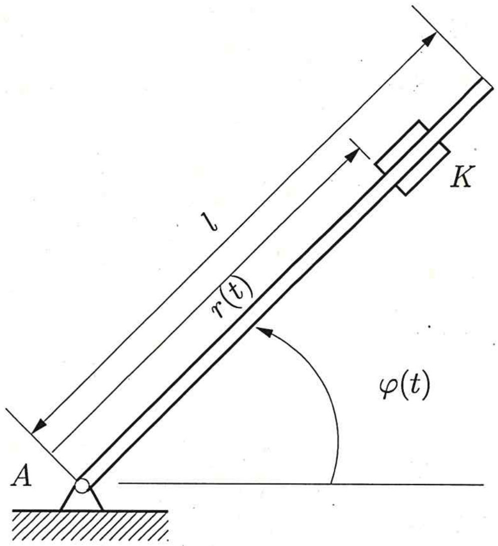
Institut für Mechanik Prof. Dr.-Ing. habil. P. Betsch Prof. Dr.-Ing. habil. Th. Seelig	Prüfung in Dynamik 12. März 2014

1. Aufgabe: (ca. 20 % der Gesamtpunkte)



Eine Stange der Länge l rotiert gemäß dem Zeitgesetz $\varphi(t) = \lambda\, t^2$ um den Punkt A. Auf der Stange bewegt sich ein Punkt K gemäß dem Gesetz $r(t) = l\,(1 - \lambda\, t^2)$.

a) Bestimmen Sie den Geschwindigkeitvektor und den Beschleunigungsvektor des Punktes K für $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

b) Bei welchem Winkel φ_E stößt der Punkt K am Lager A an ?

Gegeben: l, λ.

A1: a) Zeit t_1 für die Lage $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$:

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{4} = \lambda t_1^2 \quad \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{\pi}{4\lambda}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}$$

Aus den Zeitgesetzen folgt:

$$r = l(1-\lambda t^2), \quad \dot r = l(-2\lambda t), \quad \ddot r = -2\lambda l$$

$$\varphi = \lambda t^2, \quad \dot\varphi = 2\lambda t, \quad \ddot\varphi = 2\lambda$$

Mit $t = t_1$ ergeben sich in Polarkoordinaten

$$v_r = \dot r = -2\lambda l\, t_1 = -2\lambda l \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} = -l\sqrt{\pi\lambda}$$

$$v_\varphi = r\dot\varphi = l(1-\lambda t_1^2)2\lambda t_1 = l\left(1-\lambda\frac{\pi}{4\lambda}\right)2\lambda\sqrt{\frac{\pi}{4\lambda}}$$

$$v_\varphi = l\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\sqrt{\pi\lambda}$$

der Geschwindigkeitsvektor: $\underline{v} = \begin{bmatrix} v_r \\ v_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l\sqrt{\pi\lambda} \\ l(1-\frac{\pi}{4})\sqrt{\pi\lambda} \end{bmatrix}$

$$a_r = \ddot r - r\dot\varphi^2 = -2\lambda l - l(1-\lambda t_1^2)4\lambda^2 t_1^2$$

$$= -2\lambda l - l\left(1-\lambda\frac{\pi}{4\lambda}\right)4\lambda^2\frac{\pi}{4\lambda} = -2\lambda l - l\left(1-\frac{\pi}{4}\right)\lambda\pi$$

$$= -2\lambda l - l\lambda\pi + l\lambda\frac{\pi^2}{4}$$

$$a_\varphi = 2\dot r\dot\varphi + r\ddot\varphi = 2(-2l\lambda t_1)2\lambda t_1 + l(1-\lambda t_1^2)2\lambda$$

$$= -8l\lambda^2 t_1^2 + 2l\lambda(1-\lambda t_1^2)$$

$$= -8l\lambda^2\frac{\pi}{4\lambda} + 2l\lambda\left(1-\lambda\frac{\pi}{4\lambda}\right) = -2l\lambda\pi + 2l\lambda\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= -2l\lambda\pi + 2l\lambda - l\lambda\frac{\pi}{2} = -\frac{5}{2}l\lambda\pi + 2l\lambda$$

der Beschleunigungsvektor:

