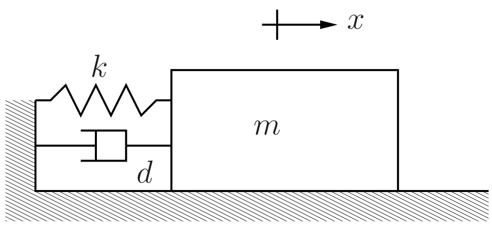
1. Aufgabe: (ca. 25 % der Gesamtpunkte)

a) Für ein mechanisches System ist folgende Differentialgleichung gegeben

$$\ddot{x} + \frac{K}{M}\,x = 0$$

Unter welcher Voraussetzung handelt es sich bei der Ruhelage $x = 0$ um ein stabiles Gleichgewicht?

b) Skizzieren Sie (ohne Rechnung) für folgendes System die Phasenkurve ($\dot{x}$ über x) für $x(0) = x_0 < 0$ und $\dot{x}(0) = 0$.

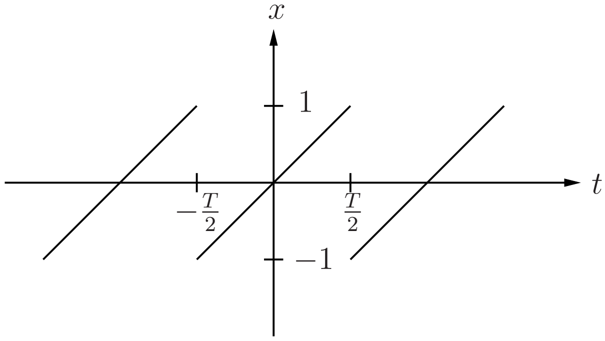


c) Ein System mit Windlast v_W hat folgende Form

$$\ddot{x} + \frac{d - a(v_W)}{m}\,\dot{x} + \frac{k}{m}\,x = 0$$

wobei k, m, d gegeben sind. Welchen Wert darf $a(v_W)$ nicht überschreiten, damit keine Anfachung der Schwingung erfolgt?

d) Berechnen Sie die Fourier-Koeffizienten für die dargestellte Funktion $x(t)$ für eine Periode $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$.



Hinweis:

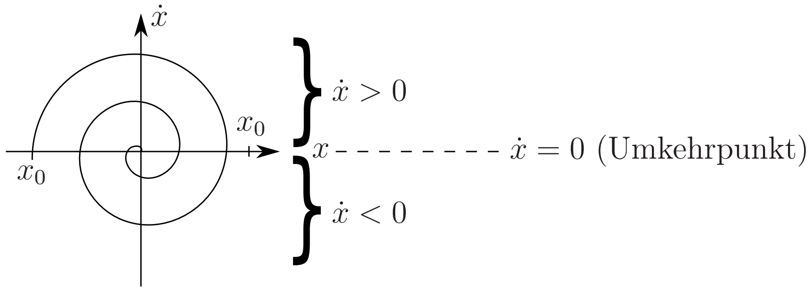
$$\int x\,\sin(a\,x)\,\mathrm{d}x = \frac{\sin(a\,x)}{a^2} - \frac{x\,\cos(a\,x)}{a}$$

Musterlösung - Aufgabe 1

a)

$$K > 0$$

b)



c)

$$\text{Anfachung erfolgt für:} \quad D < 0$$

$$\Rightarrow 2\,D\,\omega_0 = \frac{d - a(v_W)}{m}$$

$$D = \frac{d - a(v_W)}{2\,m\,\omega_0} < 0$$

$$a(v_W) > d$$

d) Fourier-Reihe

$$x_e(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{N} [C_k \cos(k\,\omega\,t) + S_k \sin(k\,\omega\,t)]$$

Funktion $x(t)$

$$x(t) = a\,t + b$$

$$x(0) = b = 0, \quad x(\frac{T}{2}) = a\,\frac{T}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{2}{T} \quad \Rightarrow x(t) = \frac{2}{T}\,t$$

$x(t)$ ist eine ungerade Funktion denn $x(-t) \neq x(t), \quad x(-t) = -x(t) \quad \forall t \in [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$
Fourier-Koeffizienten

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \underbrace{x(t)}_{\text{ungerade}} \,\mathrm{d}t = 0$$

$$C_k = a_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \underbrace{\underbrace{x(t)}_{\text{ungerade}}\ \underbrace{\cos(k\,\omega\,t)}_{gerade}}_{ungerade} \,\mathrm{d}t = 0$$

