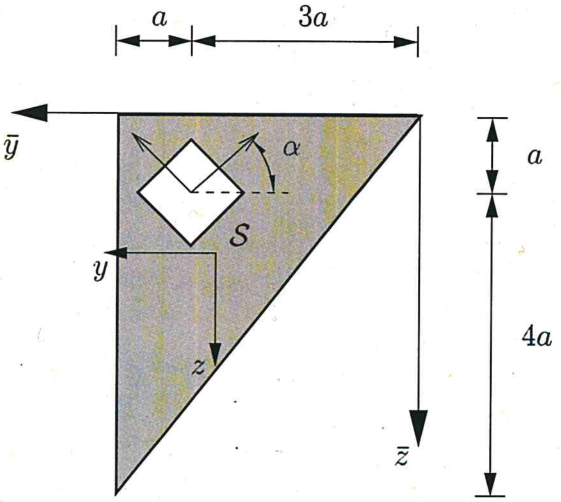
1. Aufgabe: (ca. 19% der Gesamtpunkte)



Der skizzierte Querschnitt eines rechtwinkligen Dreiecks enthält eine quadratische Aussparung der Kantenlänge a und der Neigung α.

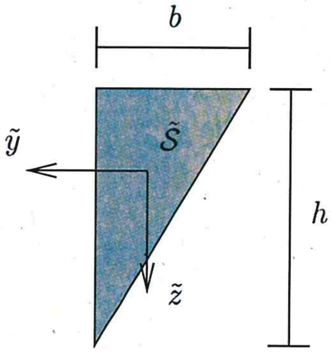
Bestimmen Sie:

a) die Koordinaten des Flächenschwerpunktes in Bezug auf das eingezeichnete $\bar{y} - \bar{z}$ – System.

b) die Trägheitsmomente I_y, I_z, I_{yz} bezüglich des $y - z$ – Koordinatensystems mit Ursprung im Flächenschwerpunkt $\mathcal{S}$.

Gegeben: $a, \alpha = 45°$

Hinweis: Bzgl. des Flächenschwerpunktes $\tilde{\mathcal{S}}$ gilt:



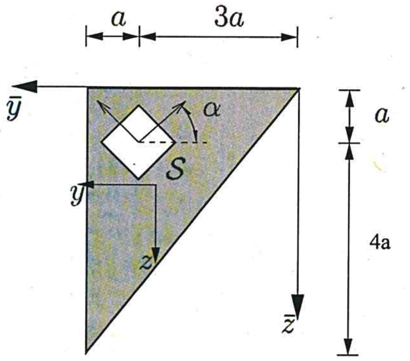
$$I_{\tilde{y}} = \int_A \tilde{z}^2 \, \mathrm{d}A = \frac{1}{36} b h^3$$

$$I_{\tilde{z}} = \int_A \tilde{y}^2 \, \mathrm{d}A = \frac{1}{36} b^3 h$$

$$I_{\tilde{y}\tilde{z}} = \int_A \tilde{z}\tilde{y} \, \mathrm{d}A = -\frac{1}{72} b^2 h^2$$

Musterlösung - Aufgabe 1

a) Flächenschwerpunkt (exakt)



i	A_i	$\bar{y}_{s,i}$	$\bar{z}_{s,i}$
1	$10a^2$	$\frac{8}{3}a$	$\frac{5}{3}a$
2	a^2	$3a$	a

$$\left.\begin{aligned}\bar{y}_s &= \frac{\sum A_i \cdot \bar{y}_{s,i}}{\sum A_i} = \frac{10a^2 \cdot \frac{8}{3}a - a^2 \cdot 3a}{10a^2 - a^2} = \frac{71}{27}a \approx 2.6296a \\ \bar{z}_s &= \frac{\sum A_i \cdot \bar{z}_{s,i}}{\sum A_i} = \frac{10a^2 \cdot \frac{5}{3}a - a^2 \cdot a}{10a^2 - a^2} = \frac{47}{27}a \approx 1,7407a\end{aligned}\right\} \quad +$$

b)