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_r \\ a_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\lambda l - l\lambda\pi + l\lambda\frac{\pi^2}{4} \\ -\frac{5}{2}l\lambda\pi + 2l\lambda \end{bmatrix}$$

b) Bei $r = 0$ stößt der Körper K an Lager A.

$$r = 0 = l(1 - \lambda t_E^2)$$

$$\Rightarrow \quad 1 - \lambda t_E^2 = 0 \qquad t_E = \sqrt{\frac{1}{\lambda}}$$

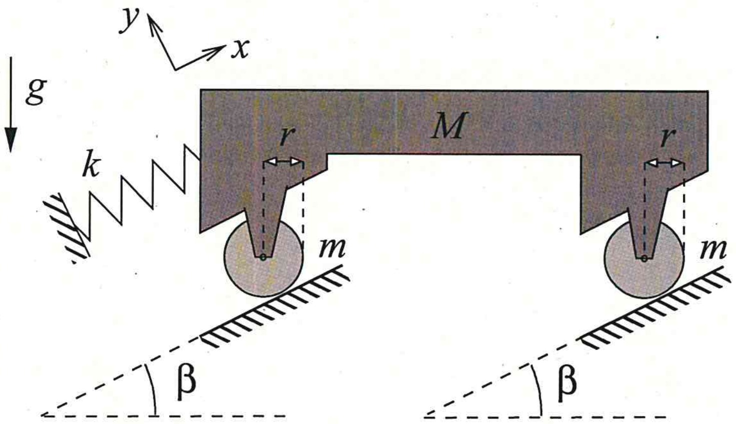
Aus den gegebenen Zeitgesetz $\varphi = \lambda t^2$

ergibt sich der Winkel $\varphi_E = \lambda t_E^2$

$$\varphi_E = \lambda \frac{1}{\lambda} = 1$$

$$\varphi_E = 1 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 57.3^\circ$$

2. Aufgabe: (ca. 32 % der Gesamtpunkte)



Das abgebildete Fahrzeug der Masse M bewegt sich auf zwei zylindrischen Walzen (jeweils mit der Masse m und dem Radius r), die auf einer um β geneigten Ebene rollen. Eine ebenfalls um β geneigte Feder der Steifigkeit k sichert das Fahrzeug.

a) Schneiden Sie sämtliche starre Körper des Systems frei und zerlegen Sie alle Kräfte bezüglich des gegebenen x-y-Koordinatensystems.

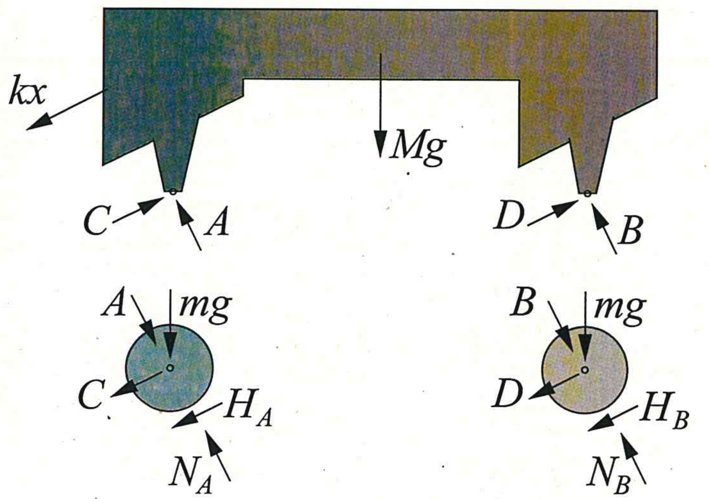
b) Stellen Sie in der Koordinate x die Bewegungsgleichung des Fahrzeugs unter Verwendung der synthetischen Methode auf.

c) Bestimmen Sie die zeitliche Bewegung $x(t)$ des Fahrzeugs für den Fall, dass zum Zeitpunkt $t = 0$ die Feder entspannt und das Fahrzeug in Ruhe ist.

