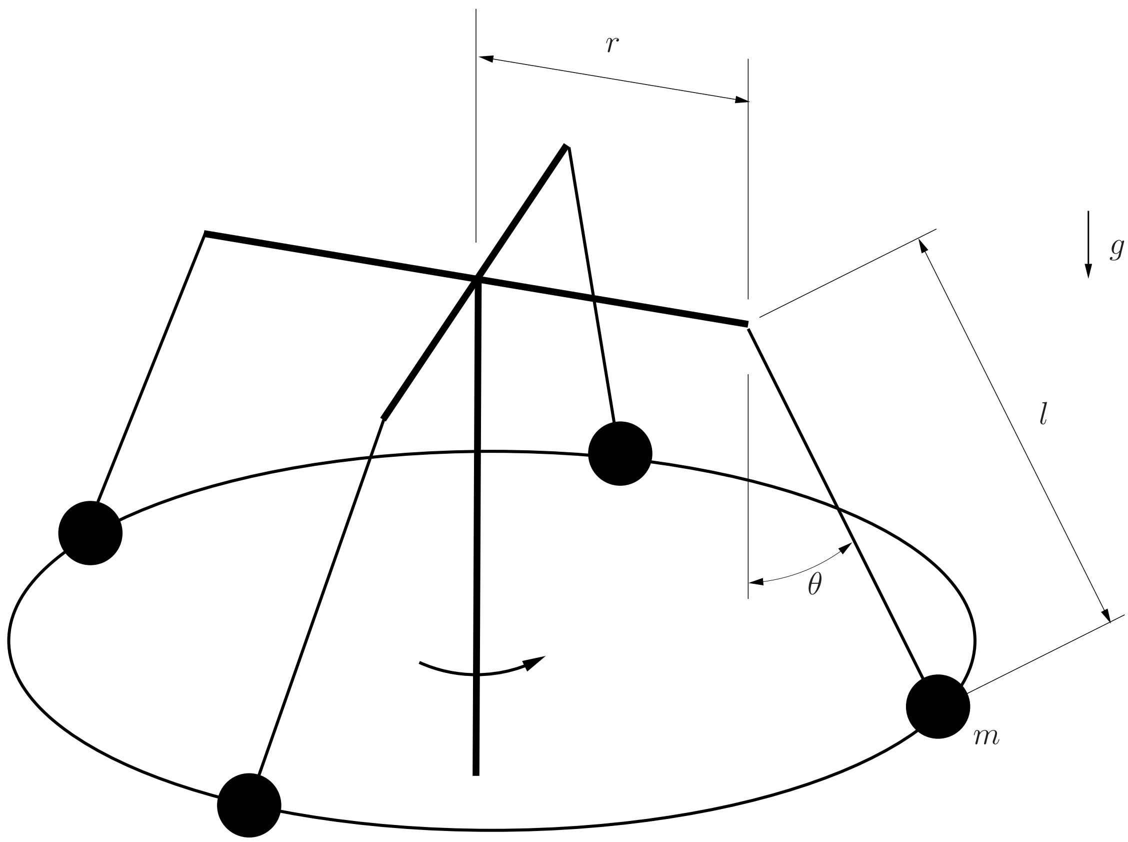
Aufgabe 1 (ca. 18 % der Gesamtpunkte)

