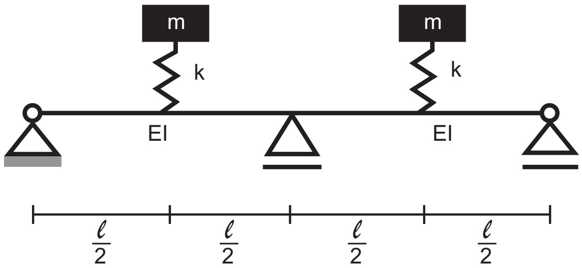
1. Aufgabe: (ca. 17% der Gesamtpunkte)

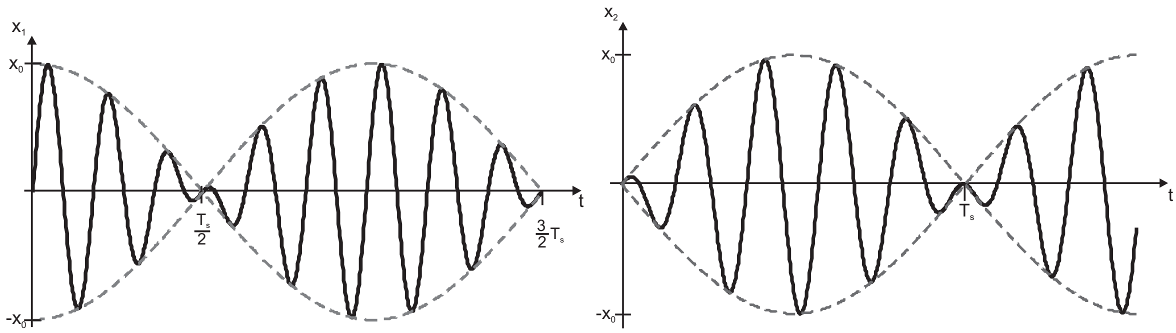
a) Zeichnen und erläutern Sie das Amplitudenspektrum einer periodischen Schwingung.

b) Zeichnen Sie das Amplitudenspektrum des Dirac-Stoßes. Wie kann dies in der experimentellen Dynamik genutzt werden? Was ist das Problem dieser Methode in der Baudynamik?

c) Zwei benachbarte Gebäude seien auf einem Boden gegründet der als sehr steif und dämpfungsfrei betrachtet werden kann. Bei der Modellierung der Gebäude betrachten wir einen zweifeldrigen Balken mit konstanter Biegesteifigkeit EI, auf dem jeweils in Feldmitte ein schwingungsfähiges Gebilde steht. Beide Teilschwinger besitzen die Masse m und sind über eine Feder der Steifigkeit k mit dem Balken verbunden.



Es stellt sich folgende Schwingung (Gebäude 1: Auslenkung X_1, Gebäude 2: Auslenkung X_2) ein.



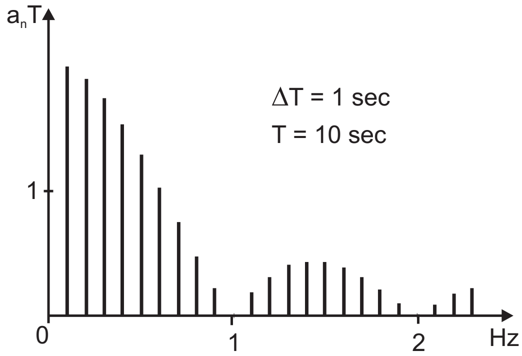
Wie heißt das Phänomen und wie kann das Phänomen theoretisch verhindert und praktisch abgemildert werden?

d) Die Amplituden eines fremderregten, ungedämpften Schwingers mit zwei Freiheitsgraden lassen sich mit der Cramerschen Regel über $a_i = \frac{Z_i}{N}$ bestimmen.