Gegeben: M, $m = M/3$, k, r, $0 \leq \beta < 90°$, g

Aufgabe 2

a) vollständiger Freischnitt des Systems und Zerlegung der Kräfte in x-y-Richtung:



Komponentenzerlegung der Gewichtskräfte:

$$
\begin{aligned}
G_x^{\text{Fahrzeug}} &= -Mg \cdot \sin\beta \\
G_y^{\text{Fahrzeug}} &= -Mg \cdot \cos\beta \\
G_x^{\text{Walze links}} &= G_x^{\text{Walze rechts}} = -mg \cdot \sin\beta \\
G_y^{\text{Walze links}} &= G_y^{\text{Walze rechts}} = -mg \cdot \cos\beta
\end{aligned}
$$

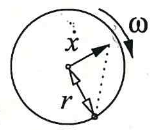
Alle anderen Kräfte sind bereits in x- bzw. y-Richtung freigeschnitten.

b) Aufstellen der Bewegungsgleichung

Massenträgheitsmoment einer Walze:

$$J^{\mathrm{S}} = \frac{1}{2}mr^2$$

Bindungsgleichung:



$$\omega = \frac{\dot{x}}{r}$$

Betrachtung der linken Walze:

$$\sum M = J^{\mathrm{S}}\dot{\omega}: \quad H_A r = \frac{1}{2}mr^2\frac{\ddot{x}}{r} \quad \Leftrightarrow \quad H_A = \frac{1}{2}m\ddot{x}$$

$$\sum F_{ix} = m\ddot{x}: \quad -C - H_A - mg \cdot \sin\beta = m\ddot{x} \quad \Leftrightarrow \quad C = -\frac{3}{2}m\ddot{x} - mg \cdot \sin\beta$$

Betrachtung der rechten Walze:

$$\sum M = J^{\mathrm{S}}\dot{\omega}: \quad H_B r = \frac{1}{2}mr^2\frac{\ddot{x}}{r} \quad \Leftrightarrow \quad H_B = \frac{1}{2}m\ddot{x}$$

$$\sum F_{ix} = m\ddot{x}: \quad -D - H_B - mg \cdot \sin\beta = m\ddot{x} \quad \Leftrightarrow \quad D = -\frac{3}{2}m\ddot{x} - mg \cdot \sin\beta$$

Betrachtung am Fahrzeug:

$$\begin{aligned}\sum F_{ix} &= M\ddot{x}: \quad C + D - kx - Mg\cdot\sin\beta = M\ddot{x}\\ \Leftrightarrow &\quad (3m+M)\ddot{x} + kx = -(M+2m)g\cdot\sin\beta\\ \Leftrightarrow &\quad \underline{2M\ddot{x} + kx = -\frac{5}{3}Mg\cdot\sin\beta}\end{aligned}$$

c) Aufstellen der Bewegung $x(t)$

Ansatz für ungedämpfte Schwingung:

$$x(t) = x(t)^{\text{hom}} + x(t)^{\text{part}} = \tilde{A}\cos(\tilde{\omega}t) + \tilde{B}\sin(\tilde{\omega}t) + \tilde{C}$$

mit Partikulärlösung:

$$x(t)^{\text{part}} = \tilde{C}, \quad \ddot{x}(t)^{\text{part}} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{C} = -\frac{5}{3}\frac{Mg}{k}\cdot\sin\beta$$

$$\begin{aligned}x(t) &= \tilde{A}\cos(\tilde{\omega}t) + \tilde{B}\sin(\tilde{\omega}t) - \frac{5}{3}\frac{Mg}{k}\cdot\sin\beta\\ \dot{x}(t) &= -\tilde{A}\tilde{\omega}\sin(\tilde{\omega}t) + \tilde{B}\tilde{\omega}\cos(\tilde{\omega}t)\\ \ddot{x}(t) &= -\tilde{A}\tilde{\omega}^2\cos(\tilde{\omega}t) - \tilde{B}\tilde{\omega}^2\sin(\tilde{\omega}t)\end{aligned}$$

