}qL^2 + \frac{3}{2}qL^2 = qL^2$$

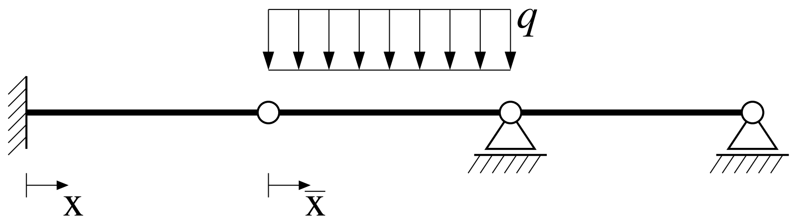
$$w(x=2L)=0: \qquad \frac{2}{3}qL^4+\frac{8L^3}{6}(-\frac{3}{2}L)+\frac{qL^2}{2}4L^2+2LC_3+C_4=0 \quad (5)$$
$$w(x=L)=\frac{qL^4}{6EI}: \quad \frac{1}{24}qL^4+\frac{1}{6}(-\frac{3}{2}qL)L^3+\frac{qL^2}{2}L+C_3L+C_4=\frac{qL^4}{6} \quad (6)$$

$$(5)-(6) \Rightarrow \frac{15}{24}qL^4-\frac{7}{4}qL^4+\frac{3}{2}qL^4+C_3L=-\frac{qL^4}{6}$$

$$C_3=\frac{qL^4}{L}(-\frac{1}{6}-\frac{15}{24}+\frac{7}{4}-\frac{3}{2})=\frac{qL^3}{24}(-4-15+42-36)=-\frac{13}{24}qL^3$$
$$C_4=\frac{qL^4}{24}(4-1+6-12+13)=\frac{5}{12}qL^4$$

$$\Rightarrow w(x)=\frac{q}{24EI}(x^4-6Lx^3+12L^2x^2-13L^3x+10L^4)$$

Alternativ:



Koordinatentransformation: $\boxed{\bar{x}=x-L}$

$$EIw''''=q$$
$$EIw'''=q\bar{x}+C_1$$
$$EIw''=\frac{1}{2}q\bar{x}^2+C_1\bar{x}+C_2=-M(\bar{x})$$

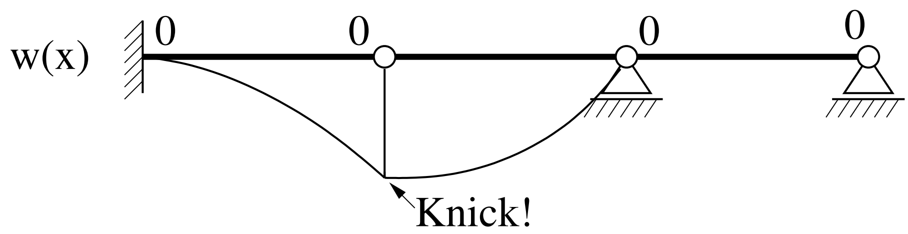
$$M(\bar{x}=0)=0 \Leftrightarrow C_2=0$$
$$M(\bar{x}=L)=-\frac{1}{2}qL^2-C_1L-0=0 \Leftrightarrow C_1=-\frac{1}{2}qL$$

$$EIw''=\frac{1}{2}q\bar{x}^2-\frac{1}{2}qL\bar{x}$$
$$EIw'=\frac{1}{6}q\bar{x}^3-\frac{1}{4}C_1\bar{x}^2+C_3$$
$$EIw=\frac{1}{24}q\bar{x}^4-\frac{1}{12}qL\bar{x}^3+C_3\bar{x}+C_4$$

$$EIw(\bar{x}=0) = \frac{qL^4}{6} \Leftrightarrow C_4 = \frac{qL^4}{6}$$
$$EIw(\bar{x}=L) = \frac{1}{24}qL^4 - \frac{1}{12}qL^4 + C_3 L + \frac{qL^4}{6} = 0 \Leftrightarrow C_3 = -\frac{1}{8}qL^3$$

$$\begin{aligned}
w(\bar{x}) =& \frac{q}{EI}(\frac{1}{24}\bar{x}^4 + \frac{1}{12}L\bar{x}^3 - \frac{1}{8}L^3\bar{x} + \frac{1}{6}L^4) \\
w(x) =& \frac{q}{EI}(\frac{1}{24}x^4 - \frac{4}{24}x^3L + \frac{6}{24}x^2L^2 - \frac{4}{24}xL^3 + \frac{1}{24}L^4 \\
& - \frac{2}{24}x^3L + \frac{6}{24}x^2L^2 - \frac{6}{24}xL^3 - \frac{2}{24}L^4 \\
& - \frac{3}{24}xL^3 + \frac{3}{24}L^4 + \frac{4}{24}L^4) \\
=& \frac{q}{24EI}(x^4 - 6Lx^3 + 12L^2x^2 - 13L^3x + 10L^4)
\end{aligned}$$

c)