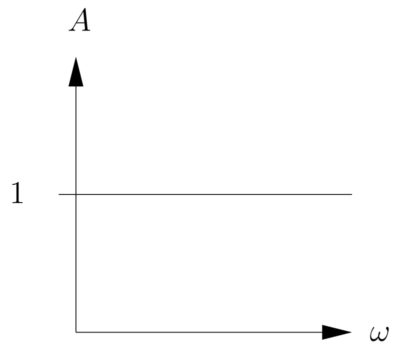
i) Wie heißt der Effekt, für den sowohl Z_i als auch N Null wird? Ist die Auslenkung dann endlich?

ii) Wieso sollte man den Schwinger nicht mit der Stelle aus i) bemessen?

Musterlösung - Aufgabe 1

a) 

periodisch, Linienspektrum (diskret)

b) 

konstantes Spektrum

- Stoßanregung von Gebäude regt alle Frequenzen gleichmäßig an
- durch Filterwirkung der Vergrößerungsfunktion können aus der Antwort die Eigenfrequenzen des Gebäudes bestimmt werden
- Gebäude/Brücken sehr groß und Stoßanregung daher schwierig

c) Phänomen: Schwebung
Verhinderung: Unendlich steifer Boden
Abmilderung: Dämpfung

d) i) Scheinresonanz, Ausschlag ist endlich

ii) Kenntnisse des Systems (m_{ij}, k_{ij}, Ω) nicht immer exakt bekannt und kleine Abweichungen heben Scheinresonanz auf

2. Aufgabe: (ca. 11% der Gesamtpunkte)

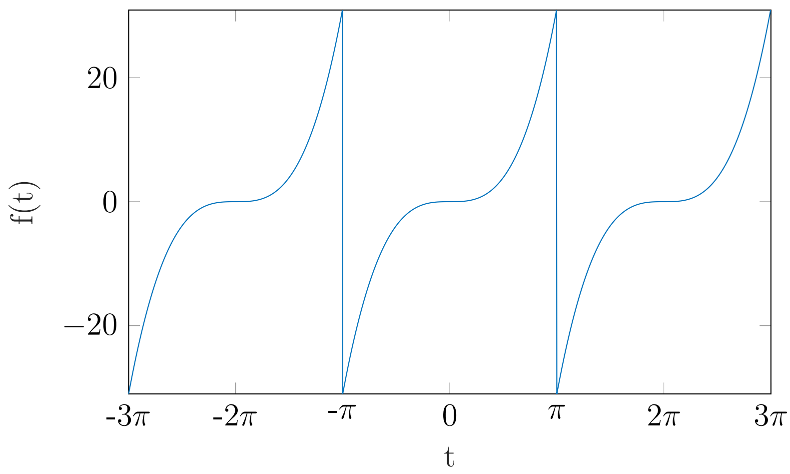
Betrachtet wird eine $2\,\pi$-periodische Funktion $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ mit

$$\begin{cases} f(t) = t^3 & \text{für } t \in [-\pi, \pi) \\ f(t+2\,\pi) = f(t) & \text{für } t \in \mathbb{R} \end{cases} \quad .$$

- Skizzieren Sie die Funktion auf dem Intervall $[-3\,\pi, 3\,\pi]$.
- Stellen Sie die Integrale zur Bestimmung der Fourierkoeffizienten von $f(t)$ auf. Begründen Sie anhand der Integrale welche Fourierkoeffizienten Null und welche Fourierkoeffizienten von Null verschieden sind? **Berechnung nicht erforderlich!**

Musterlösung - Aufgabe 2

a) Skizze



b) $f(t)$ ist eine ungerade Fkt. $f(t) = -f(-t)\ \forall t \in \mathbb{R}$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T \underbrace{f(t)}_{\text{ungerade}} \,\mathrm{d}t = 0$$

Integral über symmetrisches Intervall einer ungeraden Fkt. ist $= 0$ bzw. siehe Flächeninhalt in a)

$$a_k = C_k = \frac{2}{T}\int_0^T \underbrace{f(t)}_{\text{ungerade}}\ \underbrace{\cos(k\,\omega\,t)}_{\text{gerade}}\,\mathrm{d}t = 0$$

