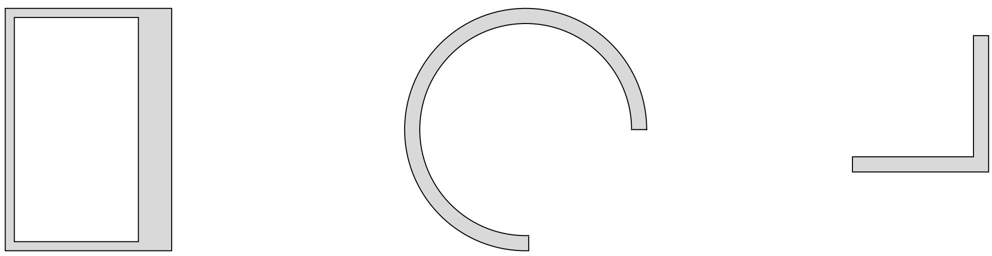
Institut für Mechanik	Prüfung in
Prof. Dr.-Ing. habil. P. Betsch	Festigkeitslehre
Prof. Dr.-Ing. habil. Th. Seelig	10. März 2015

1. Aufgabe: (ca. 16 % der Gesamtpunkte)

a) Wie viele unabhängige Spannungskomponenten gibt es in einem dreidimensionalen Körper? Wie ist der ebene Spannungszustand definiert?

b) Skizzieren Sie qualitativ die Lage des Schubmittelpunktes für folgende Querschnitte:



c) Wie wirkt sich die Querkraft auf die Durchbiegung eines Balkens aus? Welche Annahmen werden für den Bernoulli'schen Balken getroffen und was bedeutet dies für den Biegeanteil aus der Querkraft?

Musterlösung - Aufgabe 1

a) 6 unabhängige Spannungskomponenten: σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{zz}, τ_{xy}, τ_{yz}, τ_{xz}

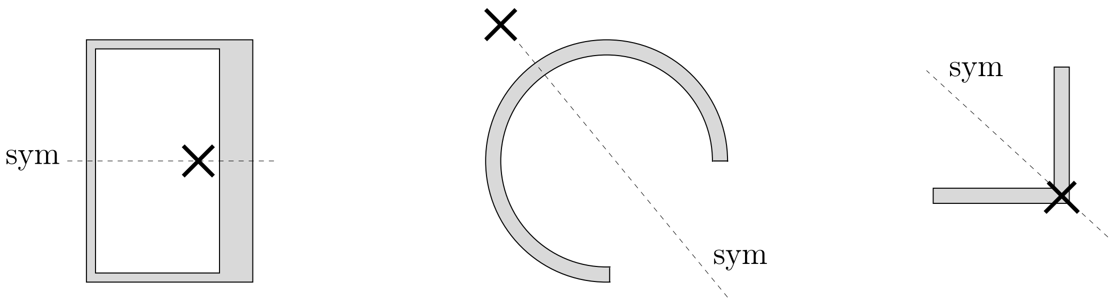
Ebener Spannungszustand:

$\sigma_n = 0$ mit $n = 1,\ 2$ oder 3

oder

$\sigma_{nx} = 0$, $\sigma_{ny} = 0$, $\sigma_{nz} = 0$ mit $n = x$, y oder z

b) Lage Schubmittelpunkt:



c) Querkraft liefert zusätzlichen Anteil

w_B: Biegung infolge Moment,

w_s Biegung infolge Querkraft

$w_{ges} = w_B + w_S$

mit $w_S = \int \frac{Q}{GA_S}$

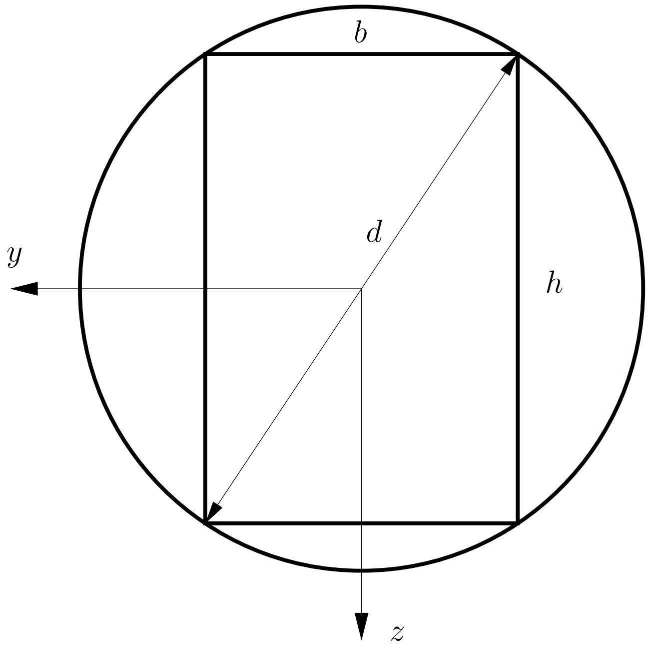
Bernoulli:

Annahme: schubstarr $GA_S \to \infty$

$\Rightarrow w' + \psi = 0$

$\Rightarrow$ Schubanteil entfällt $w_S = 0$

2. Aufgabe: (ca. 16 % der Gesamtpunkte)



Aus einem Baumstamm vom Durchmesser d soll ein Balken mit rechteckigem Querschnitt derart herausgesägt werden, dass das Flächenträgheitsmoment bezüglich der y-Achse ein Maximum annimmmt ($I_{y,max}$). Wie groß muss dann h werden und wie groß ist dann $I_{y,max}$?

Gegeben: d.

Musterlösung - Aufgabe 2

Verknüpfung von b, h und d über den Satz des Pythagoras:

$$b^2 + h^2 = d^2 \quad \rightarrow \quad b = \sqrt{d^2 - h^2}$$

Flächenträgheitsmoment für Rechteck:

$$I_y = \frac{b\,h^3}{12} = \frac{1}{12}\sqrt{d^2 - h^2}\,h^3$$

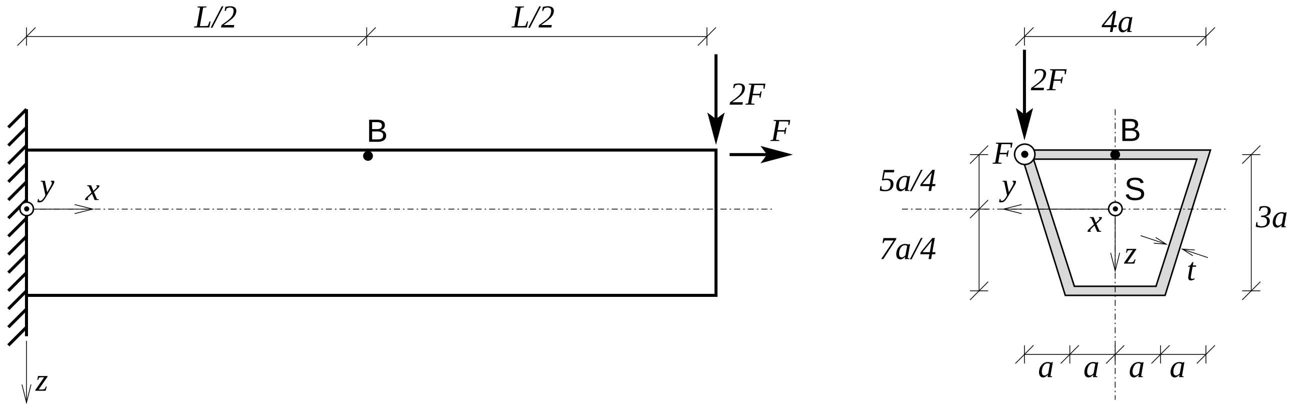
Extremalwert von $I_y(h)$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}I_y}{\mathrm{d}h} = \frac{1}{12}\left(-\frac{h^4}{\sqrt{d^2 - h^2}} + 3\,h^2\sqrt{d^2 - h^2}\right)\\ \Leftrightarrow 3\,h^2\,(d^2 - h^2) - h^4 = 0\\ \Leftrightarrow h^2\,(3\,d^2 - 4\,h^2) = 0\\ \Leftrightarrow h_1 = 0, h_{2,3} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\,d\end{aligned}$$

d.h. $h_{erf} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,d$ und

$$I_{y,max}(h_{erf}) = \frac{\sqrt{3}}{64}\,d^4 \approx 0.0271\,d^4$$

3. Aufgabe: (ca. 21 % der Gesamtpunkte)



Vorderansicht

Querschnitt

Gegeben ist der im Bild dargestellte Kragträger mit trapezförmigem Hohlkastenquerschnitt mit der Wanddicke t ($t \ll a$). Der Träger wird durch die exzentrisch angreifenden Einzellasten F und $2F$ belastet.

a) Ermitteln Sie die durch die Belastung hervorgerufenen Schnittgrößen im Kragträger.

