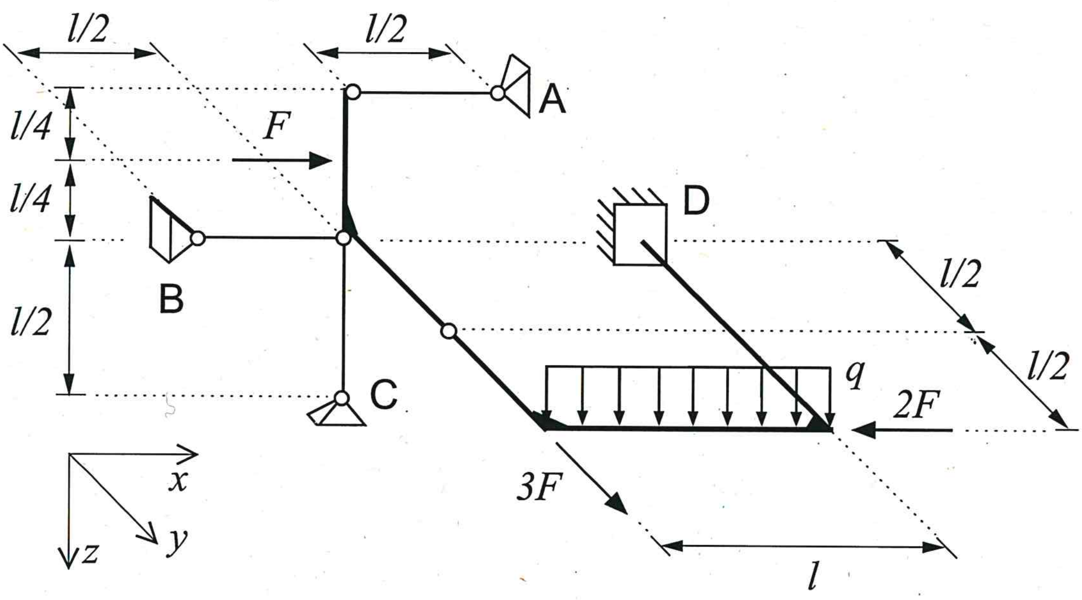
Institut für Mechanik Prof. Dr.-Ing. habil. P. Betsch Prof. Dr.-Ing. habil. Th. Seelig	Prüfung in Statik starrer Körper 11. März 2014

1. Aufgabe: (ca. 24% der Gesamtpunktzahl)

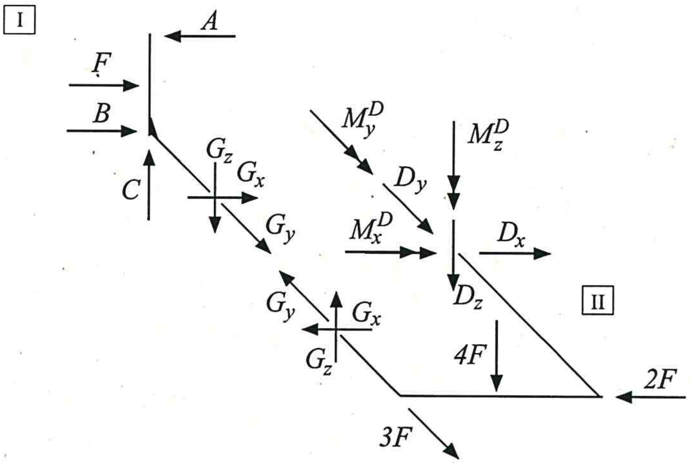


Berechnen Sie alle Auflagerreaktionen und Gelenkkräfte des oben dargestellten räumlichen Systems.

Gegeben: $l, \; F, \; q = 4\dfrac{F}{l}$

Musterlösung - Aufgabe 1

Freischnitt:



Gleichgewicht:

I:

$$\longrightarrow \Sigma F_{ix} = 0: \quad F + B + G_x - A = 0 \tag{1}$$
$$\searrow \Sigma F_{iy} = 0: \quad G_y = 0 \tag{2}$$
$$\downarrow \Sigma F_{iz} = 0: \quad G_z - C = 0 \tag{3}$$
$$\twoheadrightarrow \Sigma M_x^{(G)} = 0: \quad C \cdot \frac{1}{2} l = 0 \tag{4}$$
$$\searrow \Sigma M_y^{(G)} = 0: \quad A \cdot \frac{1}{2} l - F \cdot \frac{1}{4} l = 0 \tag{5}$$
$$\downarrow \Sigma M_z^{(G)} = 0: \quad -A \cdot \frac{1}{2} l + F \cdot \frac{1}{2} l + B \cdot \frac{1}{2} l = 0 \tag{6}$$