Einsetzen der Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t=0) &= 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{B} = 0\\ x(t=0) &= 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{A} = \frac{5}{3}\frac{Mg}{k}\cdot\sin\beta\end{aligned}$$

$$x(t) = \underline{\frac{5}{3}\frac{Mg}{k}\sin\beta\cos(\tilde{\omega}t) - \frac{5}{3}\frac{Mg}{k}\sin\beta} \quad \text{mit } \tilde{\omega}^2 = \frac{k}{2M}$$

<u>alternativ:</u>

Für die stat. Ruhelage x_0 gilt: $\ddot{x} = 0$

$$x_0 = -\frac{5}{3}\frac{Mg}{k}\cdot\sin\beta$$

allgemeiner Ansatz für Schwingung um die Ruhelage:

$$\begin{aligned}\bar{x}(t) &= \tilde{A}\cos(\tilde{\omega}t) + \tilde{B}\sin(\tilde{\omega}t)\\ \dot{\bar{x}}(t) &= -\tilde{A}\tilde{\omega}\sin(\tilde{\omega}t) + \tilde{B}\tilde{\omega}\cos(\tilde{\omega}t)\\ \ddot{\bar{x}}(t) &= -\tilde{A}\tilde{\omega}^2\cos(\tilde{\omega}t) - \tilde{B}\tilde{\omega}^2\sin(\tilde{\omega}t)\end{aligned}$$

Einsetzen der Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}(t=0) &= 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{B} = 0\\ \bar{x}(t=0) &= x(t=0) - x_0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{A} = \frac{5}{3}\frac{Mg}{k}\cdot\sin\beta\end{aligned}$$

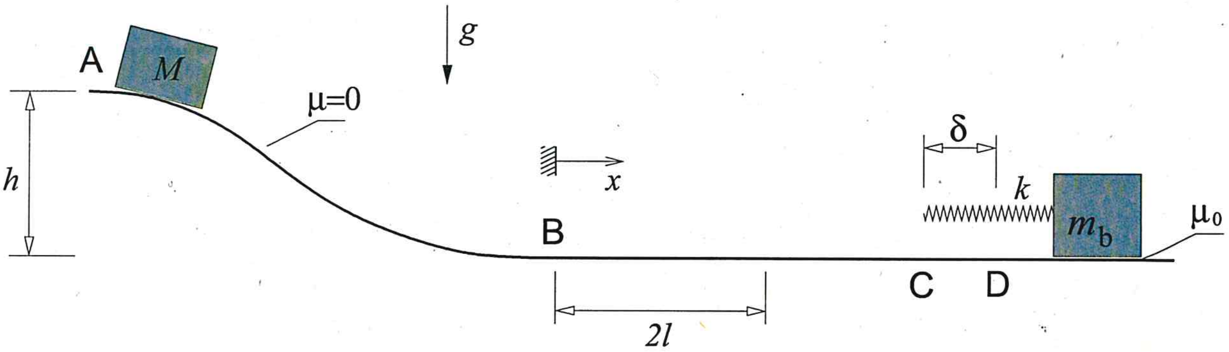
Schwingung um die Ruhelage:

$$\bar{x}(t) = \frac{5}{3}\frac{Mg}{k}\sin\beta\cos(\tilde{\omega}t)$$

Schwingung mit Koordinate x:

$$x(t) = \bar{x}(t) + x_0 = \underline{\frac{5}{3}\frac{Mg}{k}\sin\beta\cos(\tilde{\omega}t) - \frac{5}{3}\frac{Mg}{k}\sin\beta} \quad \text{mit } \tilde{\omega}^2 = \frac{k}{2M}$$

