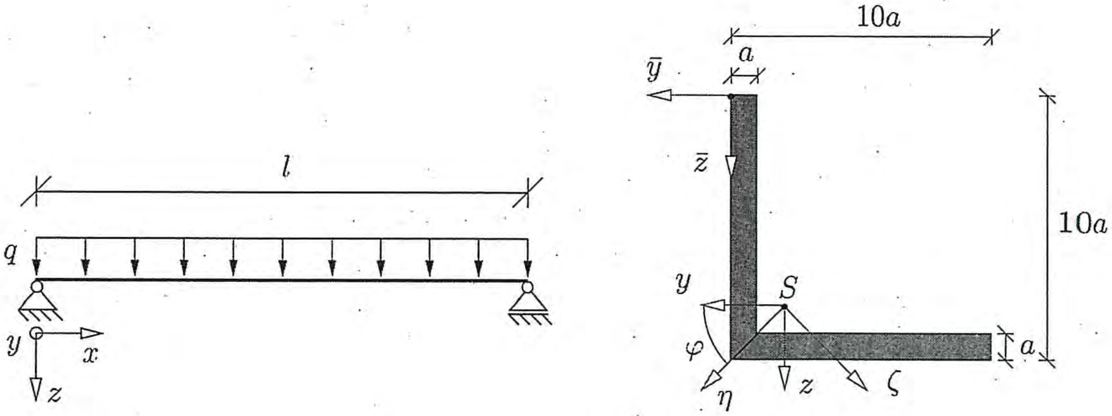
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. habil. P. Betsch
Prof. Dr.-Ing. habil. Th. Seelig

Modulprüfung
Festigkeitslehre
07. März 2017

1. Aufgabe: (ca. 30 % der Gesamtpunkte)



Gegeben sei das System sowie der Querschnitt eines Einfeldträgers. Belastet wird das System durch eine Streckenlast q.

a) Bestimmen Sie den Schwerpunkt S des Profils ausgehend von dem gegebenen $(\bar{y}, \bar{z})$ - Koordinatensystem sowie die Flächenträgheitsmomente I_y, I_z und I_{yz} des Profils bezüglich des Schwerpunktes S.

b) Bestimmen Sie die Hauptträgheitsmomente I_η, I_ζ bezüglich des Schwerpunktes S sowie den Winkel φ zwischen dem (y, z) und dem (η, ζ) Koordinatensystem.

c) An welcher Stelle $x = x^*$ ist der Querschnitt frei von Schubspannungen?

Im Weiteren sind die folgenden Werte zu verwenden: $I_\zeta = 300a^4$, $I_\eta = 75a^4$, $\varphi = 45°$, $x = \frac{l}{2}$

d) Bestimmen Sie die Gleichung der Nulllinie für die Normalspannung $\sigma(\eta, \zeta)$.

e) Skizzieren Sie die Lage der Nulllinie im Querschnitt und geben Sie den Ort der betragsmäßig größten Normalspannung an.

Gegeben: q, a, l

Hinweise:

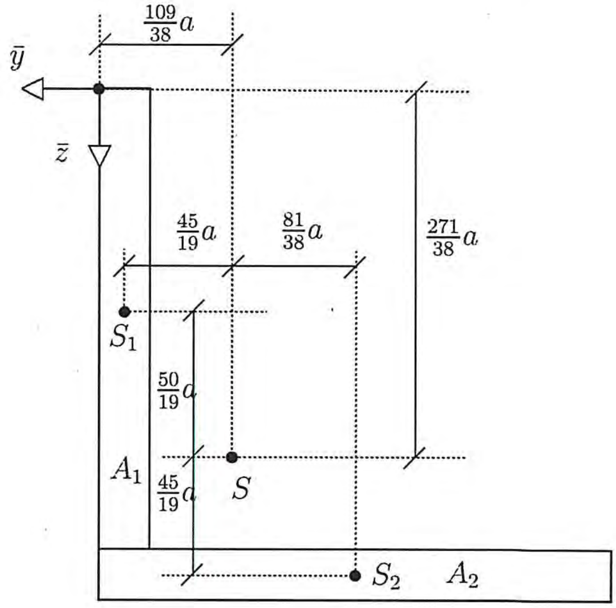
1) Lasteinleitung und Lagerung erfolgt torsionsfrei im Schubmittelpunkt.

2) Nur Lösungen mit Begründung werden bewertet.

Musterlösung - Aufgabe 1

a)

Berechnung Schwerpunkte



$$\begin{aligned} y_S &= \frac{\Sigma A_i y_i}{\Sigma A_i} \\ &= \frac{9a \cdot a(-\frac{1}{2}a) + 10a \cdot a\,(-5a)}{9a \cdot a + 10a \cdot a} \\ &= -\frac{109}{38}\,a \approx \underline{-2,8684\,a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_S &= \frac{\Sigma A_i z_i}{\Sigma A_i} \\ &= \frac{9a \cdot a \cdot 4,5a + 10a \cdot a \cdot 9,5a}{9a \cdot a + 10a \cdot a} \\ &= \frac{271}{38}\,a \approx \underline{7,1316\,a} \end{aligned}$$