II:

$$\longrightarrow \Sigma F_{ix} = 0: \quad D_x - G_x - 2F = 0 \tag{7}$$
$$\searrow \Sigma F_{iy} = 0: \quad D_y + 3F - G_y = 0 \tag{8}$$
$$\downarrow \Sigma F_{iz} = 0: \quad D_z + 4F - G_z = 0 \tag{9}$$
$$\twoheadrightarrow \Sigma M_x^{(D)} = 0: \quad M_x^D - G_z \cdot \frac{1}{2} l + 4F \cdot l = 0 \tag{10}$$
$$\searrow \Sigma M_y^{(D)} = 0: \quad M_y^D - G_z \cdot l + 4F \cdot \frac{1}{2} l = 0 \tag{11}$$
$$\downarrow \Sigma M_z^{(D)} = 0: \quad M_z^D + G_x \cdot \frac{1}{2} l + G_y \cdot l - 3F \cdot l + 2F \cdot l = 0 \tag{12}$$

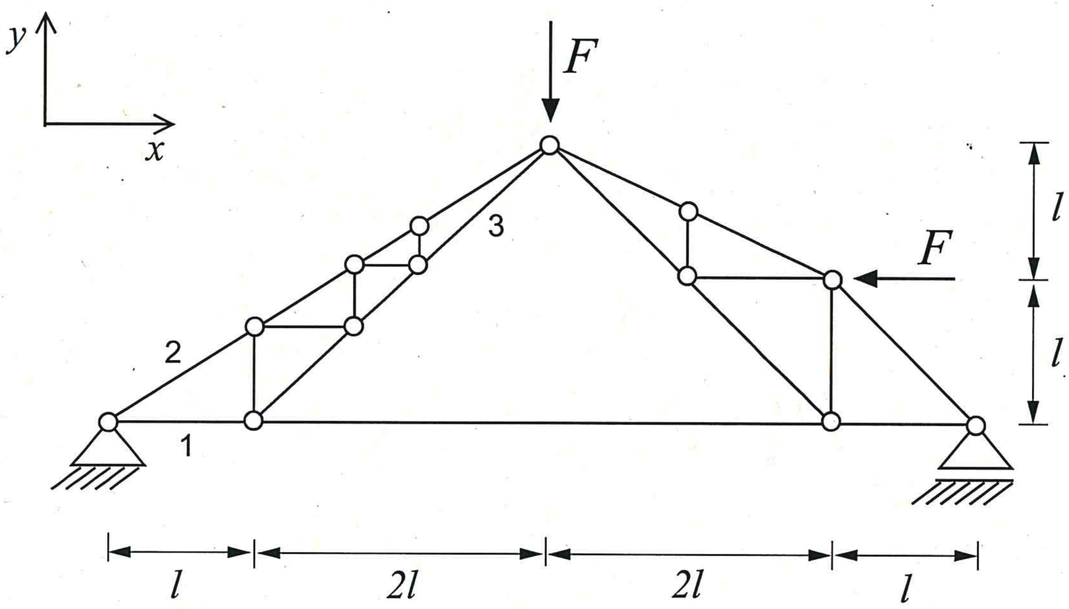
Auflösen:

$(1): G_x = 0,$	$(2): G_y = 0,$	$(3): G_z = 0,$
$(5): A = \frac{1}{2} F$	$(6): B = -\frac{1}{2} F$	$(4): C = 0,$
$(7): D_x = 2F,$	$(8): D_y = -3F,$	$(9): D_z = -4F,$
$(10): M_x^D = -4F \cdot l,$	$(11): M_y^D = -2F \cdot l,$	$(12): M_z^D = F \cdot l.$

Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. habil. P. Betsch
Prof. Dr.-Ing. habil. Th. Seelig

Prüfung in
Statik starrer Körper
11. März 2014

2. Aufgabe: (ca. 22% der Gesamtpunktzahl)



Gegeben ist das oben dargestellte Fachwerk, das durch zwei Kräfte belastet wird.

a) Weisen Sie die statische Bestimmtheit nach.

b) Kennzeichnen Sie alle Nullstäbe.