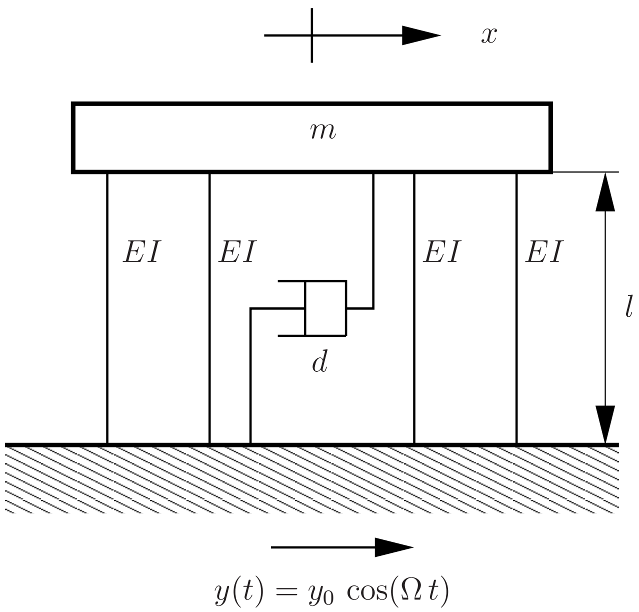
$$S_k = b_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\,\sin(k\,\omega\,t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{2}{T}\,t\,\sin(k\,\frac{2\,\pi}{T}\,t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{4}{T^2} [\underbrace{\frac{\sin(k\,\frac{2\pi}{T}\,t}{(k\,\frac{2\pi}{T})^2}}_{0} - \frac{t\,\cos(k\,\frac{2\pi}{T}\,t)}{k\,\frac{2\pi}{T}}]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} = -\frac{4}{T^2}\,\frac{1}{k\,\frac{2\pi}{T}}\,(\frac{T}{2}\,\cos(k\,\pi) - (-\frac{T}{2})\,\cos(-k\,\pi))$$

$$= -\frac{2\,\cos(k\,\pi)}{k\,\pi} = \begin{cases} \frac{2}{k\,\pi} & \text{für ungerade } k \\ -\frac{2}{k\,\pi} & \text{für gerade } k \end{cases}$$

2. Aufgabe: (ca. 30 % der Gesamtpunkte)

Gegeben ist der abgebildete Ein-Massen-Schwinger (z.B. Gebäude) bestehend aus vier masselosen, dehnsteifen Balken ($\rho = 0, EA \to \infty, EI, l$), einer Masse m und einem Dämpfer d. Dabei ist x eine Inertialkoordinate. Ferner ist eine Fremderregung des Untergrunds (z.B. Erdbeben) gegeben durch $y(t) = y_0 \cos(\Omega\, t)$. Es soll angenommen werden, dass sich die Masse m nur in horizontaler Richtung verschiebt.



Gegeben: EI, l, m, d, y_0, Ω.

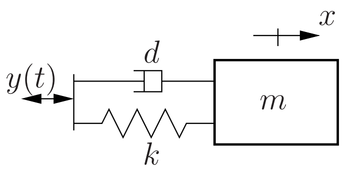
a) Skizzieren Sie ein eindimensionales Ersatzmodell des Systems und bestimmen Sie die Ersatzfedersteifigkeit k des gesamten Systems.

b) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung des Systems für die Koordinate x durch die synthetische Methode (Freischnitt/Newtonsche Axiome).

c) Bestimmen Sie die stationäre Systemantwort.

Musterlösung - Aufgabe 2

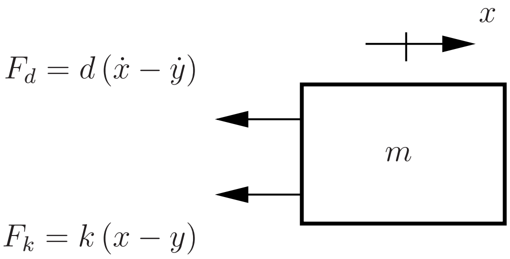
a) Ersatzmodell



Ersatzfedersteifigkeit

$$k = 4\,k_i = 4\,\frac{12\,EI}{l^3} = \frac{48\,EI}{l^3}$$

b) FKB



Bewegungsgleichung

$$m\,\ddot{x} = -k\,(x - y) - d\,(\dot{x} - \dot{y})$$

mit

$$y = y_0\,\cos(\Omega\,t), \quad \dot{y} = -y_0\,\Omega\,\sin(\Omega\,t)$$

ergibt

$$m\,\ddot{x} + d\,\dot{x} + k\,x = k\,y + d\,\dot{y} = y_0\,(k\,\cos(\Omega\,t) - d\,\Omega\,\sin(\Omega\,t)) = F_e$$