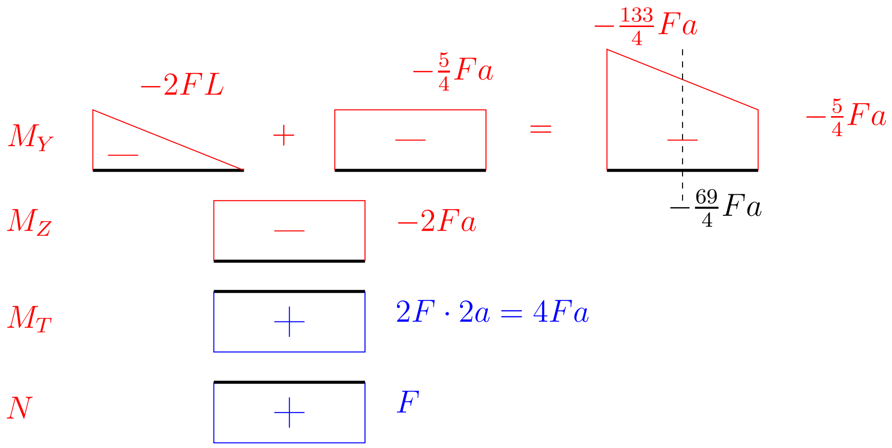
b) Berechnen Sie die Normal- und Schubspannung an Punkt B.

c) Bestimmen und skizzieren Sie die Spannungsnulllinie an der Stelle $x = L/2$.

Gegeben: a, t, $L = 16a$, $A = 12at$, $I_y = 17.25a^3t$, $I_z = 19.5a^3t$, F.

Musterlösung - Aufgabe 3

a) M_y-Verlauf, M_z-Verlauf, M_T-Verlauf, N-Verlauf



b) Normal- und Schubspannungen an Punkt B

Normalspannung

$$M_Y(x_B) = -\frac{69}{4}Fa = -17.25Fa$$

$$\sigma_B = \sigma(x_B = \frac{L}{2}, y_B = 0, z_B = -\frac{5}{4}a) = \frac{N}{A} + \frac{M_y(x_B)}{I_y} \cdot z_B - \frac{M_z(x_B)}{I_z} \cdot y_B$$

$$\sigma_B = \frac{F}{12at} + \frac{-17.25Fa}{17.25\ a^3t} \cdot (-\frac{5}{4}a) - \frac{-2Fa}{19.5\ a^3t} \cdot 0$$

$$= \frac{F}{12at} + \frac{5}{4}\frac{F}{at} + 0 = \frac{4}{3}\frac{F}{at} \approx 1.33\frac{F}{at}$$

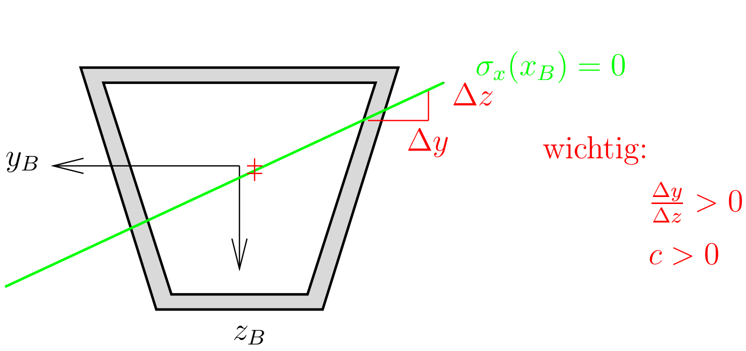
Schubspannung

$$\text{infolge Querkraft: } \tau_B^Q = 0, \quad \text{da } t \ll a$$

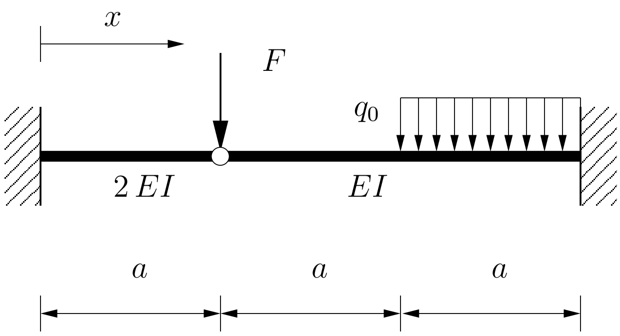
$$\text{infolge Torsion: } \tau_B^T = \frac{M_T}{2A_m t} = \frac{4Fa}{2 \cdot 3a \cdot 3a \cdot t} = \frac{2}{9}\frac{F}{at} \approx 0.22\frac{F}{at}$$