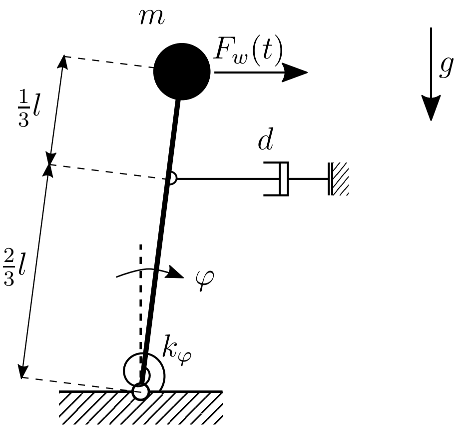
ungerade mal gerade Fkt. ergibt ungerade Fkt.; Integral über symmetrisches Intervall einer ungerade Fkt. ist $= 0$

$$b_k = S_k = \frac{2}{T}\int_0^T \underbrace{f(t)}_{\text{ungerade}}\ \underbrace{\sin(k\,\omega\,t)}_{\text{ungerade}}\,\mathrm{d}t \neq 0$$

ungerade mal ungerade Fkt. ergibt gerade Fkt.; Integral über gerade Fkt. ist $\neq 0$

3. Aufgabe: (ca. 27% der Gesamtpunkte)

Das Windschwingungsverhalten eines Wasserturms soll mit einem einfachen Ersatzsystem (siehe Abbildung) untersucht werden. Die als Punktmasse idealisierte Kopfmasse m ist dabei mit einem starren, masselosen Stab der Länge l und einer linearen Drehfeder mit Drehfedersteifigkeit k_φ mit dem Boden verbunden. Weiterhin ist bei einem Abstand $\frac{2}{3}l$ vom unteren Stabende ein Dämpfer, der durch konstruktive Maßnahmen immer horizontal bleibt, angebracht. Es wirkt die Gravitation g. Die Windlast wird über eine harmonische Kraft $F_w(t) = F_0 \cos(\Omega t)$ der Frequenz Ω und Amplitude F_0 simuliert.



Gegeben: $k_\varphi, l, m, d, F_0, \Omega, g$.

a) Bestimmen Sie die linearisierte Bewegungsgleichung des Systems für die Koordinate φ mit Hilfe der synthetischen Methode (Freischneiden).

b) Geben Sie die Eigenfrequenz und das Lehrsche Dämpfungsmaß des gedämpften Systems an.

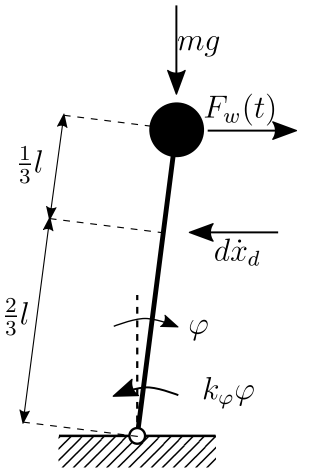
c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung.

Im Folgenden gilt $m = 500\text{kg}$, $l = 4\text{m}$, $k_\varphi = 50\text{kNm}$, $d = 300\text{kg/s}$, $\Omega = 0.51/\text{s}$, $F_0 = 200\text{N}$, $g = 9.81\text{m/s}^2$:

d) Bestimmen Sie die maximale Biegezugspannung an der Einspannstelle im eingeschwungenen Zustand. Dazu darf der Querschnitt des Balkens als Quadrat mit Seitenlänge $a = 5\text{cm}$ angenommen werden.

Musterlösung - Aufgabe 3

a) Freischnitt:



Kinematik:

$$x_d = \frac{2}{3}l\sin(\varphi)$$
$$\dot{x}_d = \frac{2}{3}l\cos(\varphi)\dot{\varphi}$$

Drallsatz:

$$\sum M_i = ml^2\ddot{\varphi}$$
$$\Leftrightarrow F_w l\cos(\varphi) - d\dot{x}_d\frac{2}{3}l\cos(\varphi) - k_\varphi\varphi + mgl\sin(\varphi) = ml^2\ddot{\varphi}$$

Linearisierung: $|\varphi| \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \cos(\varphi) \approx 1,\ \sin(\varphi) \approx \varphi$