3. Aufgabe: (ca. 20 % der Gesamtpunkte)



Zum Rangieren von Eisenbahnwagen wird ein Ablaufberg eingesetzt. Ein Wagen der Masse M hat in Punkt A die Anfangsgeschwindigkeit v_A. Er fährt den Berg der Höhe h hinunter und wird dann auf einer Strecke $2l$ (gemessen ab Punkt B) mit einer Kraft

$$\vec{F}(x) = -\frac{3\ Mg}{64\ h^2}\ x^2\ \vec{e}_x, \quad 0 \leq x \leq 2l$$

abgebremst. In Punkt C fährt der Wagen auf die abgebildete Bremsvorrichtung. Diese besteht aus einer Feder und einem Bremsklotz, der mit μ_0 am Untergrund haftet.

a) Berechnen Sie mit Hilfe des Arbeitssatzes die Anfangsgeschwindigkeit v_A, sodass der Wagen in Punkt C die Geschwindigkeit $v_C = \sqrt{gh}$ hat.

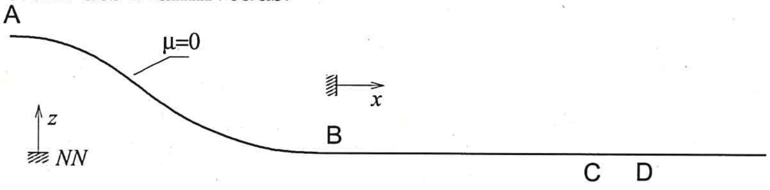
b) Welche Länge δ muss der Federweg mindestens haben, damit der Bremsklotz der Masse m_b nicht gleitet? Wie groß ist für diesen Fall die Federsteifigkeit k? Stellen Sie zuerst das Gleichgewicht für den Bremsklotz auf und setzen Sie darin die Bedingung ein, dass die kinetische Energie vollständig in die Verformung der Feder übergeht.

Hinweis: Der als Massenpunkt anzusehende Wagen bewegt sich zwischen A und D ohne Reibung.

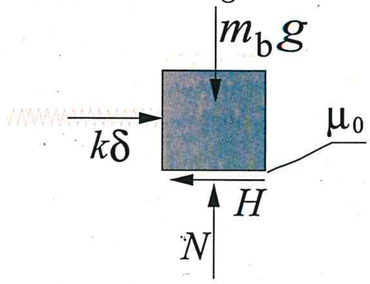
Gegeben: h, $l = 2h$, M, $m_b = 2M$, v_C, g, μ_0

Aufgabe 3

Wahl des Nullniveaus:



Freischnitt der Bremsvorrichtung:



a) Bestimmung der Geschwindigkeit in Punkt A:

Energie in Punkt C:

$$T_C = \frac{1}{2}Mv_C^2 = \frac{1}{2}Mgh, \qquad V_C = 0$$

Arbeit der Nichtpotentialkraft:

$$W|_0^{2l} = \int_0^{2l} -\frac{3}{64}\frac{Mg}{h^2}x^2\mathrm{d}x = \left[-\frac{3}{64}\frac{Mg}{h^2}\frac{x^3}{3}\right]_0^{4h} = -Mgh$$

Energie in Punkt A:

$$T_A = \frac{1}{2}Mv_A^2, \qquad V_A = Mgh$$

Energiebilanz:

$$T_A + V_A + W|_0^{2l} = T_C + V_C$$

$$\Leftrightarrow \quad T_A = T_C + V_C - V_A - W|_0^{2l}$$

$$\Leftrightarrow \quad v_A = \sqrt{\frac{2}{M}\left(T_C + V_C - V_A - W|_0^{2l}\right)} = \sqrt{\frac{2}{M}\left(\frac{1}{2}+0-1+1\right)Mgh} = \underline{\sqrt{gh}}$$

b) Gleichgewicht am Bremsklotz:

$$k\delta \leq H = \mu_0 m_b g = \mu_0 2Mg$$

Energiebilanz (kin. Energie geht komplett in Federenergie über):

$$T_C = V_{\text{Feder}} \quad \Leftrightarrow \quad T_C = \frac{1}{2}k\delta^2 \quad \Leftrightarrow \quad k\delta^2 = Mgh$$