c) Nullspannungslinie

$$\sigma_B = \frac{F}{12at} - \frac{F}{a^2t} \cdot z_B + \frac{4F}{39a^2t} \cdot y_B \stackrel{!}{=} 0 \qquad \Leftrightarrow z_B = \frac{a}{12} + \frac{4}{39} \cdot y_B$$



4. Aufgabe: (ca. 19 % der Gesamtpunkte)



Das dargestellte Balkensystem ($EI = konst.$) wird durch eine konstante Streckenlast q_0 und eine Einzelast F belastet.

a) Geben Sie den Grad der statischen Unbestimmtheit an.

b) Führen Sie die Integrationen der DGL der Biegelinie für den gesamten Träger durch, so dass Sie die Biegelinie in Abhängigkeit der Integrationskonstanten und der Koordinate x erhalten.

c) Geben Sie alle erforderlichen statischen Übergangs- und Randbedingungen an.

d) Geben Sie alle erforderlichen geometrischen Übergangs- und Randbedingungen an.

Gegeben: a, q_0, EI, F.

<u>Hinweis</u>: In den Aufgabenteilen b), c) und d) müssen die Integrationskonstanten nicht bestimmt werden!

Musterlösung - Aufgabe 4

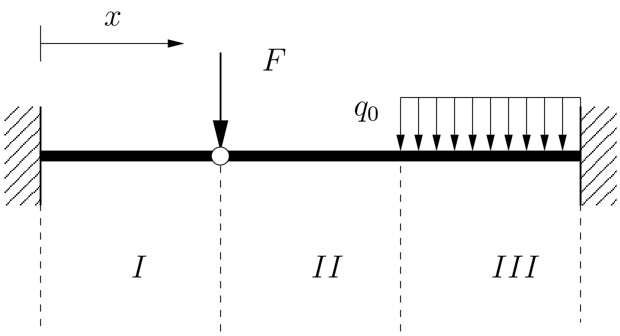
a) Geben Sie den Grad der statischen Unbestimmtheit an.

   2 Balken in Ebene $\rightarrow$ 6 FHGe
   2 Feste Einspannungen in Ebene $\rightarrow$ 6 Bindungen
   Gelenk in Ebene $\rightarrow$ 2 Bindungen

   $\Rightarrow$ 2 fach statisch unbestimmtes System

b) Führen Sie die Integrationen der DGL der Biegelinie für den gesamten Träger durch, so dass Sie die Biegelinie in Abhängigkeit der Integrationskonstanten und der Koordinate x erhalten.

   Bereiche:



I:

$$EI\,w_I'''' = 0$$
$$EI\,w_I''' = C_1$$
$$EI\,w_I'' = C_1\,x + C_2$$
$$EI\,w_I' = \frac{1}{2}\,C_1\,x^2 + C_2\,x + C_3$$
$$EI\,w_I = \frac{1}{6}\,C_1\,x^3 + \frac{1}{2}\,C_2\,x^2 + C_3\,x + C_4$$

II:

$$EI\,w_{II}'''' = 0$$
$$EI\,w_{II}''' = C_5$$
$$EI\,w_{II}'' = C_5\,x + C_6$$
$$EI\,w_{II}' = \frac{1}{2}\,C_5\,x^2 + C_6\,x + C_7$$
$$EI\,w_{II} = \frac{1}{6}\,C_5\,x^3 + \frac{1}{2}\,C_6\,x^2 + C_7\,x + C_8$$

III:

$$EI\,w_{III}'''' = q_0$$
$$EI\,w_{III}''' = q_0\,x + C_9$$
$$EI\,w_{III}'' = \frac{1}{2}\,q_0\,x^2 + C_9\,x + C_{10}$$
$$EI\,w_{III}' = \frac{1}{6}\,q_0\,x^3 + \frac{1}{2}\,C_9\,x^2 + C_{10}\,x + C_{11}$$
$$EI\,w_{III} = \frac{1}{24}\,q_0\,x^4 + \frac{1}{6}\,C_9\,x^3 + \frac{1}{2}\,C_{10}\,x^2 + C_{11}\,x + C_{12}$$