Berechnung Flächenträgheitsmomente:

$$\begin{aligned} I_y &= \sum_i \left(\frac{b_i h_i^3}{12} + A_i z_i^2 \right) \\ &= \frac{a \cdot (9a)^3}{12} + 9a \cdot a \left(-\frac{50}{19}\,a \right)^2 + \frac{10a \cdot a^3}{12} + 10a \cdot a \left(\frac{45}{19}\,a \right)^2 \\ &= \frac{41041}{228}\,a^4 \approx \underline{180\,a^4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_z &= \sum_i \left(\frac{h_i b_i^3}{12} + A_i y_i^2 \right) \\ &= \frac{9a \cdot a^3}{12} + 9a \cdot a \left(\frac{45}{19}\,a \right)^2 + \frac{a \cdot (10a)^3}{12} + 10a \cdot a \left(-\frac{81}{38}\,a \right)^2 \\ &= \frac{41041}{228}\,a^4 \approx \underline{180\,a^4} \end{aligned}$$

Alternativ: $I_z = I_y$ mit Begründung, dass Querschnitt symmetrisch.

$$\begin{aligned} I_{yz} &= \sum_i (\underbrace{I_{yz,i}}_{=0} - y_i\, z_i A_i) \\ &= -\frac{45}{19}\,a \left(-\frac{50}{19}\,a \right) 9a \cdot a - \left(-\frac{81}{38}\,a \right) \frac{45}{19}\,a \cdot 10a \cdot a \\ &= \frac{2025}{19}\,a^4 \approx \underline{106,5789\,a^4} \end{aligned}$$

b)

Bestimmung der Hauptachsen und der Hauptträgheitsmomente

$$\begin{aligned}
\tan(2\varphi) &= \frac{2\,I_{yz}}{I_y - I_z} \\
&= \frac{2\cdot\frac{2025}{19}\,a^4}{180a^4 - 180a^4} \Rightarrow +\infty \\
\Longrightarrow \varphi &= \frac{1}{2}\arctan(+\infty) \\
&= \underline{45^\circ}
\end{aligned}$$

Alternativ: Argumentation, dass Hauptachse auf Symmetrieebene des Querschnittes liegt, woraus $\varphi = 45^\circ$ folgt.

$$I_{\eta,\zeta} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + {I_{yz}}^2}$$

$$\begin{aligned}
I_\eta &= \frac{\frac{41041}{228}\,a^4 + \frac{41041}{228}\,a^4}{2} + \sqrt{\left(\frac{\frac{41041}{228}\,a^4 - \frac{41041}{228}\,a^4}{2}\right)^2 + \left(\frac{2025}{19}\,a^4\right)^2} \\
&= \frac{3439}{12}\,a^4 \approx \underline{286,5833a^4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_\zeta &= \frac{\frac{41041}{228}\,a^4 + \frac{41041}{228}\,a^4}{2} - \sqrt{\left(\frac{\frac{41041}{228}\,a^4 - \frac{41041}{228}\,a^4}{2}\right)^2 + \left(\frac{2025}{19}\,a^4\right)^2} \\
&= \frac{16741}{228}\,a^4 \approx \underline{73,5254a^4}
\end{aligned}$$

c)

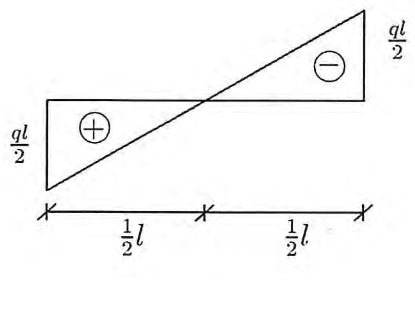
An welcher Stelle verschwindet die Schubspannung τ im kompletten Querschnitt?

$$\tau = \tau_T + \tau_Q = \frac{M_T(x^*)}{2A_m\,t} + \frac{Q(x^*)\,S(z)}{I_y\,b(z)}$$

$$M_T(x^*) \equiv 0$$

$$\begin{aligned}
S(z) \neq 0;\ I_y\,b(z)\ \text{geht nicht gegen}\ \infty \quad &\Leftrightarrow \quad Q(x^*) \stackrel{!}{=} 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \underline{x^* = \frac{l}{2}}
\end{aligned}$$

Verlauf von Q(x):

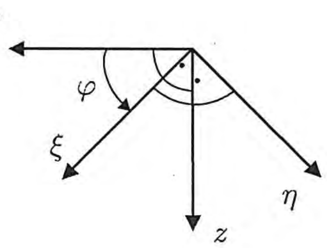


d)

Bestimmung der Gleichung der Normalspannungsnulllinie:

Nun gegebene Werte:

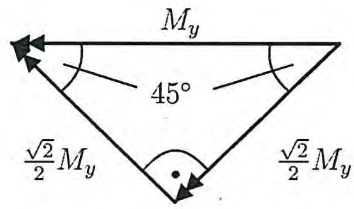
$$\begin{aligned} x &= \frac{l}{2} = \frac{100a}{2} = 50a, \\ \varphi &= 45^\circ, \\ I_\eta &= 75a^4, \\ I_\zeta &= 300a^4 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} M_y\left(x = \frac{l}{2}\right) &= \frac{ql^2}{8} \\ \sigma(\eta,\zeta) &= \frac{M_\eta}{I_\eta}\zeta - \frac{M_\zeta}{I_\zeta}\eta \end{aligned}$$