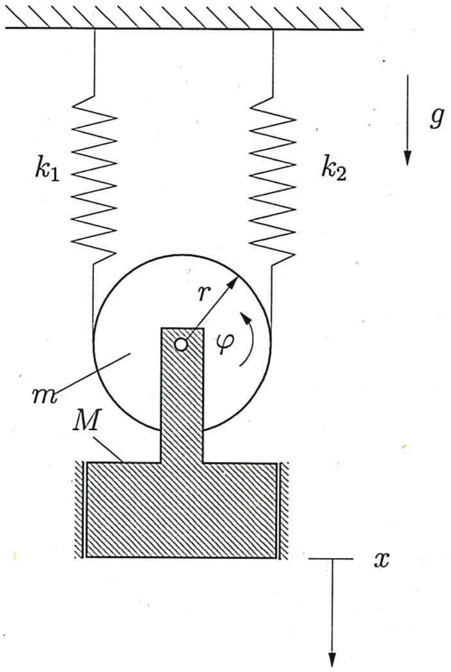
Federweg:

$$\delta \geq \underline{\frac{v_c^2}{2g\mu_0} = \frac{h}{2\mu_0}}$$

Federsteifigkeit:

$$k = \underline{4\frac{Mg\mu_0^2}{h}}$$

4. Aufgabe: (ca. 28 % der Gesamtpunkte)



Das skizzierte System bestehend aus einer homogenen Rolle (Radius r, Masse m) und Nutzlast M sei über ein Seil und zwei Federn aufgehängt. Zwischen Rolle und Seil soll kein Gleiten stattfinden. Wählen Sie φ und x als verallgemeinerte Koordinaten des Systems. Im Gleichgewichtszustand soll gelten: $x = 0$ und $\varphi = 0$.

a) Stellen Sie die kinetische und die potentielle Energie des Systems auf.

b) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen des Systems mit Hilfe der Lagrangschen Gleichung.

Gegeben: M, m, k_1, k_2, r, g

A4:

a) Kinetische Energie: $\qquad J_s = \frac{1}{2} m r^2$

$$T = \frac{1}{2}(m+M)\,\dot{x}^2 + \frac{1}{2} J_s\, \dot{\varphi}^2$$

Potentielle Energie:

$$V = \frac{1}{2} K_1 (x + r\varphi)^2 + \frac{1}{2} K_2 (x - r\varphi)^2$$

b) Lagrange-Funktion:

$$L = T - V = \frac{1}{2}(m+M)\dot{x}^2 + \frac{1}{2} J_s \dot{\varphi}^2$$

$$- \frac{1}{2} K_1 (x + r\varphi)^2 - \frac{1}{2} K_2 (x - r\varphi)^2$$

x-Komponente:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (m+M)\dot{x} \cancel{- K_1(x+r\varphi) - K_2(x-r\varphi)}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = (m+M)\ddot{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -K_1(x+r\varphi) - K_2(x-r\varphi)$$

$$(m+M)\ddot{x} + K_1(x+r\varphi) + K_2(x-r\varphi) = 0$$

φ-Komponente:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = J_s \dot{\varphi} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) = J_s \ddot{\varphi}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -K_1(x+r\varphi)r + K_2(x-r\varphi)r$$

$$J_s \ddot{\varphi} + K_1 r (x + r\varphi) - K_2 r (x - r\varphi) = 0$$

Bwgl:

$$\begin{bmatrix} m+M & 0 \\ 0 & J_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1+K_2 & (K_1-K_2)r \\ (K_1-K_2)r & (K_1+K_2)r^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$J_s = \frac{1}{2} m r^2$$