c) Mit $A\,\cos(\Omega\,t) + B\,\sin(\Omega\,t) = C\,\cos(\Omega\,t - \alpha), \quad C = \sqrt{A^2 + B^2}$

$$\begin{aligned}
m\,\ddot{x} + d\,\dot{x} + k\,x &= y_0\,\sqrt{k^2 + d^2\,\Omega^2}\,\cos(\Omega\,t - \alpha), \quad \alpha = 0 \text{ (stationäre Systemantwort)} \\
\ddot{x} + \frac{d}{m}\,\dot{x} + \frac{k}{m}\,x &= y_0\,\sqrt{\frac{k^2}{m^2} + \frac{d^2}{m^2}\,\Omega^2}\,\cos(\Omega\,t) \\
\omega_0^2\,x'' + \frac{d}{m}\,\omega_0^2\,x' + \omega_0^2\,x &= y_0\,\sqrt{\omega_0^4 + (2\,D)^2\,\omega_0^2\,\Omega^2}\,\cos(\Omega\,t) \\
x'' + 2\,D\,x' + x &= \underbrace{y_0\,\sqrt{1 + (2\,D\,\eta)^2}}_{\bar{y}_2}\,\cos(\Omega\,t)
\end{aligned}$$

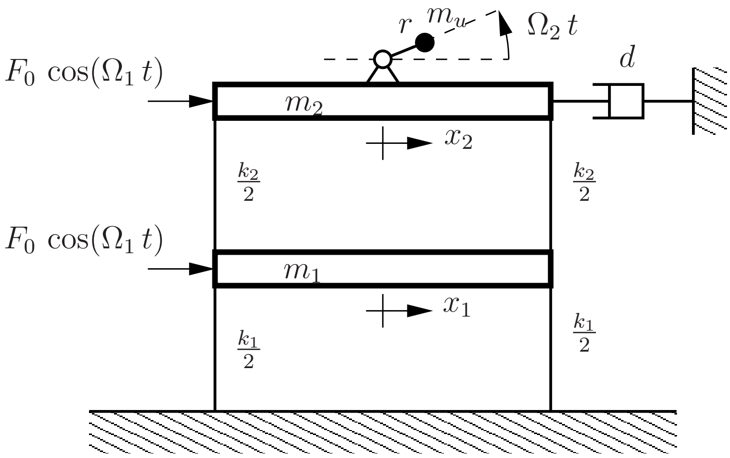
Partikuläre Lösung

$$q_p = C_p\,\cos(\eta\,\tau - \gamma) = C_p\,\cos(\Omega\,t - \gamma),$$

$$C_p = \bar{y}_2\,V = y_0\,V_2, \quad V = \frac{1}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + 4\,D^2\,\eta^2}}$$

3. Aufgabe: (ca. 45 % der Gesamtpunkte)

Der skizzierte Stockwerkrahmen (Gebäude) besteht aus starren Riegeln mit Massen m_1, m_2, masselosen Stielen mit Steifigkeiten $\frac{k_1}{2}$, $\frac{k_2}{2}$ und einem Dämpfer mit Dämpfungskonstante d. Ferner wird das System durch eine Krafterregung (Windlast) mit Amplitude F_0 und Erregerfrequenz Ω_1 und einer Unwuchterregung (Waschmaschine) mit Unwuchtmasse m_u, Unwuchtradius r und Erregerfrequenz Ω_2 zum Schwingen angeregt. Es soll angenommen werden, dass sich die Massen m_1 und m_2 nur in horizontaler Richtung verschieben.



Gegeben: $k_1, k_2, m_1, m_2, d, F_0, \Omega_1, m_u, r, \Omega_2$.

a) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen mit Hilfe des Lagrange Formalismus 2. Art auf.

b) Liegt durchdringende oder vollständige Dämpfung vor? Warum?

c) Es liege Windstille vor ($F_0 = 0$). Das erste Stockwerk kann nun auch als Schwingungstilger eingesetzt werden. Die partikuläre Lösung des Systems sei dann $\boldsymbol{a}_p = \boldsymbol{a}\, \cos(\Omega_2\, t)$ mit $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$. Welcher Bedingung muss a_2 genügen, damit Schwingungstilgung erfolgt und welchen Wert muss Ω_2 dafür annehmen?