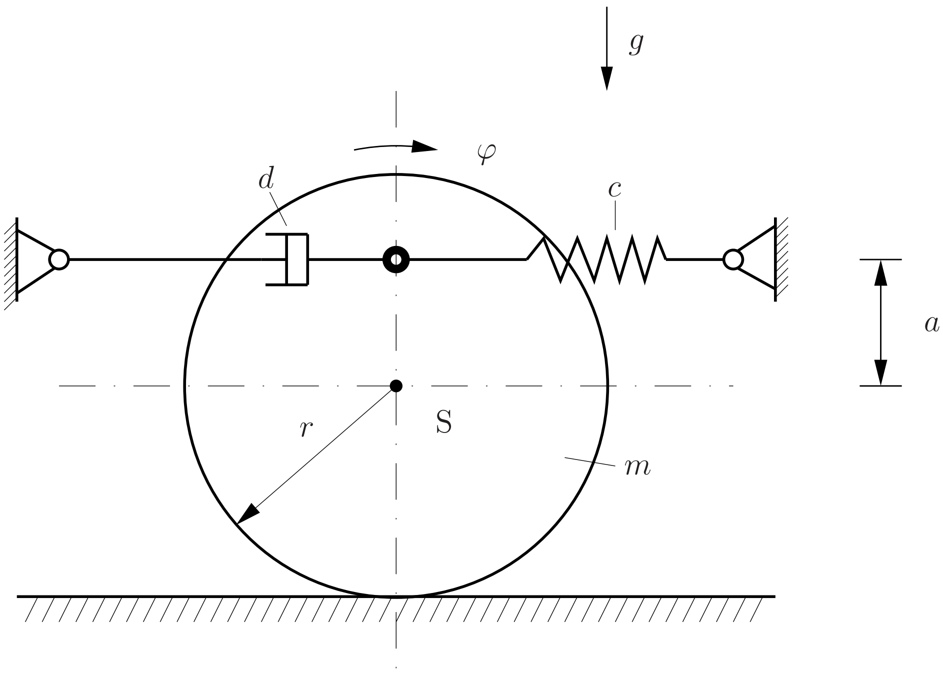


In der Abbildung ist ein rotierendes Karussell skizziert. Sitz und Fahrgast können als Massenpunkt m angesehen werden. Das Karussell rotiert mit konstanter Winkelgeschwindigkeit. Wie groß ist die Geschwindigkeit der Fahrgäste auf dem Karussell, wenn die Halteseile (Länge l) um den Winkel θ gegen die Senkrechte geneigt sind?

Gegeben: θ, m, g, r, l.

Aufgabe 2 (ca. 25 % der Gesamtpunkte)

Ein massiver Kreiszylinder rollt schlupffrei auf einer horizontalen Ebene und wird von einer Feder mit der Federkonstanten c und einem Dämpfer mit der Dämpfungskonstanten d, die im Abstand a vom Mittelpunkt angreifen, in der dargestellten Mittellage gehalten. Im abgebildeten Zustand ist die Feder entspannt.



a) Schneiden Sie das System frei und stellen Sie mit Hilfe der synthetischen Methode die Bewegungsgleichungen **für kleine Auslenkungen aus der Gleichgewichtslage** auf.

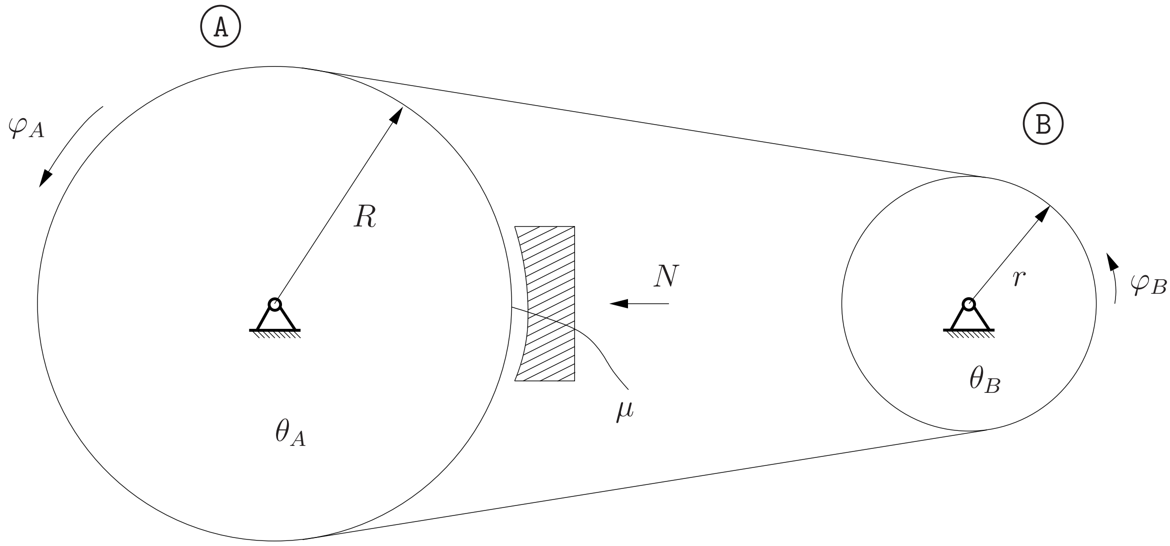
b) Berechnen Sie den Dämpfungsgrad D, die Eigenfrequenzen ω und ω_d des Systems bei kleinen Auslenkungen.