Bewegungsgleichung:

$$\ddot{\varphi} + \frac{4}{9}\frac{d}{m}\dot{\varphi} + \left(\frac{k_\varphi}{ml^2} - \frac{g}{l}\right)\varphi = \frac{F_w}{ml} = \frac{F_0}{ml}\cos(\Omega t)$$

b)

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_\varphi}{ml^2} - \frac{g}{l}}$$

Transformation der Bew.-Gl. in Eigenzeit: $\tau = \omega_0 t \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}(\bullet)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(\bullet)}{\mathrm{d}\tau}\omega_0 = (\bullet)'\omega_0$

$$\Rightarrow \quad \omega_0^2\varphi'' + \frac{4}{9}\frac{d}{\omega_0 m}\omega_0^2\varphi' + \omega_0^2\varphi = \frac{F_0}{ml}\cos(\eta\tau), \qquad \text{mit: } \eta = \frac{\Omega}{\omega_0}$$
$$\Leftrightarrow \quad \varphi'' + 2D\varphi' + \varphi = \frac{F_0}{ml\omega_0^2}\cos(\eta\tau)$$

$$D = \frac{2d}{9\omega_0 m}, \qquad \omega_d = \sqrt{1-D^2}\,\omega_0$$

c) $\varphi = \varphi_h + \varphi_p$

$$\varphi_h = e^{-D\omega_0 t}\left(A\cos(\omega_d t) + B\sin(\omega_d t)\right)$$
$$\varphi_p = \frac{F_0}{ml\omega_0^2}V\cos(\Omega t - \gamma)$$

mit

$$V = V_3 = \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4D^2\eta^2}}, \qquad \tan\gamma = \frac{2D\eta}{1-\eta^2}$$

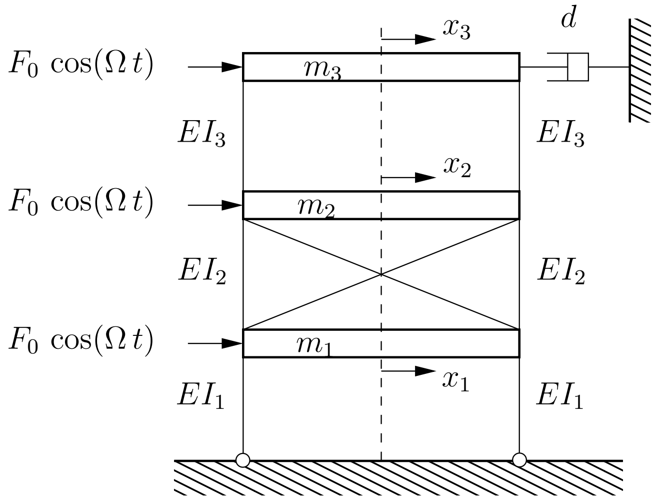
d)

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_\varphi}{m} - \frac{g}{l}} = 1.949\frac{1}{\mathrm{s}}$$
$$\eta = \frac{\Omega}{\omega_0} = 0.257$$
$$D = \frac{2d}{9\omega_0 m} = 0.0684$$
$$V = \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4D^2\eta^2}} = 1.070$$

$$\varphi_{p,max} = \frac{F_0}{ml\omega_0^2}V = 0.0282 \quad \text{(nur partikuläre Lsg.)}$$
$$\sigma_{b,max} = \frac{M}{W} = \frac{6\varphi_{p,max}k_\varphi}{a^3} = 6.761 \cdot 10^6\mathrm{N/m^2} = 67.6\mathrm{N/mm^2}$$

4. Aufgabe: (ca. 45% der Gesamtpunkte)

Der skizzierte Stockwerkrahmen (dreistöckiges Gebäude) besteht aus den starren Riegeln mit Massen m_1, m_2, m_3, den masselosen Stielen mit Biegesteifigkeiten EI_1, EI_2 und EI_3 sowie einem Dämpfer mit Dämpfungskonstante d. Durch den Windverband dürfen Stockwerk eins und zwei als starr miteinander verbunden angenommen werden. Die Stiele des ersten Stockwerks sind **gelenkig** mit dem Fundament verbunden. Die Raumhöhe eines jeden Stockwerks ist l. Das Gebäude wird durch eine Windlast $F_0 \cos(\Omega t)$ zum Schwingen angeregt. Es soll angenommen werden, dass sich die Massen m_1, m_2 und m_3 nur horizontal verschieben können. Die Verschiebungen werden mittels der ortsfesten Koordinaten x_1, x_2 und x_3 beschrieben.