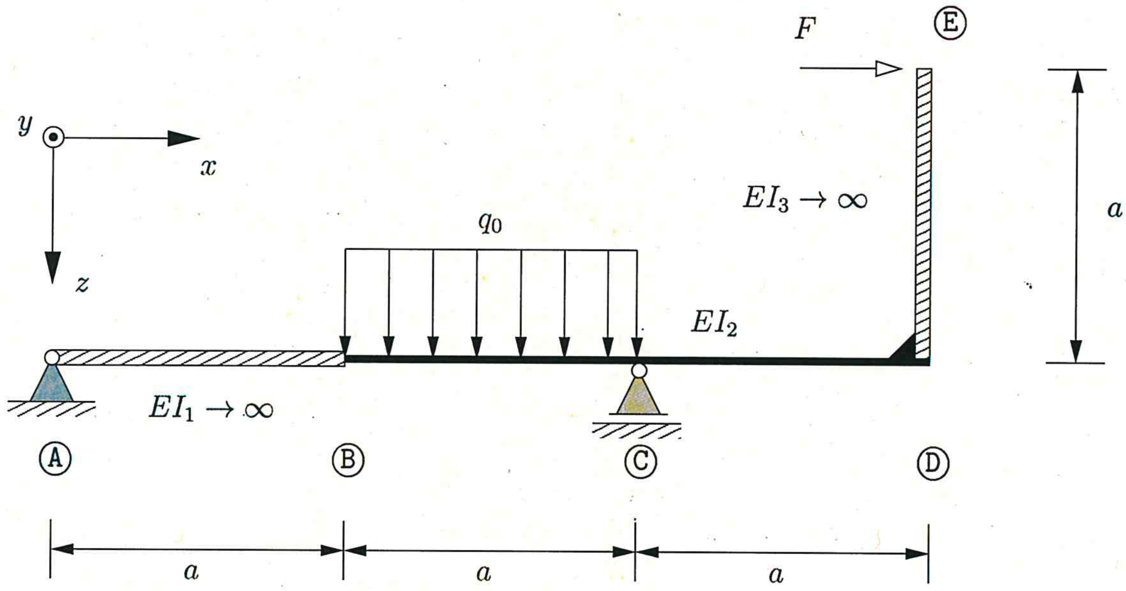
i	A_i	$I_{\bar{y},i}$	$I_{\bar{z},i}$	y_i	z_i	$A_i y_i^2$	$A_i z_i^2$	$I_{\bar{y}\bar{z}}$	$A_i y_i z_i$
1	$10a^2$	$\frac{125}{9}a^4$	$\frac{80}{9}a^4$	$\frac{1}{27}a$	$-\frac{2}{27}a$	$\frac{10}{729}a^4$	$\frac{40}{729}a^4$	$-\frac{50}{9}a^4$	$-\frac{20}{729}a^4$
2	a^2	$\frac{1}{12}a^4$	$\frac{1}{12}a^4$	$\frac{10}{27}a^4$	$-\frac{20}{27}a^4$	$\frac{100}{729}a^4$	$\frac{400}{729}a^4$	0	$-\frac{200}{729}a^4$

$$\begin{aligned}I_{y,\text{ges}} &= \left(I_{\bar{y},1} + A_1 z_1^2\right) - \left(I_{\bar{y},2} + A_2 z_2^2\right) \\ &= \left(\frac{125}{9}a^4 + \frac{40}{729}a^4\right) - \left(\frac{1}{12}a^4 + \frac{400}{729}a^4\right) = \frac{4313}{324}a^4 \approx 13,3117a^4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_{z,\text{ges}} &= \left(I_{\bar{z},1} + A_1 y_1^2\right) - \left(I_{\bar{z},2} + A_2 y_2^2\right) \\ &= \left(\frac{80}{9}a^4 + \frac{10}{729}a^4\right) - \left(\frac{1}{12}a^4 + \frac{100}{729}a^4\right) = \frac{2813}{324}a^4 \approx 8,6820a^4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_{yz,\text{ges}} &= \left(I_{\bar{y}\bar{z},1} + A_1 y_1 z_1\right) - \left(I_{\bar{y}\bar{z},2} + A_2 y_2 z_2\right) \\ &= \left(-\frac{50}{9}a^4 - \frac{20}{729}a^4\right) - \left(0 - \frac{200}{729}a^4\right) = -\frac{430}{81}a^4 \approx -5,3086a^4\end{aligned}$$