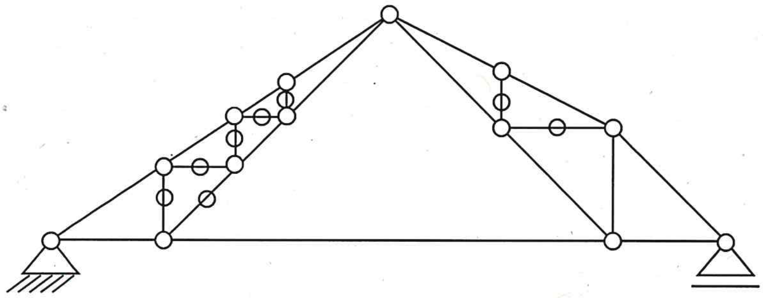
c) Berechnen Sie die Auflagerreaktionen sowie die Stabkräfte der Stäbe 1-3.

Gegeben: l, F

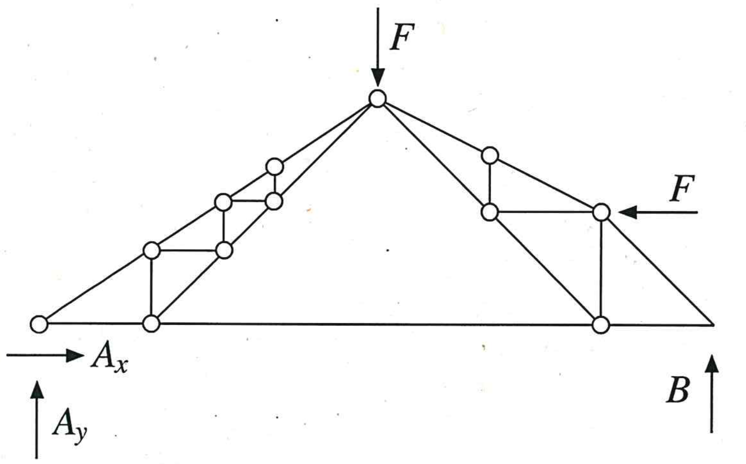
Aufgabe 2

a)
notwendige Bedingung: $2 \cdot 13 = 3 + 23$
hinreichende Bedingung: nicht kinematisch gelagert

b) Nullstäbe

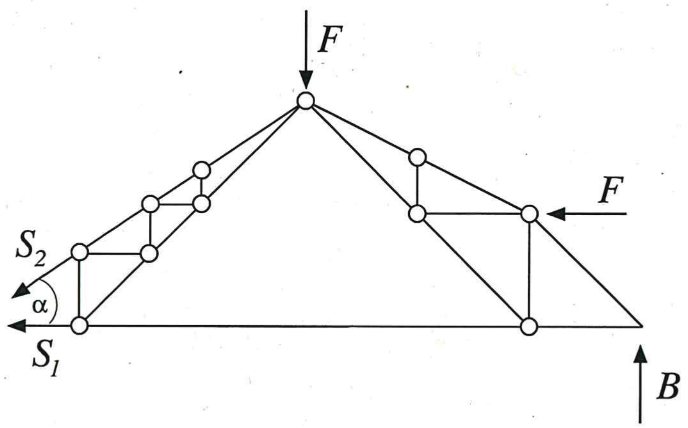


c)
Berechnung der Auflagerkräfte:



$\longrightarrow \Sigma F_{ix} = 0 : A_x - F = 0 \Leftrightarrow A_x = F$
$\uparrow \Sigma F_{iy} = 0 : A_y + B - F = 0 \Leftrightarrow A_y = F - B$
$\circlearrowleft \Sigma M^A = 0 : B \cdot 6l + F \cdot l - F \cdot 3l = 0 \Leftrightarrow B = \frac{1}{3}F,\ A_y = \frac{2}{3}F$

Stabkraft 1 und 2, Knotenpunktverfahren:



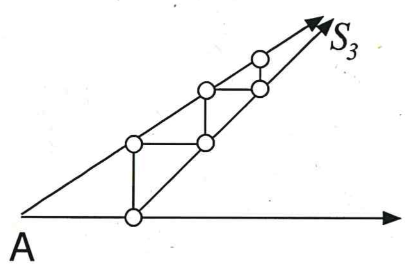
Geometrie: $\cos\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{13}}, \quad \sin\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{13}}$

$\longrightarrow \Sigma F_{ix} = 0 : -S_1 - S_2 \cos\alpha - F = 0 \Leftrightarrow S_1 = -S_2 \cos\alpha - F$

$\uparrow \Sigma F_{iy} = 0 : -S_2 \sin\alpha - F + B = 0 \Leftrightarrow S_2 = \dfrac{B-F}{\sin\alpha} = -\dfrac{\sqrt{13}}{3} F$

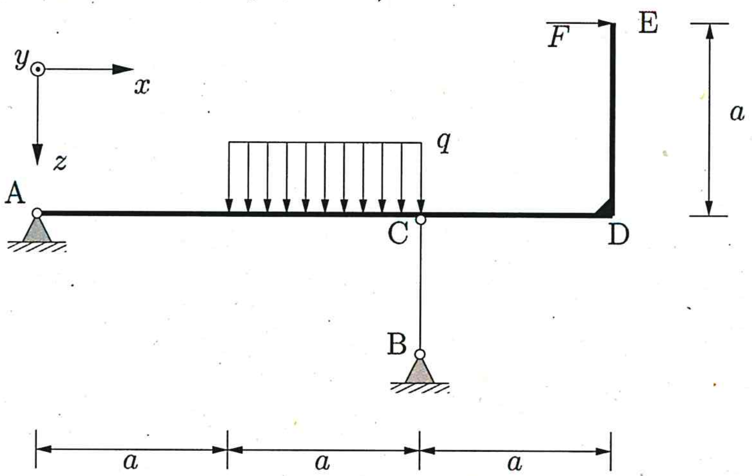
$\Rightarrow S_1 = -(-\dfrac{\sqrt{13}}{3} F)\dfrac{3}{\sqrt{13}} - F = 0$

Stabkraft 3, Ritterschnitt:



$\circlearrowleft \Sigma M^A = 0 : S_3 = 0$

3. Aufgabe: (ca. 32% der Gesamtpunktzahl)



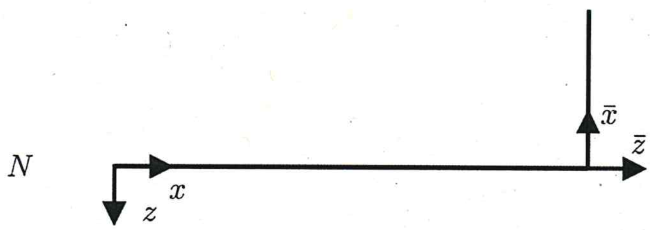
Das dargestellte System wird durch eine konstante Streckenlast q und eine Einzelkraft $F = q\,a$ belastet. Gegeben sind a, q.

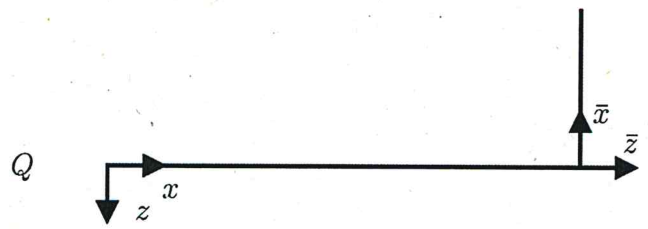
a) Weisen Sie die statische Bestimmtheit des Systems nach.

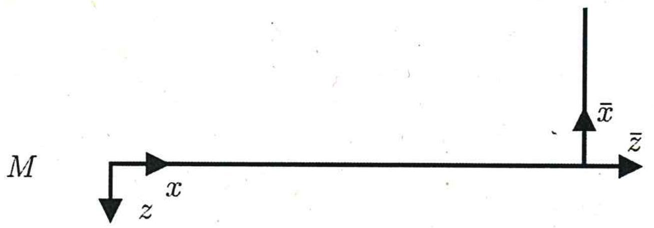
b) Bestimmen Sie alle Auflagerreaktionen.

c) Bestimmen Sie die Funktion des Biegemomentenverlaufes im Bereich A-C.