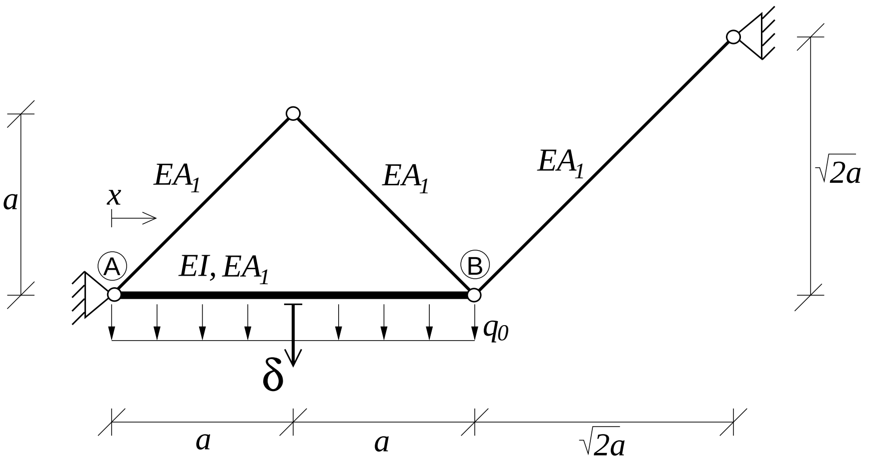
c) Geben Sie alle erforderlichen statischen Übergangs- und Randbedingungen an.

$$\begin{aligned}
-M_I(a) &= EI\,w_I''(a) = 0 \\
-M_{II}(a) &= EI\,w_{II}''(a) = 0(\text{bzw.}M_I(a) = M_{II}(a)) \\
-Q_I(a) &= -Q_{II}(a) + F = EI\,w_I'''(a) = EI\,w_{II}'''(a) + F \\
-M_{II}(2\,a) &= -M_{III}(2\,a) = EI\,w_{II}''(2\,a) = EI\,w_{III}''(2\,a) \\
-Q_{II}(2\,a) &= -Q_{III}(2\,a) = EI\,w_{II}'''(2\,a) = EI\,w_{III}'''(2\,a)
\end{aligned}$$

d) Geben Sie alle erforderlichen geometrischen Übergangs- und Randbedingungen an.

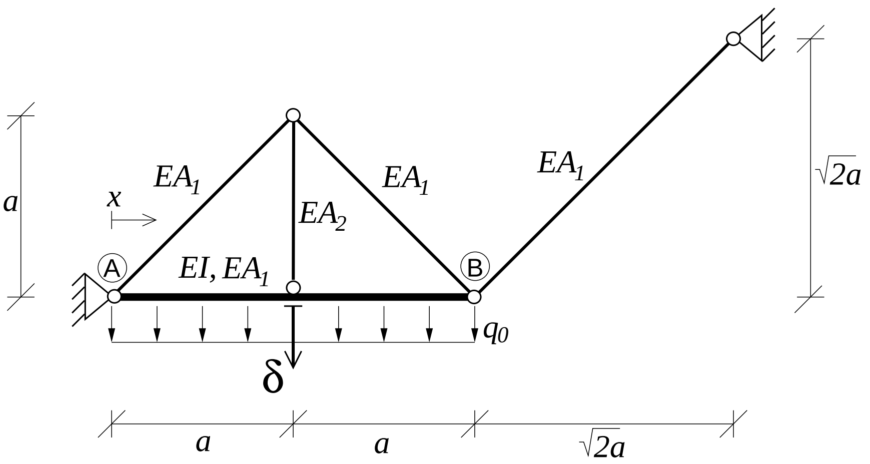
$$\begin{aligned}
w_I(0) &= 0 & w_{III}(3\,a) &= 0 \\
w_I'(0) &= 0 & w_{III}'(3\,a) &= 0 \\
w_I(a) &= w_{II}(a) & w_{II}(2\,a) &= w_{III}(2\,a) \\
w_{II}'(2\,a) &= w_{III}'(2\,a)
\end{aligned}$$

5. Aufgabe: (ca. 26 % der Gesamtpunkte)



Die dargestellte Tragkonstruktion wird durch eine konstante Streckenlast q_0 belastet.

a) Bestimmen Sie mit Hilfe des **Prinzips der virtuellen Kräfte** die vertikale Verschiebung δ.