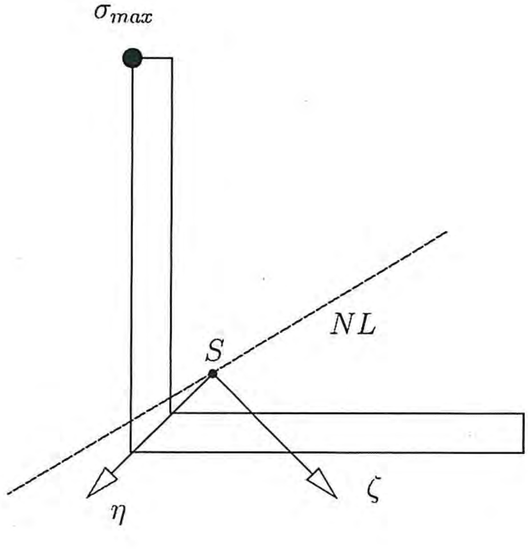
Drehen und Aufteilen der Momente (analog zu Kräften) um $\varphi = 45°$

$$\begin{aligned} M_\eta &= \frac{\sqrt{2}}{2} M_y = \frac{\sqrt{2}}{16} q\, l^2 \\ M_\zeta &= -\frac{\sqrt{2}}{2} M_y = -\frac{\sqrt{2}}{16} q\, l^2 \end{aligned}$$



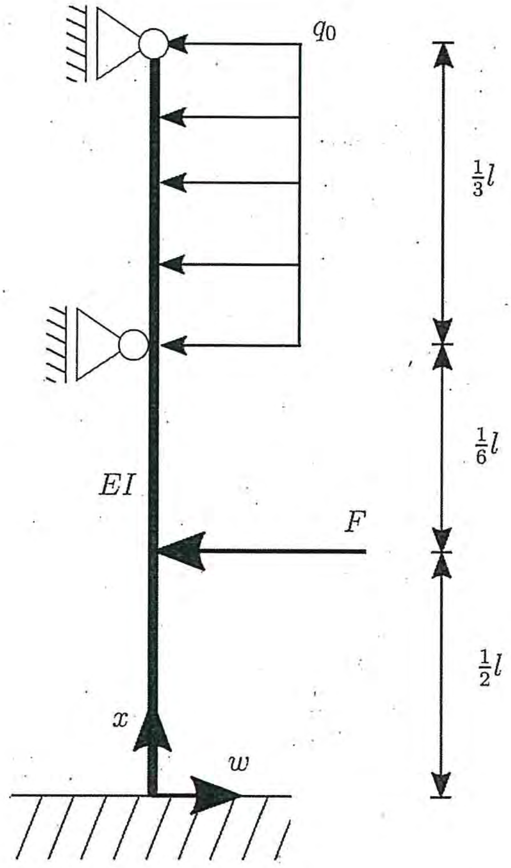
$$\begin{aligned} \sigma(\eta,\zeta) &= \frac{\sqrt{2} q\, l^2}{16 \cdot 75\, a^4}\zeta - \frac{-\sqrt{2} q\, l^2}{16 \cdot 300\, a^4}\eta \stackrel{!}{=} 0 \\ &\Leftrightarrow \underline{\zeta = -\frac{1}{4}\eta} \end{aligned}$$

e)



$\|\sigma_{max}\|$ an Stelle mit maximalem Abstand zu Spannungsnulllinie

2. Aufgabe: (ca. 20 % der Gesamtpunkte)



Der oben dargestellte Balken (EI =konst) der Gesamtlänge l wird durch eine konstante Streckenlast q_0 und durch eine Einzelkraft F belastet.

a) Bestimmen Sie den Grad der statischen Unbestimmtheit.

b) Unterteilen Sie das System in mehrere Felder und führen Sie anschließend die Integration der DGL der Biegelinie $w(x)$ für den gesamten Träger durch. Geben Sie die Anzahl der der Integrationskonstanten an, die bestimmt werden müssen.

c) Geben Sie alle erforderlichen Übergangs- und Randbedingungen zur Bestimmung sämtlicher Integrationskonstanten an.

Gegeben: l, q_0, EI, F

Musterlösung - Aufgabe 2

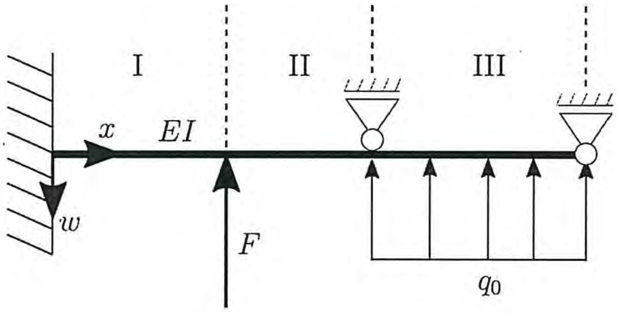
a)

Grad der statischen Unbestimmtheit

$$r + a = 3n \Leftrightarrow 5 + 0 - 3 \;=\; 2 \qquad \rightarrow \text{2-fach stat. unbestimmt}$$

mit $n = 1 \mathrel{\widehat{=}}$ Balken
$r = 5 \mathrel{\widehat{=}}$ Lagerreaktionen
$a = 0 \mathrel{\widehat{=}}$ Gelenke

b)



Bereich I:

$$\begin{aligned}
EIw_I'''' &= 0\\
EIw_I''' &= C_1\\
EIw_I'' &= C_1x + C_2\\
EIw_I' &= \tfrac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3\\
EIw_I &= \tfrac{1}{6}C_1x^3 + \tfrac{1}{2}C_2x^2 + C_3x + C_4
\end{aligned}$$