2. Aufgabe: (ca. 35% der Gesamtpunkte)



Das dargestellte System wird durch eine konstante Streckenlast q_0 und eine Kraft $F = q_0 a$ belastet. Die Abschnitte Ⓐ – Ⓑ und Ⓓ – Ⓔ sind als biegestarr anzunehmen, der Bereich Ⓑ – Ⓓ besitzt die Biegesteifigkeit EI_2.

a) Geben Sie die geometrischen Rand- und Übergangsbedingungen in den Punkten Ⓐ – Ⓒ an. (w, w')

b) Bestimmen Sie alle Auflagerkräfte.

c) Bestimmen Sie den Momentenverlauf $M_y(x)$ für $2a \leq x \leq 3a$.

d) Ermitteln Sie die Biegelinie $w(x)$ im Bereich Ⓐ – Ⓓ unter Zuhilfenahme der Ergebnisse aus a) und c), sowie den **vorgegebenen Momentenverläufen:**

$$M_y(x) = \begin{cases} M_I(x) = -\dfrac{1}{4} q_0 a x & 0 \leq x \leq a \\ M_{II}(x) = -\dfrac{1}{2} q_0 \left[x^2 - \dfrac{3}{2} a x + a^2 \right] & a \leq x \leq 2a \end{cases}$$

Achtung: Verzichten Sie auf die explizite Auflösung nach den auftretenden Integrationskonstanten !

Gegeben: a, q_0, $F = q_0 a$, $EI_1 \to \infty$, EI_2, $EI_3 \to \infty$

Musterlösung - Aufgabe 2

a) • Unterteilung in drei Bereiche : $w(x) \begin{cases} w_I(x) & \text{für} \quad 0 \leq x \leq a \\ w_{II}(x) & \text{für} \quad a \leq x \leq 2a \\ w_{III}(x) & \text{für} \quad 2a \leq x \leq 3a \end{cases}$

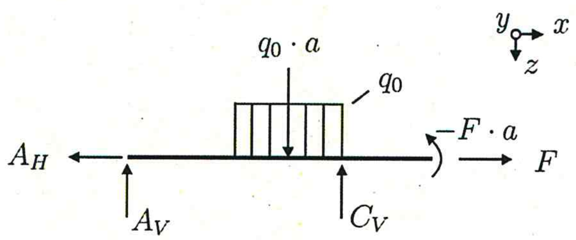
• Rand- und Übergangsbedingungen

Punkt Ⓐ : $w_I(x=0) = 0$ (Festlager)

Punkt Ⓑ : $\begin{aligned} w_I(x=a) &= w_{II}(x=a) \\ w'_I(x=a) &= w'_{II}(x=a) \end{aligned}$ (Starre Verbindung)

Punkt Ⓒ : $\begin{aligned} w_{II}(x=2a) &= w_{III}(x=2a) = 0 \\ w'_{II}(x=2a) &= w'_{III}(x=2a) \end{aligned}$ +

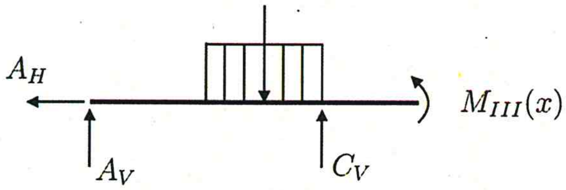
b) Auflagerkräfte



$$\sum F_x : \quad A_H = F$$
$$\sum F_z : \quad -A_V + q_0 \cdot a - C_V = 0 \qquad (1)$$
$$\sum \overset{\curvearrowleft}{M}{}^{(a)} : \quad -\frac{3}{2} q_0 a^2 + C_V \cdot 2a - F \cdot a = 0$$
$$\Rightarrow C_V = \frac{3}{4} q_0 a + \frac{1}{2} F \qquad \text{mit } F = q_0 \cdot a$$
$$\Rightarrow C_V = \frac{5}{4} q_0 \, a$$