Zur Verminderung der Verschiebung δ soll ein zusätzlicher Stab mit der Dehnsteifigkeit EA_2 in die Konstruktion eingebaut werden.

b) Kann durch diese Maßnahme die vertikale Verschiebung δ beliebig verringert werden (mit Begründung)?

Für die folgenden Aufgabenteile soll $EA_2 = EA_1/(2-\sqrt{2})$ angenommen werden.

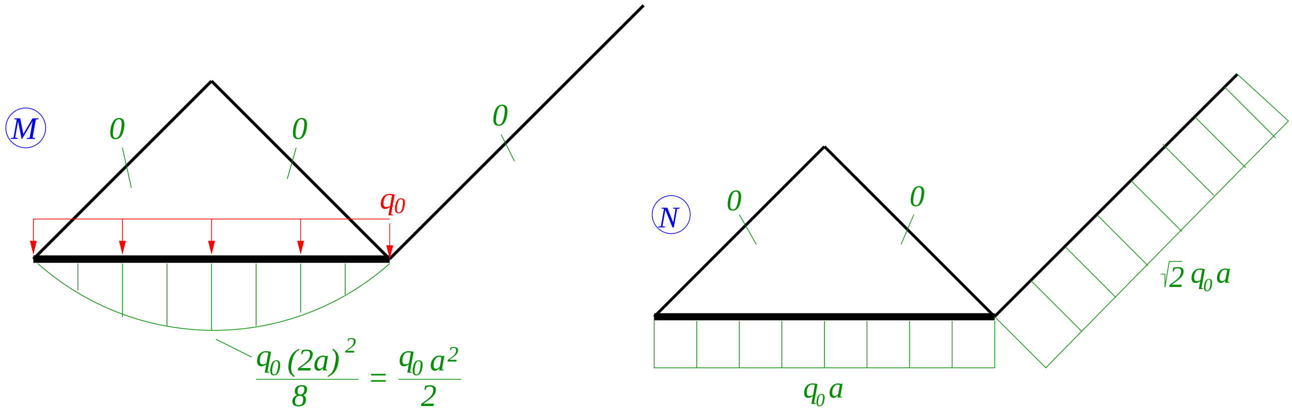
c) Berechnen Sie die Kraft in dem zusätzlichen Stab.

Gegeben: a, q_0, $EI = EA_1 a^2/6$, EA_1, EA_2.

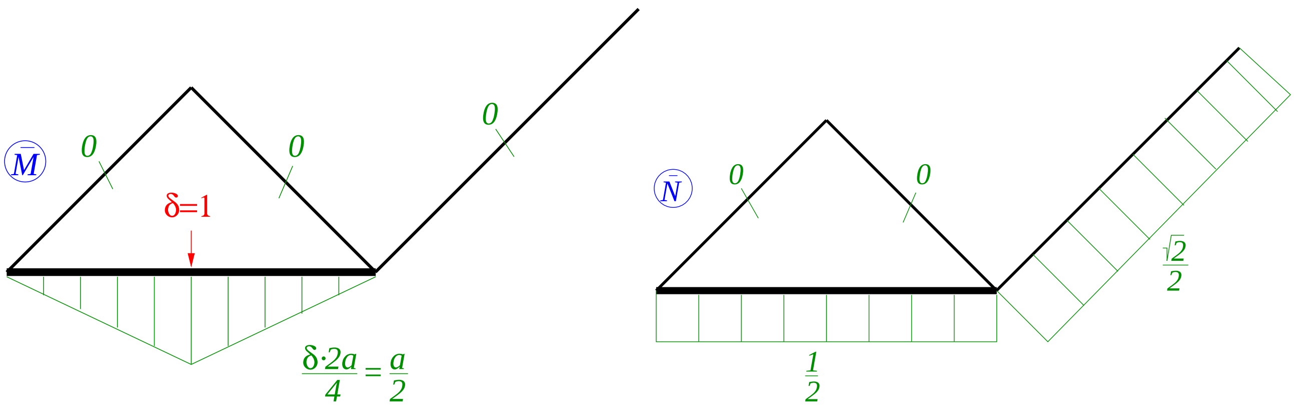
<u>Hinweis</u>: Die Aufgabe ist mit dem *Prinzip der virtuellen Kräfte* zu lösen. Andere Lösungswege werden nicht bewertet.