d) Skizzieren Sie die Verläufe von Normalkraft, Querkraft und Biegemoment unter Angabe der wesentlichen Ordinaten für den Bereich A-C-D-E in folgende Koordinatensysteme:







Musterlösung - Aufgabe 3

a) stat. Bestimmtheit:

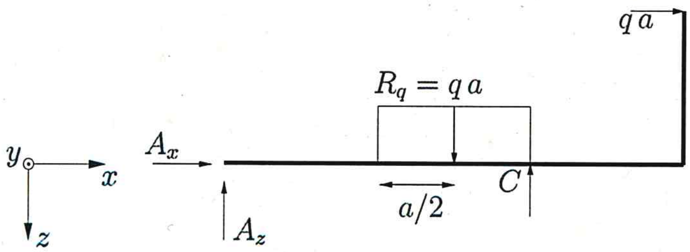
entw. Stab B-C als starren Körper oder als Pendelstütze reduzieren

$$\left.\begin{aligned} a &= 2+2 \\ g &= 2 \\ u &= 2 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} a+g &= 3\,u \\ 4+2 &= 3\cdot 2 \end{aligned} \qquad\qquad \left.\begin{aligned} a &= 3 \\ g &= 0 \\ u &= 1 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} a+g &= 3\,u \\ 3 &= 3 \end{aligned}$$

das System ist nicht kinematisch/beweglich $\Rightarrow$ das System ist statisch bestimmt.

b) Auflagerreaktionen

Freischnitt

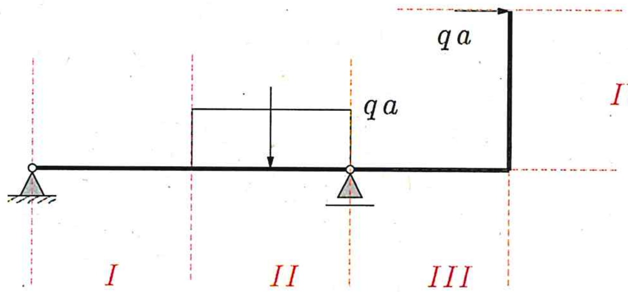


$$\rightarrow \sum F_{ix} = 0: \quad A_x + q\,a = 0 \Leftrightarrow A_x = -q\,a$$

$$\curvearrowleft \sum M_y^{(A)} = 0: \quad -R_q\,\frac{3}{2}\,q + C\,2\,a - q\,a\cdot a = 0 \Leftrightarrow C = \frac{5}{4}\,qa$$

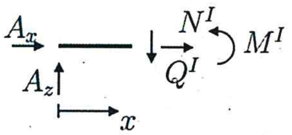
$$\uparrow \sum F_{iz} = 0: \quad A_z - R_q + C = 0 \Leftrightarrow A_z = q\,a - \frac{5}{4}\,qa = -\frac{1}{4}\,qa$$

c) Schnittverläufe (Funktionen) von N, Q und M



Bereiche:

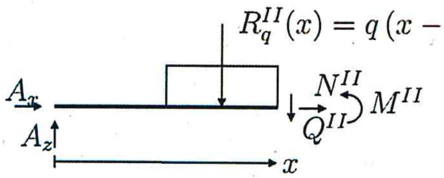
Bereich $I: 0 \leq x \leq a$



$$\curvearrowleft \sum M_y^{(x)} = 0: \quad M^I(x) - A_z\cdot x = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad M^I(x) = A_z\cdot x = -\frac{1}{4}\,q\,a\cdot x$$