Im Weiteren wird die Fremderregung (Windlast und Waschmaschine) sowie die Dämpfung entfernt. Es liegt folgendes System von Bewegungsgleichungen vor

$$\boldsymbol{M}\, \ddot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{K}\, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 2\, k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}$$

wobei m und k nun gegeben sind.

d) Schätzen Sie mit Hilfe des Rayleigh-Quotienten die erste Eigenkreisfrequenz ab.

e) Bestimmen Sie die Eigenkreisfrequenzen des Systems.

f) Bestimmen Sie die Modalvektoren und stellen Sie diese grafisch dar.

Musterlösung - Aufgabe 3

a)

$$\boldsymbol{r}_u = \begin{bmatrix} x_u \\ y_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 + r\,\cos(\Omega_2\,t) \\ r\,\sin(\Omega_2\,t) \end{bmatrix}, \quad \dot{\boldsymbol{r}}_u = \begin{bmatrix} \dot{x}_u \\ \dot{y}_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_2 - r\,\Omega_2\,\sin(\Omega_2\,t) \\ r\,\Omega_2\,\cos(\Omega_2\,t) \end{bmatrix}$$

$$v_u^2 = \|\dot{\boldsymbol{r}}_u\|^2 = \dot{x}_u^2 + \dot{y}_u^2 = \dot{x}_2^2 - 2\,r\,\Omega_2\,\dot{x}_2\,\sin(\Omega_2\,t) + r^2\,\Omega_2^2\,\underbrace{(\sin^2(\Omega_2\,t) + \cos^2(\Omega_2\,t))}_{1}$$

$$T = \frac{1}{2}\,m_1\,\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}\,m_2\,\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}\,m_u\,v_u^2$$

$$R = \frac{1}{2}\,d\,\dot{x}_2^2$$

$$V = \frac{1}{2}\,k_1\,x_1^2 + \frac{1}{2}\,k_2\,(x_1 - x_2)^2 + m_u\,g\,y_u$$

$$Q_k^* = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i\,\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial x_k}, \quad F_1 = F_0\,\cos(\Omega_1\,t), \quad r_1 = x_1, \quad F_2 = F_0\,\cos(\Omega_1\,t), \quad r_2 = x_2$$

Lagrange-Gleichungen für nicht-konservative Systeme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_k}) + \frac{\partial V}{\partial x_k} + \frac{\partial V}{\partial x_k} + \frac{\partial R}{\partial \dot{x}_k} = Q_k^*, \quad k = 1, ..., n$$

$$m_1\,\ddot{x}_1 + k_1\,x_1 + k_2\,(x_1 - x_2) = F_0\,\cos(\Omega_1\,t)$$

$$m_2\,\ddot{x}_2 + m_u\,(\ddot{x}_2 - r\,\Omega_2^2\,\cos(\Omega_2\,t)) - k_2\,(x_1 - x_2) + d\,\dot{x}_2 = F_0\,\cos(\Omega_1\,t)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 + mu \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{M}} \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix}}_{\ddot{\boldsymbol{x}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{D}} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}}_{\dot{\boldsymbol{x}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{K}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} F_0\,\cos(\Omega_1\,t) \\ F_0\,\cos(\Omega_1\,t) + m_u\,r\,\Omega^2\,\cos(\Omega_2\,t) \end{bmatrix}}_{\tilde{\boldsymbol{F}}}$$

b) Notwendige Bedingung für durchdringende Dämpfung: $R = \frac{1}{2}\,\dot{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{D}\,\dot{\boldsymbol{x}} \geq 0\,\forall \dot{\boldsymbol{x}} \neq \boldsymbol{0}$

R muss positiv semidefinit sein, d.h. alle Eigenwerte von $\boldsymbol{D}$ müssen größer Null und mind. ein Eigenwert muss Null sein

EWP für $\boldsymbol{D}$

$$\det(\boldsymbol{D} - \lambda\,\boldsymbol{I}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & d - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda\,(d - \lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = d$$

Nicht gefordert in Klausur: Hinreichende Bedingung für durchdringende Dämpfung:

Es liegt Kopplung in $\boldsymbol{K}$ vor. Falls EVen von $\boldsymbol{D}$ und Koeffizientenmatrix des ungedämpften Systems nicht jeweils linear abhängig sind.