Musterlösung - Aufgabe 5

a) 3 FHGe, 3 Lagerbed.
$\Rightarrow$ System ist stat. best.



Schnittgrößenverläufe, System infolge äußerer Last



Schnittgrößenverläufe, System mit „1"-Last (ohne äußere Last)

Reduktionssatz:

$$
\begin{aligned}
\delta &= \int \frac{M\overline{M}}{EI}dx + \int \frac{N\overline{N}}{EA_1}dx \\
&= \frac{1}{EI}\left(\frac{5}{12}\cdot\frac{q_0a^2}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot 2a\right) + \frac{1}{EA_1}\left(q_0a\cdot\frac{1}{2}\cdot 2a + \sqrt{2}q_0a\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{2}\sqrt{2}a\right) \\
&= \frac{1}{EI}\frac{5}{24}q_0a^4 + \frac{1}{EA_1}3q_0a^2 \\
&= \frac{6}{EA_1a^2}\frac{5}{24}q_0a^4 + \frac{1}{EA_1}3q_0a^2 = \frac{17}{4}\frac{q_0a^2}{EA_1} = 4.25\frac{q_0a^2}{EA_1}
\end{aligned}
$$

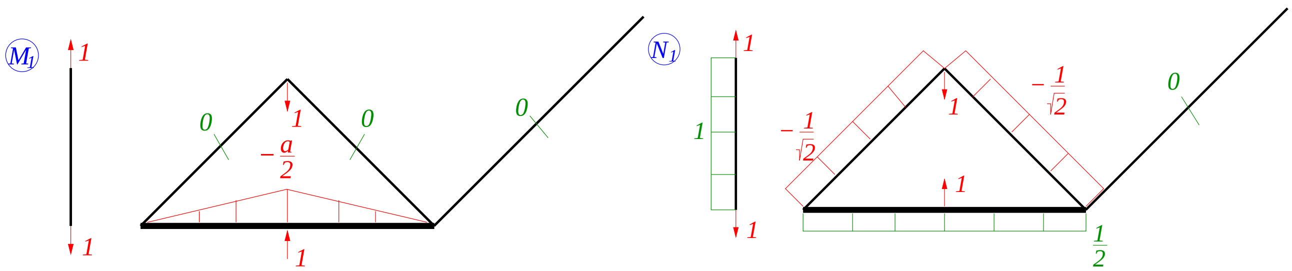
b) Nein, da

- der Stab nur die Biegung im Balken verringert, nicht aber die Absenkung im Punkt B.
- der Stab elastisch angeschlossen ist (2 Stäbe mit Dehnsteifigkeit EA_1) und somit verschieblich ist (bei Kraft $\neq 0$).

c)

$$EA_2 = \frac{EA_1}{2-\sqrt{2}}$$

M_0 und N_0 aus Teil a) (stat. best. Grundsystem ohne 1-Last)



Schnittgrößenverläufe, System mit gelöstem Stab, Stabkraft X Unbekannte

Einflusszahlen:

$$\begin{aligned}
\alpha_{10} =& \frac{1}{EI}\left[\frac{5}{12}\cdot\frac{q_0a^2}{2}\cdot\left(-\frac{a}{2}\right)\cdot 2a\right] + \frac{1}{EA_1}\left[q_0a\cdot\frac{1}{2}\cdot 2a\right]\\
=& -\frac{1}{EI}\frac{5}{24}q_0a^4 + \frac{1}{EA_1}q_0a^2 = -\frac{1}{4}\frac{q_0a^2}{EA_1}\\
\alpha_{11} =& \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{a}{2}\right)\cdot\left(-\frac{a}{2}\right)\cdot 2a\right] + \frac{1}{EA_1}\left[2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\sqrt{2}a + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2a\right]\\
&+\frac{1}{EA_2}\left[1\cdot 1\cdot a\right]\\
=& \frac{1}{EI}\frac{1}{6}a^3 + \frac{1}{EA_1}\left(\sqrt{2}+\frac{1}{2}\right)a + \frac{1}{EA_2}a\\
=& \frac{1}{EA_1}\left[a+\sqrt{2}a+\frac{1}{2}a+2a-\sqrt{2}a\right] = \frac{7}{2}\frac{a}{EA_1}
\end{aligned}$$

PdvA:

$$\alpha_{10} + X\cdot\alpha_{11} = 0$$

$$X = -\frac{\alpha_{10}}{\alpha_{11}} = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{7}q_0a = \frac{1}{14}q_0a$$