c) Wie groß muss die Dämpfungskonstante d gewählt werden, damit der aperiodische Grenzfall eintritt.

Gegeben: r, a, m, c, d, g

Aufgabe 3 (ca. 22 % der Gesamtpunkte)

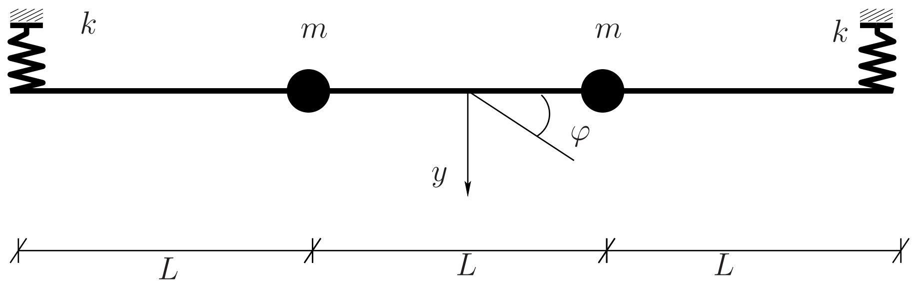
Zwei homogene Walzen A und B sind reibungsfrei gelagert und durch einen dünnen, masselosen Riemen schlupffrei miteinander verbunden. Nach dem Ausschalten des antreibenden Motors ist die Winkelgeschwindigkeit der Walze A gleich ω_0. Um die Drehung abzubremsen, wird ein Bremsklotz an der Walze A mit einer konstanten Kraft N angepresst. Der Gleitreibungskoeffizient zwischen der Walze und dem Klotz sei μ.



Bestimmen Sie wie viele Umdrehungen n die Walze A von Beginn der Bremsung zum Zeitpunkt t_0 bis zum vollständigen Anhalten vollzieht.

Geg.: $N, \mu, \theta_A, \theta_B, R, r, \dot{\varphi}_A(t_0) = \omega_0, \varphi_A(t_0) = 0$

Aufgabe 4 (ca. 35 % der Gesamtpunkte)



Ein starrer, masseloser Stab der Länge $3L$ ist an den Enden durch gleiche Federn der Steifigkeit k gelagert. Im Abstand L von außen sind am Stab die Massenpunkte m befestigt.
Durch entsprechende Maßnahmen findet keine Horizontalbewegung statt. Die Bewegung des Systems wird daher allein durch die y-Koordinate des Schwerpunktes und den Winkel φ beschrieben. Der Einfluss des Schwerefeldes ist im folgenden **nicht** zu berücksichtigen. Es kann von kleinen Auslenkungen aus der Ruhelage ausgegangen werden.

a) Berechnen Sie die kinetische Energie E_k.

b) Berechnen Sie die potentielle Energie E_p der Federn.

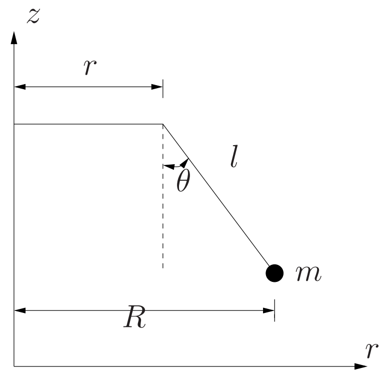
c) Ermitteln Sie mit Hilfe des Lagrangeschen Formalismus die Bewegungsgleichungen.