Aufgabe 3

$$I_y = \frac{ah^3}{36} = \frac{a\sqrt{3}^3}{8 \cdot 36}a^3 = a^4\frac{4\sqrt{3}}{96}$$
$$\frac{I_z}{2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a(\frac{a}{2})^3}{12} = \frac{\sqrt{3}a^4}{2 \cdot 12 \cdot 8}$$
$$I_z = \frac{\sqrt{3}a^4}{96}$$

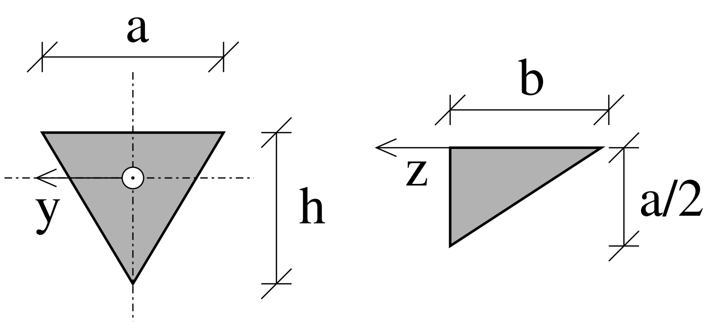


Abbildung 1: Querschnitt mit $h = b = \frac{\sqrt{3}}{2}a$

a)

$$M_y = \frac{1}{3}hF = \frac{1}{2\sqrt{3}}Fa$$
$$N = -F$$
$$M_z = -\frac{a}{2}F = -\frac{1}{2}Fa$$

$$Q_y = Q_z = 0$$
$$M_T = 0$$

b)

$$A = \frac{1}{2}a\frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

$$I_y = I_z = \frac{\sqrt{3}}{96}a^4$$
$$\sigma(y, z) = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y}z - \frac{M_z}{I_z}y$$

Schwerpunkt: $y = 0, z = 0$

$$\sigma(y=0,z=0) = \frac{N}{A} = -\frac{4F}{\sqrt{3}a^2}$$

$$\sigma_C(y=-\frac{a}{2}, z=-\frac{\sqrt{3}}{6}a) = -\frac{4}{\sqrt{3}}\frac{F}{a^2} - \frac{16F}{a^3}\frac{\sqrt{3}}{6}a - \frac{\sqrt{3}\cdot 16F}{a^3}\frac{a}{2}$$

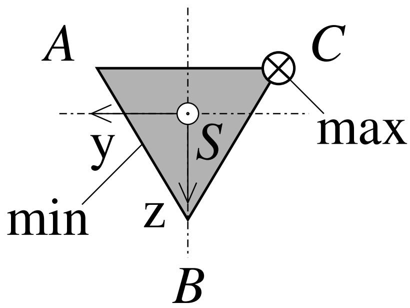
$$= \frac{F}{a^2}\sqrt{3}(-\frac{4}{3} - \frac{8}{3} - \frac{16}{2}) = -12\sqrt{3}\frac{F}{a^2}$$

$$\sigma_A(y=\frac{a}{2}, z=-\frac{\sqrt{3}}{6}a) = -\frac{4}{\sqrt{3}}\frac{F}{a^2} - \frac{16F}{a^3}\frac{\sqrt{3}}{6}a + \frac{\sqrt{3}\cdot 16F}{a^3}\frac{a}{2}$$

$$= \frac{F}{a^2}\sqrt{3}(-\frac{4}{3} - \frac{8}{3} + \frac{16}{2}) = 4\sqrt{3}\frac{F}{a^2}$$

$$\sigma_B(y=0, z=\frac{1}{\sqrt{3}}a) = -\frac{4}{\sqrt{3}}\frac{F}{a^2} + \frac{16F}{a^3}\frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{F}{a^2}\sqrt{3}(-\frac{4}{3} + \frac{16}{3}) = 4\sqrt{3}\frac{F}{a^2}$$



c)