in (1): $A_V = q_0 \cdot a - \frac{5}{4} q_0 \, a = -\frac{1}{4} q_0 \, a$

c) • Bereich III : $(2\,a \leq x \leq 3\,a)$



$$\sum M^x = 0: \quad M_{III}(x) - C_V \cdot (x - 2\,a) + q_0 \cdot a(x - \frac{3}{2}\,a) - A_V \cdot x = 0$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow M_{III}(x) &= \frac{5}{4}\,q_0\,a\,(x - 2\,a) - q_0\,a\,(x - \frac{3}{2}a) - \frac{1}{4}\,q_0\,a \cdot x \\
&= \frac{1}{4}\,q_0\,a \cdot x - \frac{10}{4}\,q_0\,a^2 + \frac{3}{2}\,q_0\,a^2 - \frac{1}{4}\,q_0\,a \cdot x \\
&= -q_0\,a^2 \qquad +
\end{aligned}$$

$$M(x) \begin{cases} M_I(x) = -\dfrac{1}{4}\,q_0\,a \cdot x \\ M_{II}(x) = -\dfrac{1}{2}\,q_0\,\left(x^2 - \dfrac{3}{2}\,a\,x + a\right) \\ M_{III}(x) = -q_0\,a^2 \end{cases}$$

d) • Bereich I : $(0 \leq x \leq a)$

$$\underbrace{EI_1}_{\to\infty}\,w_I''(x) = -M_I(x) \Rightarrow \lim_{EI_1 \to \infty} (w_I''(x)) = \lim_{EI_1 \to \infty} \left(-\frac{M_I(x)}{EI_1}\right) = 0$$

$$\Rightarrow w_I''(x) = 0$$

Quadrieren:

$$\begin{aligned}
w_I'(x) &= C_1 \\
w_I(x) &= C_1\,x + C_2 \qquad \text{Geradengleichung}
\end{aligned}$$

• Bereich II : $(a \leq x \leq 2\,a)$

$$\begin{aligned}
EI_2\,w_{II}''(x) &= -M_{II} = \frac{1}{2}\,q_0\,\left(x^2 - \frac{3}{2}\,a\,x + a^2\right) \\
EI_2\,w_{II}'(x) &= \frac{1}{2}\,q_0\,\left(\frac{1}{3}\,x^3 - \frac{3}{4}\,a\,x^2 + a^2\,x\right) + C_3 \\
EI_2\,w_{II}(x) &= \frac{1}{2}\,q_0\,\left(\frac{1}{12}\,x^4 - \frac{3}{12}\,a\,x^3 + \frac{1}{2}\,a^2\,x^2\right) + C_3\,x + C_4
\end{aligned}$$

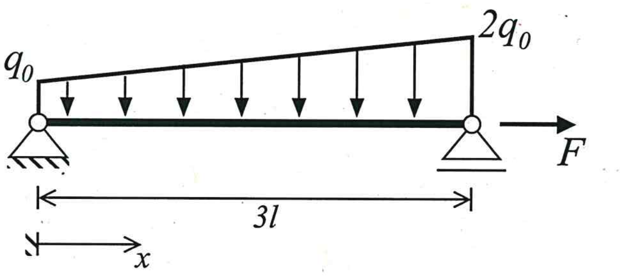
- Bereich III : $\quad (2\,a \leq x \leq 3\,a)$

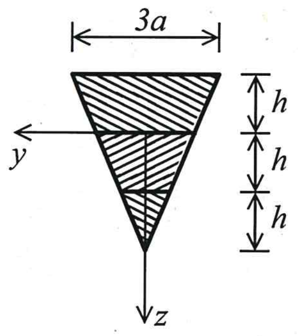
$$
\begin{aligned}
EI_2\, w''_{III}(x) &= -M_{III}(x) = q_0\, a^2 \\
EI_2\, w'_{III}(x) &= q_0\, a^2\, x + C_5 \\
EI_2\, w_{III}(x) &= \frac{1}{2}\, q_0\, a^2\, x^2 + C_5\, x + C_6
\end{aligned}
$$

Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. habil. P. Betsch
Prof. Dr.-Ing. habil. Th. Seelig