Bereich II:

$$\begin{aligned}
EIw_{II}'''' &= 0\\
EIw_{II}''' &= C_5\\
EIw_{II}'' &= C_5x + C_6\\
EIw_{II}' &= \tfrac{1}{2}C_5x^2 + C_6x + C_7\\
EIw_{II} &= \tfrac{1}{6}C_5x^3 + \tfrac{1}{2}C_6x^2 + C_7x + C_8
\end{aligned}$$

Bereich III:

$$\begin{aligned}
EIw_{III}'''' &= q(x) = -q_0\\
EIw_{III}''' &= -q_0x + C_9\\
EIw_{III}'' &= -\tfrac{1}{2}q_0x^2 + C_9x + C_{10}\\
EIw_{III}' &= -\tfrac{1}{6}q_0x^3 + \tfrac{1}{2}C_9x^2 + C_{10}x + C_{11}\\
EIw_{III} &= -\tfrac{1}{24}q_0x^4 + \tfrac{1}{6}C_9x^3 + \tfrac{1}{2}C_{10}x^2 + C_{11}x + C_{12}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ 12 Integrationskonstanten

c)

Geometrie:

Randbedingungen:

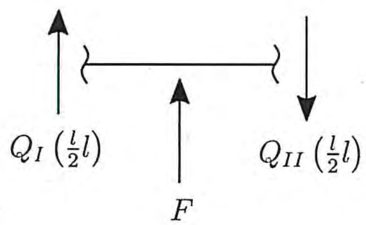
$$w_I(0) = 0$$
$$w_I'(0) = 0$$
$$w_{II}(\tfrac{2}{3}l) = w_{III}(\tfrac{2}{3}l) = 0$$
$$w_{III}(l) = 0$$

Übergangsbedingungen:

$$w_I(\tfrac{1}{2}l) = w_{II}(\tfrac{1}{2}l)$$
$$w_I'(\tfrac{1}{2}l) = w_{II}'(\tfrac{1}{2}l)$$
$$w_{II}'(\tfrac{2}{3}l) = w_{III}'(\tfrac{2}{3}l)$$

Statik:

$$\begin{aligned} M_{III}l &= -EIw''_{III} = 0 \\ M_{II}(\tfrac{2}{3}l) &= M_{III}(\tfrac{2}{3}l) & \rightarrow EIw''_{II}(\tfrac{2}{3}l) = EIw''_{III}(\tfrac{2}{3}l) \\ M_I(\tfrac{1}{2}l) &= M_{II}(\tfrac{1}{2}l) & \rightarrow EIw''_I(\tfrac{1}{2}l) = EIw''_{II}(\tfrac{1}{2}l) \end{aligned}$$

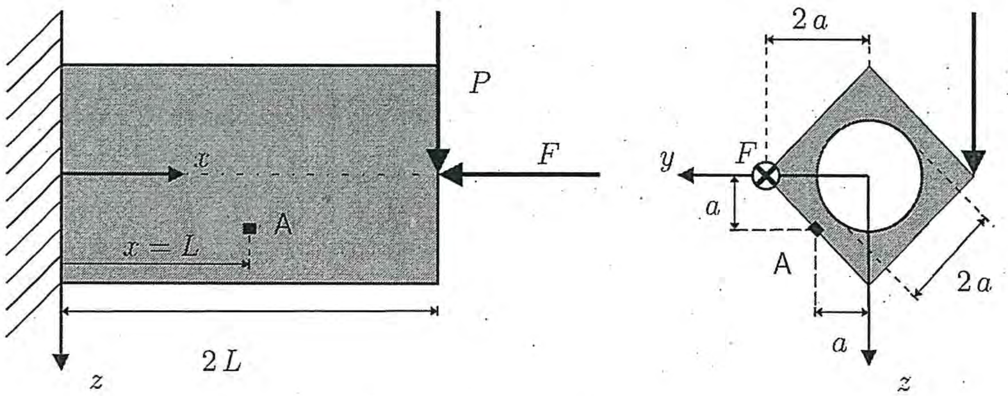


$$Q_I(\tfrac{1}{2}l) + F - Q_{II}(\tfrac{1}{2}l) = 0$$
$$\rightarrow \; EIw'''_{II}(\tfrac{1}{2}l) - EIw'''_I(\tfrac{1}{2}l) + F = 0$$

Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. habil. P. Betsch
Prof. Dr.-Ing. habil. Th. Seelig

Modulprüfung
Festigkeitslehre
07. März 2017

3. Aufgabe: (ca. 25 % der Gesamtpunkte)



Ansicht | Querschnitt

Der dargestellte Kragarm hat den abgebildeten quadratischen Querschnitt mit einer kreisförmigen Aussparung. Der Querschnitt des Kragarms kann als dünnwandig angesehen werden. Am Ende des Kragarms greifen die Einzellasten P und F parallel zur $z-$ bzw. $x-$Achse an.

a) Bestimmen Sie die Normalkraft N, die Querkraft Q_z die Biegemomente M_y und M_z sowie das Torsionsmoment M_T an der Stelle $x = L$.

b) Berechnen Sie die Spannung σ_x in Punkt A.