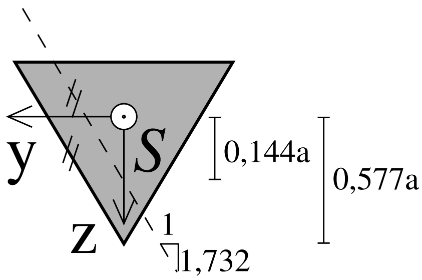
$$\sigma(y,z) = -\frac{4F}{\sqrt{3}a^2} + \frac{16F}{a^3}z + \frac{\sqrt{3}\cdot 16F}{a^3}y \overset{!}{=} 0$$

$$z = \frac{4F}{\sqrt{3}a^2}\cdot\frac{a^3}{16F} - \frac{\sqrt{3}\cdot 16F}{a^3}\cdot\frac{a^3}{16F}y$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{12}a - \sqrt{3}y$$

Hinweise zur Lage der Spannungs-NL:

- parallel zur Kante
- links von S
- im QS

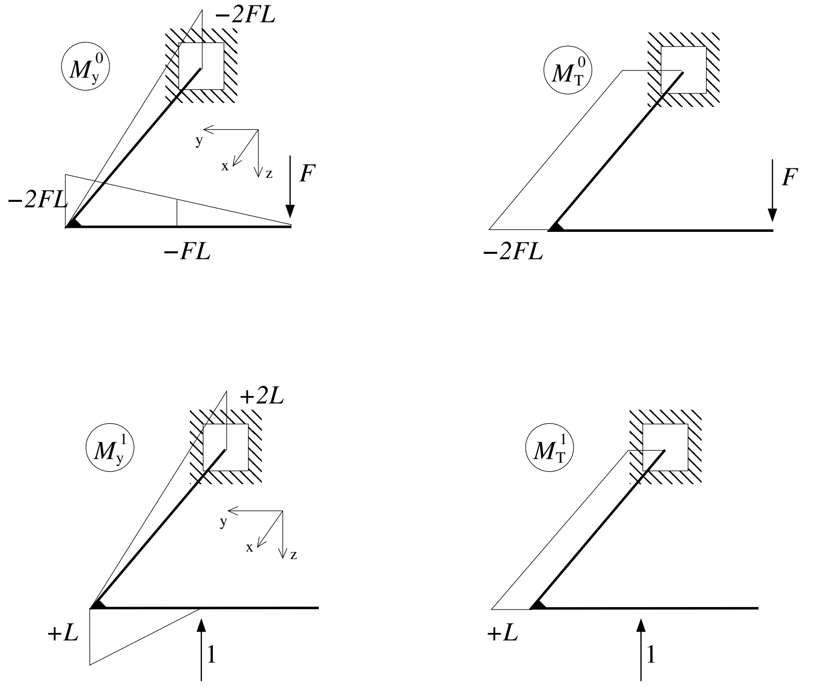


d) Die Spannungsnulllinie verläuft **außerhalb der Querschnittsfläche**, wenn die Kraft F im "Kern des Querschnitts" angreift.

Aufgabe 4

System 1-fach statisch unbestimmt $(a = 7, n = 1 : 6n \neq a)$
$\Rightarrow$ Wahl: $C_v = X_1$

<u>0-System</u> <u>1-System</u>

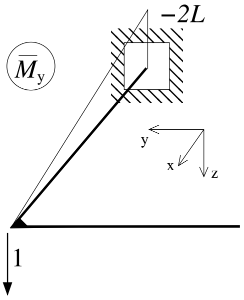


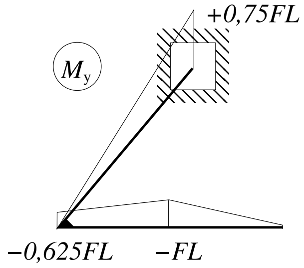
Einflusszahlen:

$$
\begin{aligned}
\alpha_{10} &= \frac{1}{EI}\left[-\frac{L}{6}(FL + 4FL)L + \frac{1}{3}(2FL(-2L)2L)\right] + \frac{1}{GI_T}L(-2FL)2L \\
&= \frac{1}{EI}\left[-\frac{5}{6}FL^3 - \frac{8}{3}FL^3 - 2FL^3\right] = -\frac{11}{2}\frac{FL^3}{EI} \\
\alpha_{11} &= \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{3}(-L)^2 L + \frac{1}{3}(-2L)^2(2L)\right] + \frac{1}{GI_T}L^2 \cdot 2L \\
&= \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{3}L^3 + \frac{8}{3}L^3 + L^3\right] = 4\frac{L^3}{EI}
\end{aligned}
$$

$$
C_v = X_1 = -\frac{\alpha_{10}}{\alpha_{11}} = \frac{11}{8}F
$$

Verschiebung in Punkt B:





$$w_B = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{3}2L(-0,75FL)2L\right] = -\frac{FL^3}{EI}$$