Prüfung in
Festigkeitslehre
11. März 2014

3. Aufgabe:





Für das dargestellte System wird ein aus drei verleimten Balken der Höhe h zusammengesetztes Querschnittsprofil verwendet. Für die skizzierte Belastung seien die Schnittgrößenverläufe wie folgt bereits ermittelt worden:

$$N = F, \quad M_y(x) = q_0 l \left(2x - \frac{1}{2}\frac{x^2}{l} - \frac{1}{18}\frac{x^3}{l^2}\right), \quad Q_z(x) = q_0 l \left(2 - \frac{x}{l} - \frac{1}{6}\frac{x^2}{l^2}\right)$$

Ermitteln Sie an der Stelle $x = 2l$

a) die Schubspannungen in den Fugen bei $z = 0$ und $z = h$,

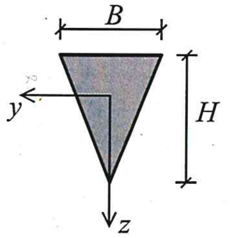
b) die erforderliche Balkenhöhe h, sodass gilt: $|\tau_{xz}| \leq \dfrac{1}{5}\dfrac{q_0 l}{a^2}$.

Im Folgenden ist $h = a$ anzunehmen.

c) Geben Sie an wie groß die Zugkraft F sein muss, damit an der Stelle $x = 2l$ der gesamte Querschnitt auf Zug ($\sigma > 0$) belastet ist.

Gegeben: a, l, q_0

Hinweis:



$$I_y = \frac{BH^3}{36}$$

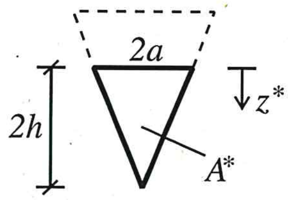
Aufgabe 3

a) Berechnung der Schubspannung in der oberen und unteren Fuge:

$$I_y = \frac{3a\,(3h)^3}{36} = \frac{9}{4}ah^3 \qquad \text{FTM konstant über die Länge}$$

$$Q_z(x=2l) = \dots = -\frac{2}{3}q_0 l \qquad \text{Querkraft an der Stelle } x = 2l$$

Obere Fuge $z = 0$:

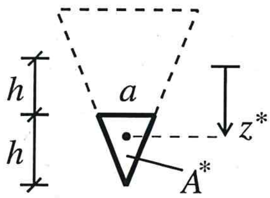


$$b(z=0) = 2a$$

$$S_y(z=0) = \underbrace{\frac{1}{3}\cdot 2h}_{z^*}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot 2h}_{A^*} = \frac{4}{3}ah^2$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\tau_{xz}^{oben}}} = \frac{Q_z(x)\,S_y(z)}{I_y\,b(z)} = \frac{-\frac{2}{3}q_0 l\cdot\frac{4}{3}ah^2}{\frac{9}{4}ah^3\cdot 2a} = \underline{\underline{-\frac{16}{81}\frac{q_0 l}{ah}}}$$

Untere Fuge $z = h$:



$$b(z=0) = a$$

$$S_y(z=0) = \underbrace{(h+\frac{1}{3}\cdot h)}_{z^*}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}\cdot a\cdot h}_{A^*} = \frac{2}{3}ah^2.$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\tau_{xz}^{unten}}} = \frac{Q_z(x)\,S_y(z)}{I_y\,b(z)} = \frac{-\frac{2}{3}q_0 l\cdot\frac{2}{3}ah^2}{\frac{9}{4}ah^3\cdot a} = \underline{\underline{-\frac{16}{81}\frac{q_0 l}{ah}}}$$

b) Bemessung der Balkenhöhe h

$$|\tau_{xz}^{oben}| = |\tau_{xz}^{unten}| = \frac{16}{81}\frac{q_0 l}{ah} \overset{!}{\leq} \frac{1}{5}\frac{q_0 l}{a^2} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{h}} \geq \frac{16}{81}\cdot\frac{5}{1}\cdot a = \frac{80}{81}a \underline{\underline{\approx a}}$$

c) Normalspannung infolge gerader Biegung und Normalkraft soll an der Stelle $x = 2l$ für alle z größer 0 sein. Das gilt, wenn