EVen von $\boldsymbol{D}$

$$\lambda_1 = 0: \quad \boldsymbol{Q}_1: \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{11} \\ Q_{21} \end{bmatrix} = \boldsymbol{0} \quad Q_{11} \to \text{Unbekannte} \to \boldsymbol{Q}_1 = Q_{11}\,\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\Phi}_1}$$

$$\lambda_1 = 0: \quad \boldsymbol{Q}_2: \quad \begin{bmatrix} -d & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{12} \\ Q_{22} \end{bmatrix} = \boldsymbol{0} \quad Q_{22} \to \text{Unbekannte} \to \boldsymbol{Q}_1 = Q_{22}\,\underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\Phi}_2}$$

EVen von $\boldsymbol{K} - \omega^2\,\boldsymbol{M}$ siehe Aufgabe f) $\to$ nicht jeweils linear abhängig $\to$ System ist durchdringend gedämpft.

c)

$$\begin{aligned}
a_2 = 0 = \frac{Z_2}{N}, \quad F_0 = 0, \quad \boldsymbol{F}_c \cos(\Omega_2\, t) &= \begin{bmatrix} 0 \\ m_u\, r\, \Omega_2^2 \end{bmatrix} \cos(\Omega_2\, t) \\
= Z_2 = \begin{vmatrix} K_{11} - \Omega^2 M_{11} & F_{c1} \\ K_{21} - \Omega^2 M_{21} & F_{c2} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} k_1 + k_2 - \Omega_2^2\, m_1 & 0 \\ -k_2 & m_u\, r\, \Omega_2^2 \end{vmatrix} \\
= (k_1 + k_2 - \Omega_2^2\, m_1)\, m_u\, r\, \Omega_2^2 &
\end{aligned}$$

triviale Lösung $\Omega_2 = 0$

nicht triviale Lösung

$$\Omega_2 = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m_1}}$$

d) Schätze

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{oder} \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{etc.}$$

Rayleigh-Quotient

$$\tilde{R}_1 = \frac{\boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{K}\, \boldsymbol{\varphi}}{\boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{M}\, \boldsymbol{\varphi}} = \frac{2\,k}{5\,m} = \frac{2}{5}\, \omega_0^2 \geq \omega_1^2 \quad \text{oder} \quad \tilde{R}_2 = \frac{1}{2}\, \omega_0^2 \geq \omega_1^2 \quad \text{etc.}$$

e) Eigenwertproblem (EWP) mit Ansatz: $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{C} \cos(\omega t - \alpha)$

$$\left(\boldsymbol{K} - \omega^2 \boldsymbol{M}\right) \boldsymbol{C} = 0$$

Charakteristische Gleichung:

$$\begin{aligned}
&\det\left(\boldsymbol{K} - \omega^2 \boldsymbol{M}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2k - \omega^2 m & -k \\ -k & k - \omega^2 m \end{vmatrix} = 0 \\
&\Leftrightarrow \left(2k - \omega^2 m\right) \left(k - \omega^2 m\right) - k^2 = 0 \quad | : m^2 \text{ mit Bezugsfrequenz } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \\
&\Leftrightarrow (2 \underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega_0^2} - \omega^2)(\underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega_0^2} - \omega^2) - (\underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega_0^2})^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow 2\omega_0^4 - 3\omega_0^2\omega^2 + \omega^4 - \omega_0^4 = 0 \\
&\Leftrightarrow \omega^4 - 3\omega_0^2\omega^2 + \omega_0^4 = 0
\end{aligned}$$

Eigenkreisfrequenzen

$$\omega_{1/2}^2 = \frac{3\omega_0^2 \pm \sqrt{9\omega_0^4 - 4\omega_0^4}}{2} = \frac{3 \mp \sqrt{5}}{2} \omega_0^2, \quad \omega_1 = 0.62\omega_0, \quad \omega_2 = 1.62\omega_0$$

f) Amplitudenverhältnisse

$$\begin{aligned}
\mu_i &= -\frac{K_{11} - \omega_i^2 M_{11}}{K_{12} - \omega_i^2 M_{12}} = 2 - \left(\frac{\omega_i}{\omega_0}\right)^2 \\
\mu_1 &= 2 - \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = 1.62 \\
\mu_2 &= 2 - \frac{3 + \sqrt{5}}{2} = -0.62
\end{aligned}$$

Modalvektoren

$$\boldsymbol{C}_1 = C_{11} \begin{bmatrix} 1 \\ \mu_1 \end{bmatrix} = C_{11} \begin{bmatrix} 1 \\ 1.62 \end{bmatrix} \quad \text{Grundschwingung}$$

$$\boldsymbol{C}_2 = C_{12} \begin{bmatrix} 1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} = C_{12} \begin{bmatrix} 1 \\ -0.62 \end{bmatrix} \quad \text{Oberschwingung}$$