Bereich $II: a \leq x \leq 2\,a$

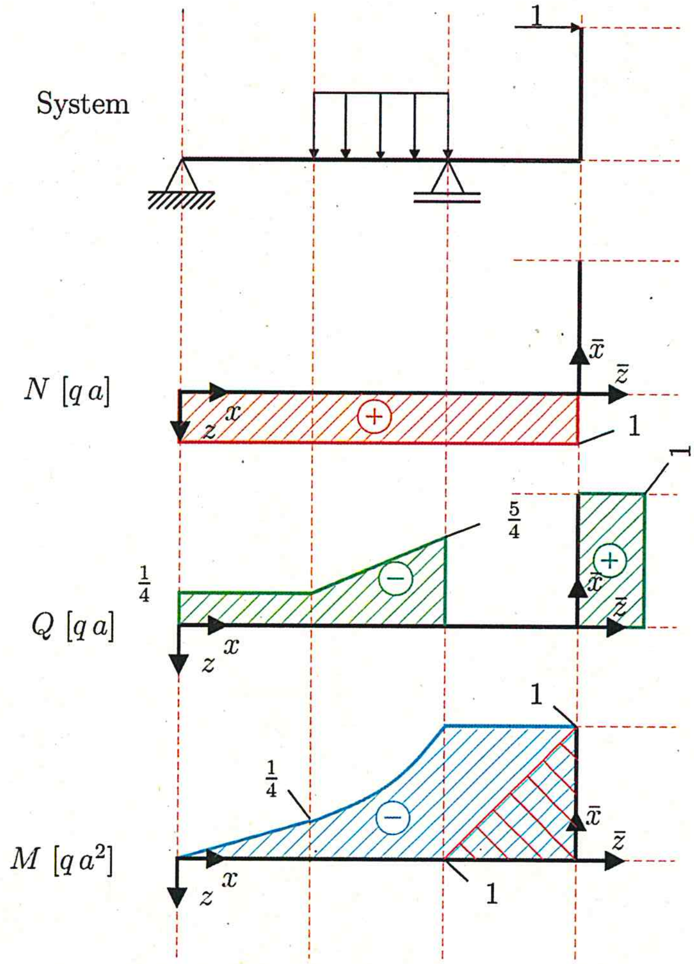


$$\curvearrowleft \sum M_y^{(x)} = 0: \quad M^{II}(x) + R_q^{II}\,\frac{x-a}{2} - A_z\,x = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad M^{II}(x) = -\frac{q}{2}\,x^2 + \frac{3}{4}\,q\,a\,x - \frac{q\,a^2}{2}$$