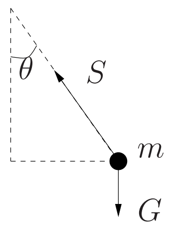
d) Wie groß sind die Eigenkreisfrequenzen?

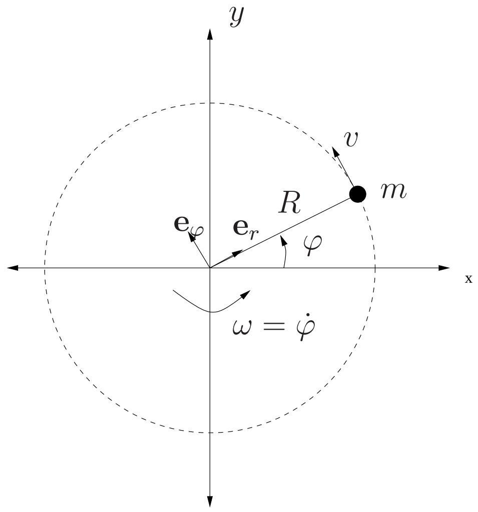
e) Skizzieren Sie die Eigenformen!

Gegeben: m, k, L

Lösung zu Aufgabe 1







$$R = r + l\sin(\theta) \qquad \mathbf{F} = m\mathbf{a} \qquad a_r = \ddot{r} - r\dot\varphi^2 \qquad a_\varphi = r\ddot\varphi + 2\dot{r}\dot\varphi$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_r \\ F_\varphi \\ F_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -S\sin(\theta) \\ 0 \\ S\cos(\theta) - G \end{bmatrix} \qquad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_r \\ a_\varphi \\ a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R\dot\varphi^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Komponentenweise:

$$-S\sin(\theta) = -mR\omega^2 \tag{1}$$

$$S\cos(\theta) - G = 0 \tag{2}$$

Aus (2):

$$S = \frac{mg}{\cos(\theta)} \tag{3}$$

(3) in (1):

$$\frac{\cancel{m}g}{\cos(\theta)}\sin(\theta) = -\cancel{m}(r + l\sin(\theta))\omega^2$$

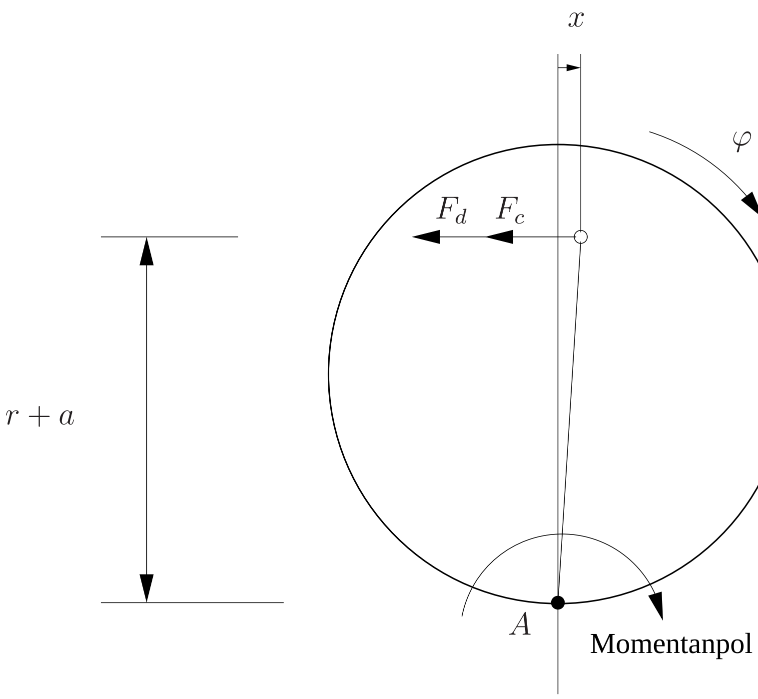
$$\omega^2 = \tan(\theta)\frac{g}{r + l\sin(\theta)}$$

$$\omega = \sqrt{\tan(\theta)\frac{g}{r + l\sin(\theta)}}$$

$$\text{mit} \quad v = \omega R = \sqrt{\tan(\theta) g (r + l\sin(\theta))}$$

Lösung zu Aufgabe 2

a) Freikörperbild:



Bewegungsgleichung (Drallsatz):

$$\theta_A\,\ddot{\varphi} = -F_d\,(r+a) - F_c\,(r+a) \tag{4}$$

Dämpfungskraft und Federkraft:

$$\begin{aligned} F_d &= d\,\dot{x} \\ F_c &= c\,x \end{aligned} \tag{5}$$

Kinematik:

$$\begin{aligned} x &= (r+a)\,\varphi \\ \dot{x} &= (r+a)\,\dot{\varphi} \end{aligned} \tag{6}$$

eingesetzt in die Bewegungsgleichung:

$$\theta_A\,\ddot{\varphi} + d\,(r+a)^2\,\dot{\varphi} + c\,(r+a)^2\,\varphi = 0 \tag{7}$$

mit

$$\theta_A = \theta_S + m\,r^2 = \tfrac{1}{2}\,m\,r^2 + m\,r^2 = \tfrac{3}{2}\,m\,r^2$$

folgt:

$$\ddot{\varphi} + \frac{d}{\frac{3}{2}\,m\,r^2}\,(r+a)^2\,\dot{\varphi} + \frac{c}{\frac{3}{2}\,m\,r^2}\,(r+a)^2\,\varphi = 0 \tag{8}$$

b) die Eigenfrequenz des ungedämpften Systems:

$$\omega_0^2 = \frac{c}{\frac{3}{2}\,m\,r^2}\,(\,r\,+\,a\,)^2 \tag{9}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2\,c}{3\,m}}\,\left(\frac{r\,+\,a}{r}\right) \tag{10}$$

der Dämpfungsgrad:

$$2\,D\,\omega_0 = \frac{d}{\frac{3}{2}\,m\,r^2}\,(\,r\,+\,a\,)^2 \tag{11}$$

$$D = \frac{d}{3\,\omega_0\,m\,r^2}\,(\,r\,+\,a\,)^2 \tag{12}$$

die Eigenfrequenz des gedämpften Systems:

$$\omega_d = \omega_0\,\sqrt{1-D^2} = \sqrt{6\,m\,r^2\,c\,-\,d^2\,(\,r\,+\,a)^2}\,\left(\frac{r\,+\,a}{3\,m\,r^2}\right) \tag{13}$$

c) Der aperiodischer Grenzfall tritt ein wenn $D\,=\,1$. Die Gleichung (12) folgt:

$$d = \frac{3\,\omega_0\,m\,r^2}{(\,r\,+\,a\,)^2} = \frac{3\,m\,r^2}{(\,r\,+\,a\,)^2}\,\sqrt{\frac{2\,c}{3\,m}}\,\left(\frac{r\,+\,a}{r}\right) = \left(\frac{r}{r+a}\right)\sqrt{6\,m\,c} \tag{14}$$

Lösung zu Aufgabe 3

Kinematik

$$\begin{aligned} \varphi_A \cdot R = \varphi_B \cdot r \Leftrightarrow \varphi_B &= \varphi_A \cdot \frac{R}{r} \\ \Rightarrow \dot{\varphi_B} &= \dot{\varphi_A} \cdot \frac{R}{r} \end{aligned}$$

Arbeitssatz ⓪ → ①

$$\begin{aligned} (E_k)_0 + W_{01} &= (E_k)_1 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}\theta_A \dot{\varphi}_{A,0}^2 + \frac{1}{2}\theta_B \dot{\varphi}_{B,0}^2 + W_{01} &= 0 \end{aligned}$$

Dissipierte Bremsenenergie

$$W_{01} = \int\limits_{x_0}^{x_1} F dx$$

$$\begin{aligned} \text{mit} \quad F &= -F_R = -\mu N \\ dx &= R \cdot d\varphi \\ \Rightarrow W_{01} &= -\int_{\varphi_{A,0}}^{\varphi_{A,1}} \mu N R d\varphi \\ &= -\mu N R \varphi_1 \end{aligned}$$