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_y(x=2l)}{I_y}\cdot z \overset{!}{\geq} 0$$

Im Bereich $0 \leq z \leq +2a$ ist $\sigma > 0$, da

$$N = F \qquad > 0$$

$$M_y(x=2l) = q_0 l\left(2\cdot 2\,l - \frac{1}{2}\cdot\frac{4\,l^2}{l} - \frac{1}{18}\cdot\frac{8\,l^3}{l^2}\right) = \frac{14}{9}q_0 l^2 \qquad > 0$$

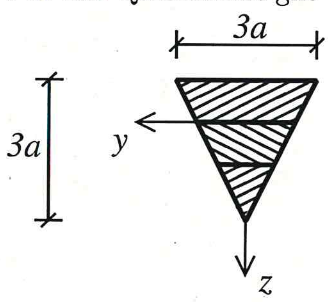
Im Bereich $-a \leq z < 0$ ist $\sigma > 0$, wenn an der Querschnittoberkante gilt

$$\sigma(z=-a) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{F}{A} + \frac{M_y(x=2l)}{I_y}\cdot(-a) \overset{!}{\geq} 0$$

$$\Leftrightarrow \quad F \geq M_y(x=2l)\cdot\frac{A}{I_y}\cdot a$$

Für den Querschnitt gilt

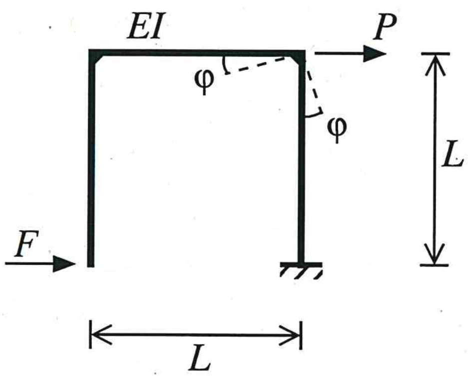


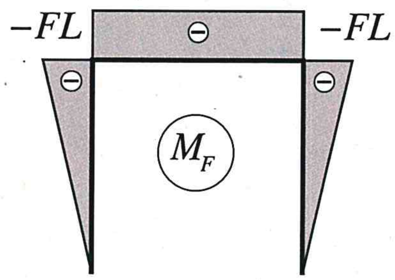
$$A = \frac{1}{2}\cdot 3a\cdot 3a = \frac{9}{2}a^2$$

$$I_y = \frac{9}{4}a^4 \qquad \text{aus a) mit } h = a$$

$$\Rightarrow \quad F \geq \frac{14}{9}q_0 l^2 \cdot \frac{\frac{9}{2}a^2}{\frac{9}{4}a^4}\cdot a = \frac{14}{9}q_0 l^2\cdot\frac{2}{a} = \frac{28}{9}\frac{q_0 l^2}{a} \approx 3.1\frac{q_0 l^2}{a}$$

4. Aufgabe:

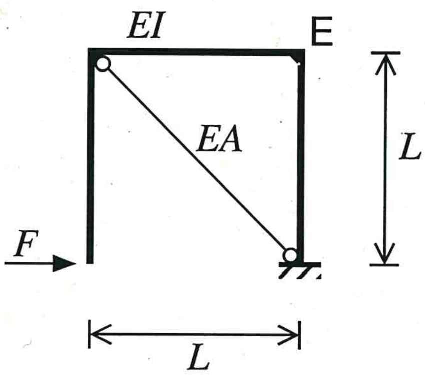




Für obiges System ist der Momentenverlauf M_F infolge der Last F gegeben. Die Dehnsteifigkeit im Balken ist zu vernachlässigen.

a) Wie groß muss die Last P sein, damit $\varphi = 0$ gilt.

Das System wird um einen Stab mit der Dehnsteifigkeit $EA = \dfrac{3}{5}\dfrac{EI}{L^2}$ ergänzt, und nur noch durch die Last F belastet.