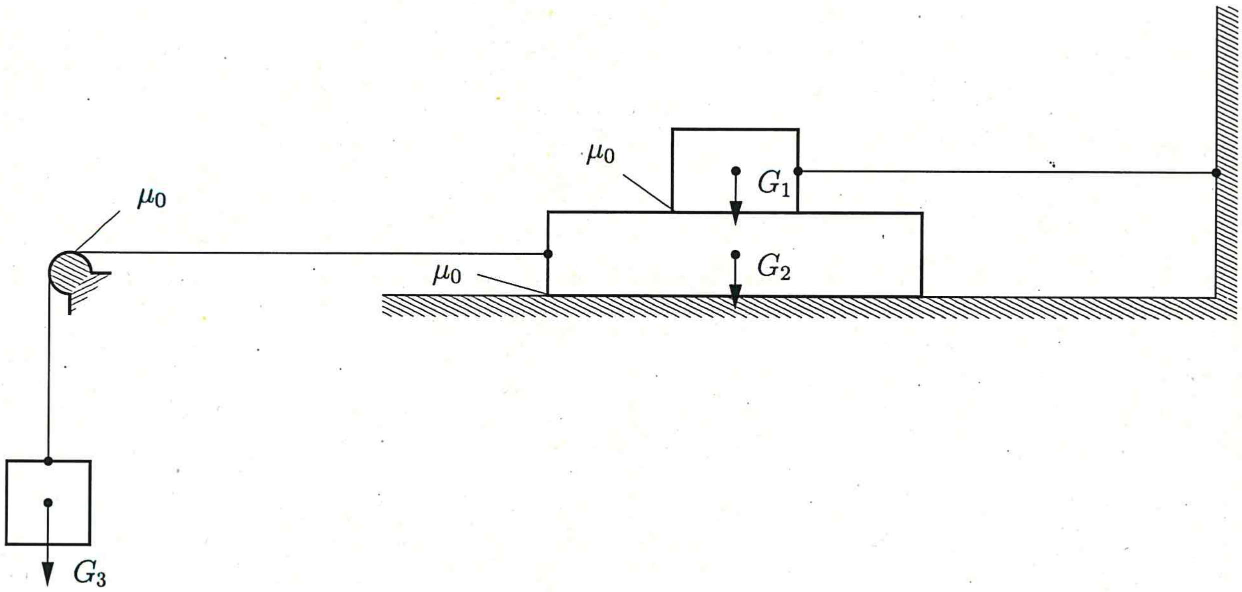
d) Verläufe

$$N^{I} = q\,a \qquad N^{II} = q\,a$$
$$N^{III} = q\,a \qquad N^{IV} = 0$$
$$Q^{I} = -\frac{1}{4}\,q\,a \qquad Q^{II} = -q\,x + \frac{3}{4}\,q\,a$$
$$Q^{III} = 0 \qquad Q^{IV} = q\,a$$
$$M^{I}(x) = -\frac{1}{4}\,q\,a\cdot x \qquad M^{II}(x) = -\frac{q}{2}\,x^2 + \frac{3}{4}\,q\,a\,x - \frac{q\,a^2}{2}$$
$$M^{III} = -q\,a^2 \qquad M^{IV}(\bar{x}) = q\,a\,\bar{x} - q\,a^2$$



Institut für Mechanik Prof. Dr.-Ing. habil. P. Betsch Prof. Dr.-Ing. habil. Th. Seelig	Prüfung in Statik starrer Körper 11. März 2014

4. Aufgabe: (ca. 22% der Gesamtpunktzahl)

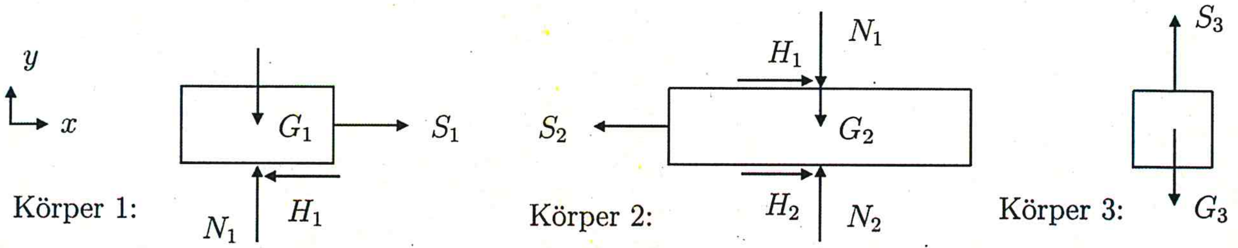


Berechnen Sie für das dargestellte System die maximal mögliche Gewichtskraft G_3, so dass das System in Ruhe bleibt, wobei die Gewichtskräfte G_1 und G_2 sowie der Haftreibungskoeffizient μ_0 gegeben sind.

Gegeben: G_1, G_2, μ_0

Hinweis: Es wird angenommen, dass die Klötze G_1 und G_2 horizontal bleiben, d.h. ein Kippen kann ausgeschlossen werden.

Musterlösung - Aufgabe 4
Freischnitt



Gegeben: $\mu_0, G_1, G_2, \alpha = \pi/2$
Gesucht: G_{3max} sodass das System in Ruhe bleibt
GGW

$$\text{Körper 1:} \quad \sum F_{ix} = 0: \quad S_1 - H_1 = 0 \tag{13}$$
$$\sum F_{iy} = 0: \quad N_1 - G_1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad N_1 = G_1 \tag{14}$$
$$\text{Körper 2:} \quad \sum F_{ix} = 0: \quad -S_2 + H_1 + H_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad S_2 = H_1 + H_2 \tag{15}$$
$$\sum F_{iy} = 0: \quad N_2 - G_2 - N_1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad N_2 = G_2 + N_1 \tag{16}$$
$$\text{Körper 3:} \quad \sum F_{iy} = 0: \quad S_3 - G_3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad S_3 = G_3 \tag{17}$$

Grenzfall Haftung:

$$H_1 = \mu_0 N_1 \tag{18}$$
$$H_2 = \mu_0 N_2 \tag{19}$$
$$S_3 = S_2 e^{\mu_0 \alpha} \quad \text{da} \quad S_3 > S_2, \quad \alpha = \frac{\pi}{2} \tag{20}$$

$G_{3max} = ?$
(20) in (17):

$$G_3 = S_2 e^{\mu_0 \frac{\pi}{2}} \qquad \Big| \ (15), (18) \text{ und } (19)$$
$$\Rightarrow G_3 = \mu_0 (N_1 + N_2) e^{\mu_0 \frac{\pi}{2}} \qquad \Big| \ (14) \text{ und } (16)$$
$$\Rightarrow G_3 = \mu_0 (2 G_1 + G_2) e^{\mu_0 \frac{\pi}{2}}$$