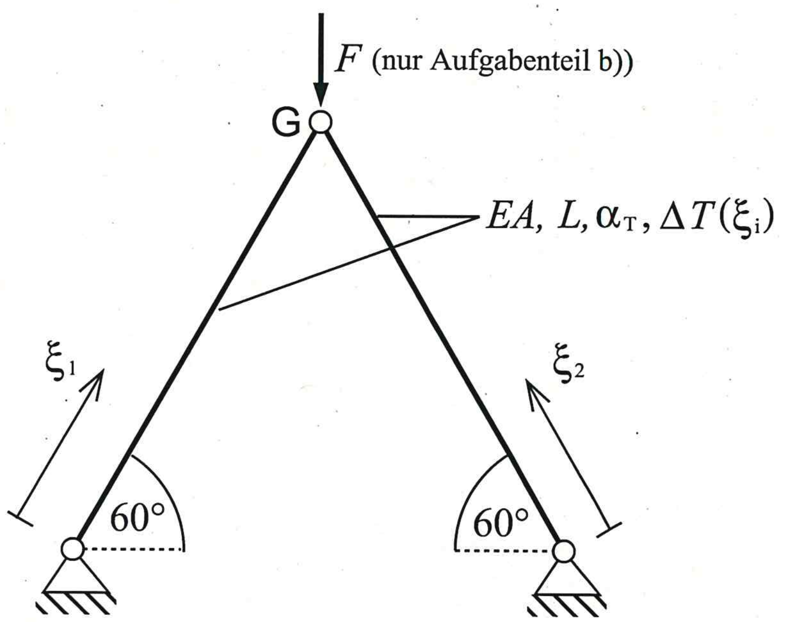
4. Aufgabe:



Die beiden skizzierten Stäbe werden zunächst durch ein entlang ihrer lokalen Koordinatenachsen ξ_1 und ξ_2 definiertes Temperaturfeld belastet:

$$\Delta T(\xi_i) = \Delta T_0 \left(1 + 4\frac{\xi_i^2}{L^2}\right), \quad i = 1, 2$$

a) Bestimmen Sie die Verschiebung u_T des Gelenkes G in Folge der Temperaturänderung ΔT.

b) Zusätzlich zu der Temperaturänderung wird nun noch eine vertikale Einzelkraft F am Gelenk G aufgebracht. Bestimmen Sie die Kraft F, für die die Gesamtverschiebung $u = u_T + u_F$ des Gelenkes G gleich Null ist.

Gegeben: E, A, L, α_T, ΔT_0

Hinweis: Alle auftretenden Verschiebungen können als klein angenommen werden.

Aufgabe 4

a) Längenänderung der Stäbe infolge der Temperaturänderung $\Delta T(\xi_i)$:

$$\frac{du}{d\xi_i} = \alpha_T \, \Delta T(\xi_i)$$

$$u(\xi_i) = \int_{\xi_i} \alpha_T \, \Delta T_0 \left(1 + 4\,\frac{\xi_i^2}{L^2}\right) d\xi_i = \alpha_T \, \Delta T_0 \left(\xi_i + \frac{4}{3}\,\frac{\xi_i^3}{L^2} + c\right)$$

Aufgrund der unverschieblichen Festlager gilt die Randbedingung

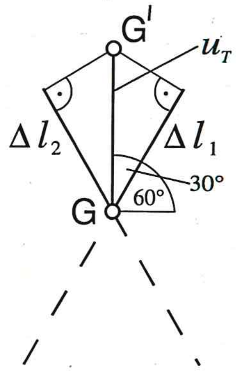
$$u(\xi_i = 0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_T \, \Delta T_0 \; (0 + 0 + c) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{c = 0}$$

Die Längenänderungen an den Stabenden betragen

$$\Delta l_T = \Delta l_1 = \Delta l_2 = u(\xi_i = L) = \alpha_T \cdot \Delta T_0 \cdot \left(L + \frac{4}{3} \cdot \frac{L^3}{L^2}\right) = \alpha_T \cdot \Delta T_0 \cdot \frac{7}{3} L$$

Stabverlängerungen Δl_1 und Δl_2 in einen Verschiebungsplan. Der Schnittpunkt der Lote auf den Stabverlängerungen liefert die neue Lage G'.

$$\Rightarrow u_T = \frac{\Delta l_T}{\cos 30°}$$

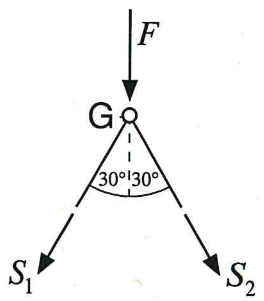


b) Längenänderung der Stäbe infolge der Last F:

$$\sum \downarrow: \quad (S_2 - S_1)\sin 30° = 0 \quad \Leftrightarrow \quad S_1 = S_2 = S$$

$$\sum \rightarrow: \quad F + (S_1 + S_2)\cos 30° = 0$$

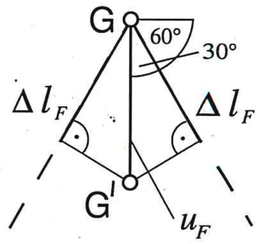
$$\Leftrightarrow \quad S = \frac{-F}{2 \cdot \cos 30°}$$



Stabverlängerungen infolge der konstanten Stabkraft

$$\Rightarrow \Delta l_F = \frac{S\,L}{EA} = \frac{-F}{2 \cdot \cos 30°}\frac{L}{EA}$$

Stabverkürzungen Δl_F im Verschiebungsplan. Der Schnittpunkt der Lote auf den Stabverlängerungen liefert u_F.



$$\Rightarrow u_F = \frac{\Delta l_F}{\cos 30°}$$

Gesamtverschiebung $u = u_T + u_F \stackrel{!}{=} 0$

$$u_T + u_F = \frac{\Delta l_T}{\cos 30°} + \frac{\Delta l_F}{\cos 30°} = \frac{1}{\cos 30°}\left(\alpha_T \cdot \Delta T_0 \cdot \frac{7}{3}L - \frac{F}{2 \cdot \cos 30°}\frac{L}{EA}\right) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \quad F = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot EA \cdot \alpha_T \cdot \Delta T_0 \cdot \frac{7}{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{F = \frac{7\sqrt{3}}{9}\,EA\,\alpha_T \Delta T_0}$$