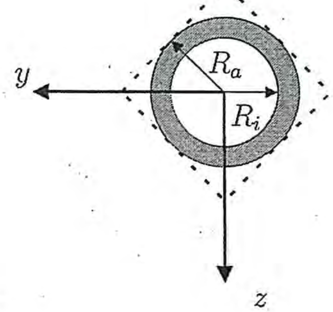
c) Skizzieren Sie qualitativ den Schubfluss im Querschnitt, der sich infolge Querkraft und Torsion einstellt. Begründen Sie die jeweilige Richtung des Schubflusses.

d) Ermitteln Sie die in Punkt A auftretenden Schubspannungen τ_Q und τ_T für die beiden Lastfälle in Aufgabenteil c).

Gegeben: $a, L = 20a, P, F = 8P, I_y = I_z = \dfrac{a^4}{12}(64 - 3\,\pi)$

Hinweis:
Das Torsionsmoment wird unter Vernachlässigung der Ecken berechnet. Für das Kreisrohr gilt:

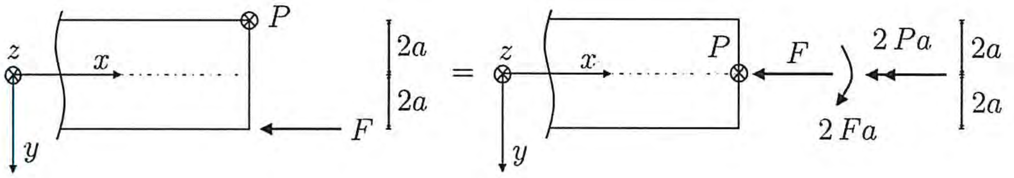
$$I_T = I_P = \frac{\pi}{2}(R_a^4 - R_i^4)$$



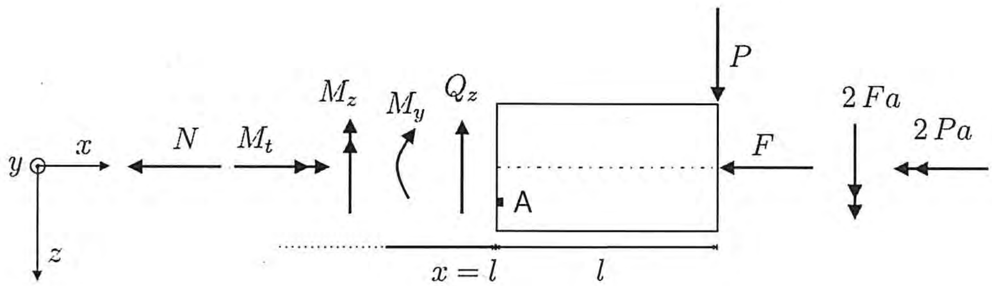
Musterlösung - Aufgabe 3

a)

Belastung in xy-Ansicht:



Schnittgrößen an $x = l$:



$$
\begin{aligned}
N &= -F = -8P \\
Q_z &= P \\
M_y &= -Pl = -20Pa \\
M_z &= 2Fa = 16Pa \\
M_T &= -2Pa
\end{aligned}
$$

b)

Normalspannungen in A $(y = a, z = a)$

$$
\sigma_x(y,z) = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y} z - \frac{M_z}{I_z} y
$$

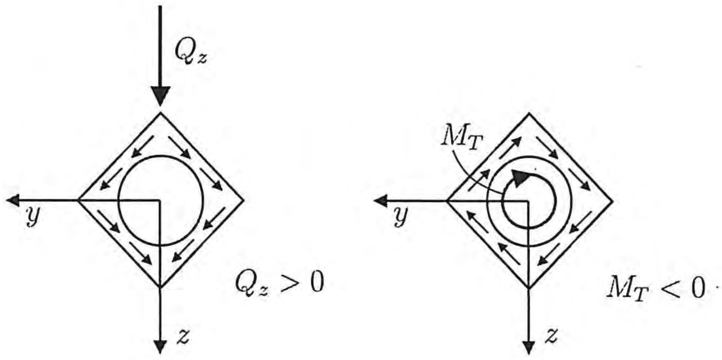
$$
\text{mit } A = 2(2a)^2 - \pi a^2 = (8-\pi)a^2 \approx 4,8584a^2
$$

$$
I_y = I_z = \frac{a^4}{12}(64 - 3\pi) \approx 4,5479a^4
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_x(y = a, z = a) &= \frac{-8P}{(8-\pi)a^2} + \frac{-20Pa}{\frac{a^4}{12}(64-3\pi)} a - \frac{16Pa}{\frac{a^4}{12}(64-3\pi)} a \\
&= -9,5632 \frac{P}{a^2}
\end{aligned}
$$

c)

Schubfluss infolge: Querkraft Torsion



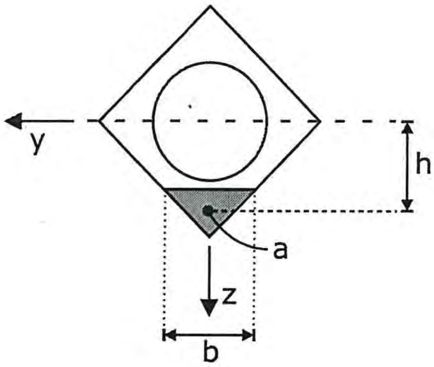
$\rightarrow$ Richtung der Schubspannung hängt von der Schnittgröße ab.

d)