Eingesetzt in Arbeitssatz

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\theta_A \dot{\varphi}_{A,0}^2 + \frac{1}{2}\theta_B \dot{\varphi}_{B,0}^2 - \mu N R \varphi_1 &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}\theta_A \omega_0^2 + \frac{1}{2}\theta_B \omega_0^2 \frac{R^2}{r^2} - \mu N R \varphi_1 &= 0 \quad \text{(Kinematik eingesetzt)} \\ \Leftrightarrow \varphi_1 = \frac{1}{\mu N R} \cdot \frac{1}{2}(\theta_A + \frac{R^2}{r^2}\theta_B)\omega_0^2 & \\ \text{mit} \quad \varphi_1 = 2\pi n & \\ \Rightarrow n = \frac{1}{2\mu N R \cdot 2\pi} \cdot (\theta_A + \frac{R^2}{r^2}\theta_B)\omega_0^2 & \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 4

a) Kinetische Energie:

$$E_K = \frac{1}{2}(2m)\dot{y}^2 + \frac{1}{2}\theta_S\dot{\varphi}^2$$
$$\theta_S = 2m(\frac{L}{2})^2 = \frac{m}{2}L^2$$

b) Potentielle Energie:

$$E_P = \frac{1}{2}k(y + \frac{3}{2}L\varphi)^2 + \frac{1}{2}k(y - \frac{3}{2}L\varphi)^2$$

c)

$$L = E_K - E_P = m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}\theta_S\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}k(y + \frac{3}{2}L\varphi)^2 - \frac{1}{2}k(y - \frac{3}{2}L\varphi)^2$$
$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}) = 2m\ddot{y}$$
$$\frac{\partial L}{\partial y} = -k(y + \frac{3}{2}L\varphi) - k(y - \frac{3}{2}L\varphi)$$
$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}) = \theta_S\ddot{\varphi}$$
$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -k(y + \frac{3}{2}L\varphi)\frac{3}{2}L - k(y - \frac{3}{2}L\varphi)(-\frac{3}{2}L)$$

Bewegungsgleichungen:

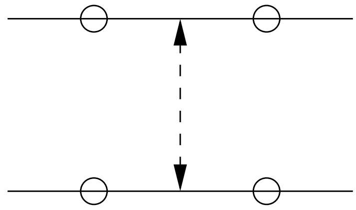
$$2m\ddot{y} + k(y + \frac{3}{2}L\varphi) + k(y - \frac{3}{2}L\varphi) = 0$$
$$\theta_S\ddot{\varphi} + k(y + \frac{3}{2}L\varphi)(\frac{3}{2}L) - k(y - \frac{3}{2}L\varphi)(\frac{3}{2}L) = 0$$

Umformen:

$$\cancel{2}m\ddot{y} + \cancel{2}ky = 0$$
$$\ddot{y} + \frac{k}{m}y = 0$$
$$\theta_S\ddot{\varphi} + \frac{9}{2}L^2k\varphi = 0$$
$$\ddot{\varphi} + \frac{9L^2k}{2\theta_S}\varphi = 0$$

d) Die Bewegungsgleichungen sind entkoppelt. Die Eigenkreisfrequenzen sind einfach:

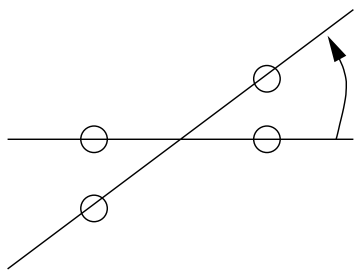
$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \omega_2 = 3L\sqrt{\frac{k}{2\theta_S}} = 3L\sqrt{\frac{k}{mL^2}} = 3\sqrt{\frac{k}{m}}$$

e) 

$$1EF$$

$$\varphi \equiv 0$$

$$\omega_1^2 = \frac{k}{m}$$



$$2EF$$

$$y \equiv 0$$

$$\omega_2^2 = 9\frac{k}{m}$$