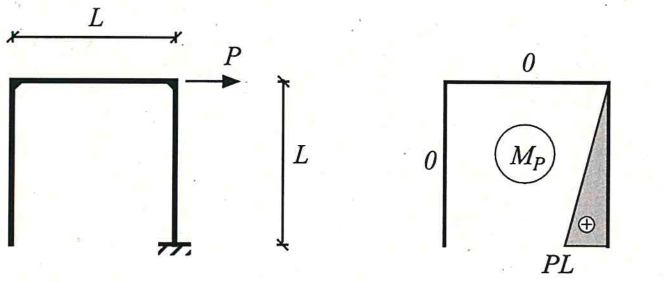
b) Berechnen Sie die Kraft im Stab.

Gegeben: L, F, EI

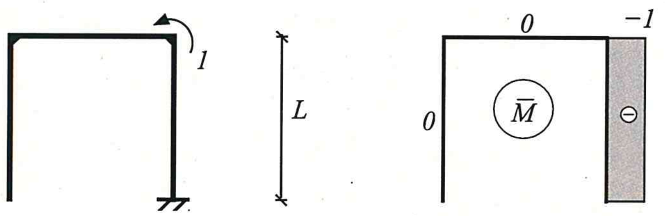
Hinweis: Die Aufgabe ist mit dem Prinzip der virtuellen Kräfte zu lösen.

Aufgabe 4

a) Last P berechnen:



infolge der Last P,



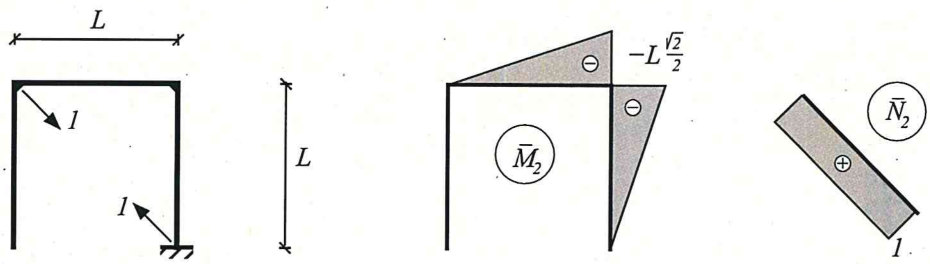
und infolge der Last 1 in Richtung der gesuchten Verdrehung.

Verdrehung φ

$$\varphi = \int \frac{(M_F + M_P)\bar{M}}{EI} dx = \underbrace{\frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot (-FL) \cdot (-1) \cdot L}_{\text{infolge F}} + \underbrace{\frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot (PL) \cdot (-1) \cdot L}_{\text{infolge P}}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{L^2}{EI}(F - P) \quad \Rightarrow \quad \varphi = 0 \text{ für } P = F.$$

b) Stabkraft berechnen:



Einflusszahlen und Stabkraft:

$$
\begin{aligned}
\alpha_{10} &= \int \frac{M_F \bar{M}_2}{EI} dx + \int \frac{N_F \bar{N}_2}{EA} dx \\
&= \frac{L}{EI} \left(\frac{1}{2}(-FL)(-L\frac{\sqrt{2}}{2}) + \frac{1}{3} \cdot (-FL)(-L\frac{\sqrt{2}}{2}) \right) + \frac{L}{EA} \cdot 0 = \frac{5\sqrt{2}\, F L^3}{12\, EI} \\
\alpha_{11} &= \int \frac{(\bar{M}_2)^2}{EI} dx + \int \frac{(\bar{N}_2)^2}{EA} dx \\
&= \frac{L}{EI} \left(\frac{2}{3} \cdot \left(-L\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \right) + \frac{\sqrt{2} L}{\frac{3\, EI}{5\, L^2}} \cdot 1^2 = \frac{(1 + 5\sqrt{2})\, L^3}{3\, EI}
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \quad S = \frac{-\alpha_{10}}{\alpha_{11}} = \frac{-5\sqrt{2}\, F L^3}{12\, EI} \cdot \frac{3\, EI}{(1 + 5\sqrt{2})\, L^3} = \frac{-5\sqrt{2}}{4(1 + 5\sqrt{2})} F \approx -0.22F
$$