Schubspannungen in A

- Vertikale Schubspannungskomponente infolge Querkraft

$$\tau_Q = \frac{Q_z S_y}{I_y b}$$

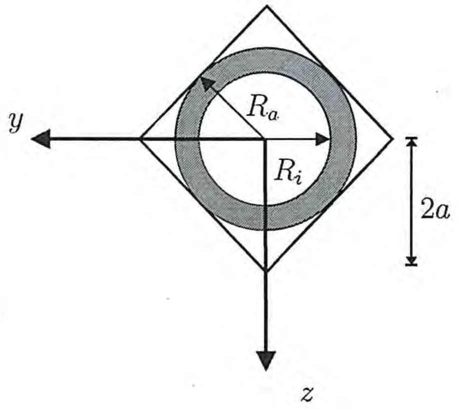


$$S_y(z = a) = A^* z^* = a^2\left(a + \frac{a}{3}\right) = \frac{4}{3}a^3$$
$$b(z^*) = 2a$$
$$I_y = \frac{a^4}{12}(64 - 3\pi) \qquad \text{aus Hinweis}$$

$$\Rightarrow \tau_Q = \frac{P\,\frac{4}{3}a^3}{\frac{a^4}{12}(64 - 3\pi)\,2a} = \frac{8\,P}{(64 - 3\pi)\,a^2} = 0,147\,\frac{P}{a^2}$$

- Schubspannung infolge Torsion

$$\tau_T = \frac{M_T}{I_T}\,r$$



$$
\begin{aligned}
R_a &= \sqrt{2}\,a \\
R_i &= a \\
I_T &= \frac{\pi}{2}\left(R_a^4 - R_i^4\right) = \frac{\pi}{2}\left(\left(\sqrt{2}a\right)^4 - a^4\right) = \frac{3}{2}\pi a^4 \\
&= 4,712a^4
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \tau_T = \frac{-2Pa}{\frac{2}{3}\pi a^4}\sqrt{2}\,a = -0,60\,\frac{P}{a^2}$$

Alternative Lösung τ_T unter Annahme dünnwandiges Profil:

mit $r_i = a$

$r_a = \sqrt{2}a$

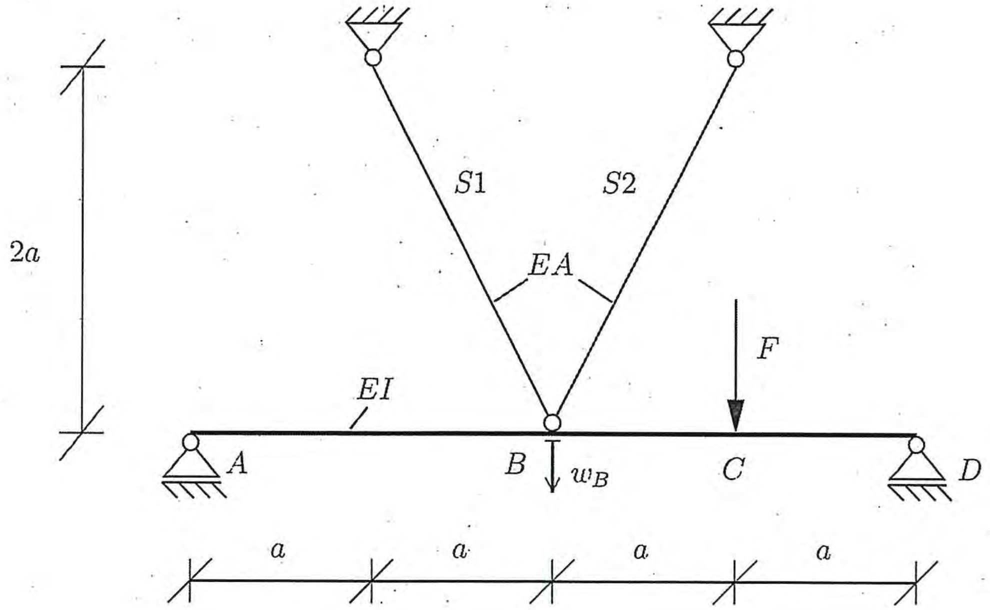
$r_m = \frac{r_a+r_i}{2} = \left(\frac{\sqrt{2}+1}{2}\right) a = 1,2071\,a$

$A_M = \pi\, r_m^2 = \pi\,(1,2071a)^2 = 4,5776\,a^2$

$t = r_a - r_i = \sqrt{2}a - a = \left(\sqrt{2}-1\right) a = 0,4142\,a$

$$\tau_T = \frac{M_T}{2A_M t} = \frac{-2Pa}{2 \cdot 4,5776a^2 \cdot 0,4142a} = -0,5274\,\frac{P}{a^2}$$

4. Aufgabe: (ca. 25 % der Gesamtpunkte)



Gegeben ist das dargestellte System einer abgehängten Brücke, welche aus einem Biegestab und zwei Dehnstäben besteht und im Punkt C durch eine Einzelkraft F belastet wird.

a) Berechnen Sie die Stabkräfte S_1 und S_2.

b) Wie groß ist die Durchbiegung w_B des Balkens im Punkt B?

Gegeben: F, a, EI, EA

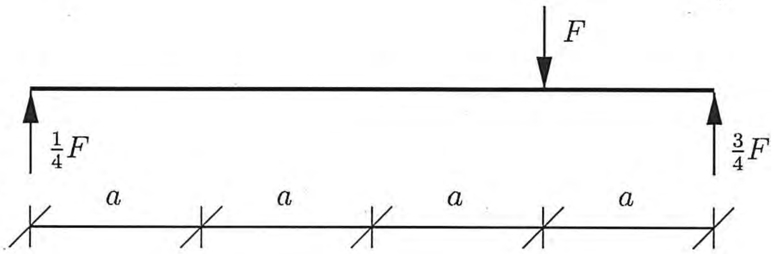
Musterlösung - Aufgabe 4

a)

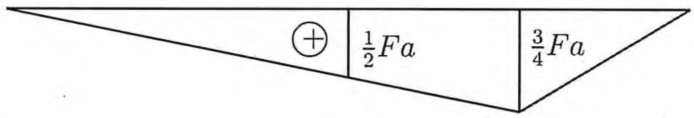
Aus $\Sigma H = 0$ folgt: $S_1 = S_2$

<u>0-System: $S_1 = S_2 = 0$</u>

System



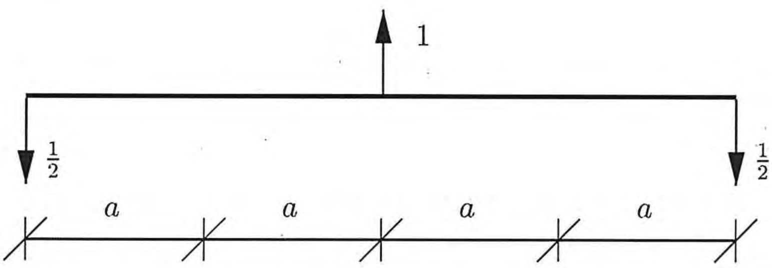
M_0-Verlauf



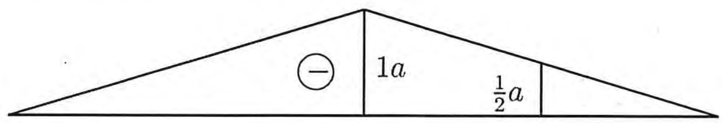
N_0-Verlauf: $N_1 = N_2 = 0$

<u>1-System</u>

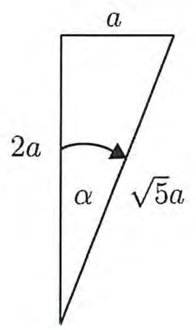
System



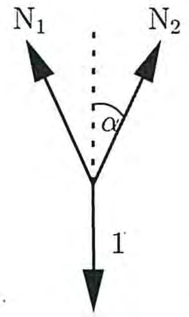
M_1-Verlauf



N_1-Verlauf: $N_1 = N_2 = \frac{\sqrt{5}}{4}$



$$cos(\alpha) = \frac{2a}{\sqrt{5a}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$



$$\begin{aligned} \Sigma H = 0 \rightarrow -N_1 \sin(\alpha) + N_2 \sin(\alpha) = 0 \\ \Leftrightarrow N_1 = N_2 \\ \Sigma V = 0 \rightarrow -1 + N_1 \cos(\alpha) + N_2 \cos(\alpha) = 0 \\ \Leftrightarrow N_1 = N_2 = \frac{1}{2\cos(\alpha)} = \frac{\sqrt{5}}{4} \end{aligned}$$

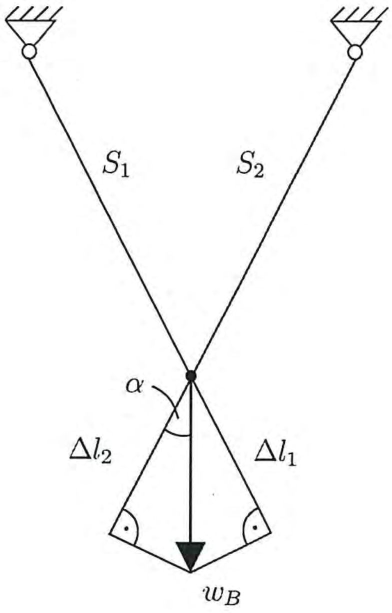
$$\begin{aligned} \delta_{10} &= \frac{1}{EI}\left[-\frac{1}{3}\frac{1}{2}Fa \cdot a \cdot 2a - \left(\frac{1}{6}\left(2\frac{1}{2}Fa + \frac{3}{4}Fa\right) + \frac{1}{6}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}Fa + 2\frac{3}{4}Fa\right)\right)a - \frac{1}{3}\frac{3}{4}Fa\frac{1}{2}a\,a\right] \\ &= \frac{Fa^3}{EI}\left(-\frac{1}{3} - \frac{11}{24} - \frac{1}{8}\right) \\ &= -\frac{11}{12}\frac{Fa^3}{EI} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{3} \cdot (-a)(-a) \cdot 2a \cdot 2\right] + \frac{1}{EA}\left[\frac{\sqrt{5}}{4} \cdot \frac{\sqrt{5}}{4} \cdot \sqrt{5} \cdot 2\right] \\ &= \frac{4}{3}\frac{a^3}{EI} + \frac{5\sqrt{5}}{8}\frac{a}{EA} \end{aligned}$$

$$X = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = \frac{F}{\frac{16}{11} + \frac{15}{22\sqrt{5}} + \frac{EI}{a^2 EA}}$$

$$\begin{aligned} S_1 = S_2 &= \frac{X}{2 \cdot \cos(\alpha)} = \frac{\sqrt{5}}{4} \cdot X \\ &= -\frac{\sqrt{5}}{4}\left[\frac{-\frac{11}{12}\frac{Fa^3}{EI}}{\frac{4}{3}\frac{a^3}{EI} + \frac{5\sqrt{5}}{8}\frac{a}{EA}}\right] \\ &= \frac{F}{\frac{64}{11\sqrt{5}} + \frac{30}{11}\frac{EI}{a^2 EA}} \end{aligned}$$

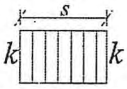
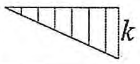
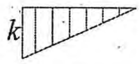
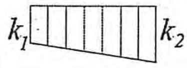
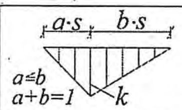
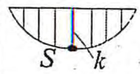
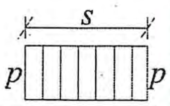
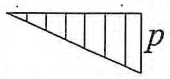
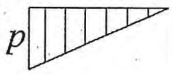
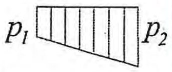
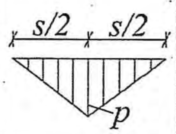
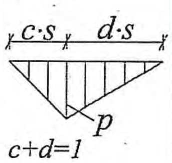
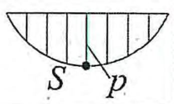
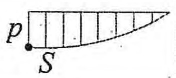
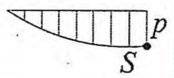
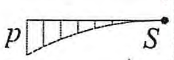
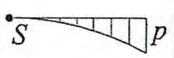
b)



$$l_1 = l_2 = \sqrt{5}a$$
$$\Delta l_1 = \Delta l_2 = \frac{S_1 \cdot l_1}{EA}$$

$$\begin{aligned} w_B &= \frac{\Delta l_1}{\cos(\alpha)} = \frac{S_1 \cdot l_1 \sqrt{5}}{EA \cdot 2} = \frac{\sqrt{5}\sqrt{5} \cdot a}{2} \cdot \frac{S_1}{EA} = \frac{5}{2} \cdot a \, \frac{F}{\frac{64}{11\sqrt{5}}EA + \frac{30}{11}\frac{EI}{a^2}} \\ &= \frac{5Fa}{\frac{128}{11\sqrt{5}}EA + \frac{60}{11}\frac{EI}{a^2}} \end{aligned}$$

Werte der Integrale $\int_0^s P(x) \cdot K(x) \mathrm{d}x$

K(x) / P(x)						
	pks	$\frac{1}{2}pks$	$\frac{1}{2}pks$	$\frac{p}{2}(k_1+k_2)s$	$\frac{1}{2}pks$	$\frac{2}{3}pks$
	$\frac{1}{2}pks$	$\frac{1}{3}pks$	$\frac{1}{6}pks$	$\frac{p}{6}(k_1+2k_2)s$	$\frac{1}{6}pk(1+a)s$	$\frac{1}{3}pks$
	$\frac{1}{2}pks$	$\frac{1}{6}pks$	$\frac{1}{3}pks$	$\frac{p}{6}(2k_1+k_2)s$	$\frac{1}{6}pk(1+b)s$	$\frac{1}{3}pks$
	$\frac{k}{2}(p_1+p_2)s$	$\frac{k}{6}(p_1+2p_2)s$	$\frac{k}{6}(2p_1+p_2)s$	$[\frac{p_1}{6}(2k_1+k_2) + \frac{p_2}{6}(k_1+2k_2)]s$	$[\frac{k}{6}[p_1(1+b)+p_2(1+a)]s$	$\frac{k}{3}(p_1+p_2)s$
	$\frac{1}{2}pks$	$\frac{1}{4}pks$	$\frac{1}{4}pks$	$\frac{p}{4}(k_1+k_2)s$	$\frac{pk}{12b}(3-4a^2)s$	$\frac{5}{12}pks$
	$\frac{1}{2}pks$	$\frac{pk}{6}(1+c)s$	$\frac{pk}{6}(1+d)s$	$\frac{p}{6}[k_1(1+d)+k_2(1+c)]s$	$\frac{pk}{6bc}(2c-c^2-a^2)s$ für $c \geq a$	$\frac{pk}{3}(1+cd)s$
	$\frac{2}{3}pks$	$\frac{1}{3}pks$	$\frac{1}{3}pks$	$\frac{p}{3}(k_1+k_2)s$	$\frac{pk}{3}(1+ab)s$	$\frac{8}{15}pks$
	$\frac{2}{3}pks$	$\frac{1}{4}pks$	$\frac{5}{12}pks$	$\frac{p}{12}(5k_1+3k_2)s$	$\frac{pk}{12}(5-a-a^2)s$	$\frac{7}{15}pks$
	$\frac{2}{3}pks$	$\frac{5}{12}pks$	$\frac{1}{4}pks$	$\frac{p}{12}(3k_1+5k_2)s$	$\frac{pk}{12}(5-b-b^2)s$	$\frac{7}{15}pks$
	$\frac{1}{3}pks$	$\frac{1}{12}pks$	$\frac{1}{4}pks$	$\frac{p}{12}(3k_1+k_2)s$	$\frac{pk}{12}(1+b+b^2)s$	$\frac{1}{5}pks$
	$\frac{1}{3}pks$	$\frac{1}{4}pks$	$\frac{1}{12}pks$	$\frac{p}{12}(k_1+3k_2)s$	$\frac{pk}{12}(1+a+a^2)s$	$\frac{1}{5}pks$

$S \mathrel{\hat{=}}$ Scheitel einer quadratischen Parabel