Gegeben: m_1, m_2, m_3, EI_1, EI_2, EI_3, l, d, F_0, Ω.

a) Wieviele Freiheitsgrade hat das System? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen mit Hilfe des Lagrange Formalismus 2. Art auf.

c) Liegt durchdringende Dämpfung vor? Begründen Sie Ihre Antwort mit Hilfe einer Eigenwertanalyse der Dämpfungsmatrix (die Eigenvektoren müssen nicht untersucht werden).

Im Folgenden wird das ungedämpfte System ($d = 0$) untersucht und es werden vereinfachende Annahmen getroffen, so dass von folgender Bewegungsgleichung ausgegangen werden kann:

$$\begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F_0 \cos(\Omega t) \end{bmatrix}$$

Gegeben: m, k, F_0, Ω.

d) Bestimmen Sie die homogene Lösung des Systems. Wählen Sie dazu einen geeigneten Ansatz und leiten Sie darüber das Eigenwertproblem her. Berechnen Sie mittels des Eigenwertproblems die Eigenfrequenzen und die Eigenvektoren. Stellen Sie die Eigenvektoren grafisch dar.

e) Bestimmen Sie die partikuläre Lösung des Systems und skizzieren Sie die Beträge der Amplituden über das Frequenzverhältnis. Für welches Frequenzverhältnis tritt Schwingungstilgung auf?

Musterlösung - Aufgabe 4

a) 2 FHGe (x_1 und x_3) da x_1 und x_2 wegen starrer Kopplung identisch sind.

b)

$$\begin{aligned} T &= \tfrac{1}{2}\,(m_1+m_2)\,\dot{x}_1^2 + \tfrac{1}{2}\,m_3\,\dot{x}_3^2 \\ V &= \tfrac{1}{2}\,2\,\tfrac{3\,EI_1}{l^3}\,x_1^2 + \tfrac{1}{2}\,2\,\tfrac{12\,EI_3}{l^3}\,(x_3-x_1)^2 \\ R &= \tfrac{1}{2}\,d\,\dot{x}_3^2 \\ Q_i^* &= F_0\,\cos(\Omega\,t) \end{aligned}$$

Lagrange-Gleichungen mit $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}) + \frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{x}_i} = Q_i^*, \quad i = 1,2$

$$(m_1+m_2)\,\ddot{x}_1 + (2\,\tfrac{3\,EI_1}{l^3} + 2\,\tfrac{12\,EI_3}{l^3})\,x_1 - 2\,\tfrac{12\,EI_3}{l^3}\,x_3 = 2\,F_0\,\cos(\Omega\,t)$$

$$m_3\,\ddot{x}_3 + d\,\dot{x}_3 - 2\,\tfrac{12\,EI_3}{l^3}\,x_1 - 2\,\tfrac{12\,EI_3}{l^3}\,x_3 = F_0\,\cos(\Omega\,t)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_1+m_2 & 0 \\ 0 & m_3 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{M}} \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix}}_{\ddot{\boldsymbol{x}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{D}} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix}}_{\dot{\boldsymbol{x}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2\,\frac{3\,EI_1}{l^3} + 2\,\frac{12\,EI_3}{l^3} & -2\,\frac{12\,EI_3}{l^3} \\ -2\,\frac{12\,EI_3}{l^3} & 2\,\frac{12\,EI_3}{l^3} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{K}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{x}} = \underbrace{F_0\,\cos(\Omega\,t) \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{F}}$$

c) Notwendige Bedingung für durchdringende Dämpfung: $R = \frac{1}{2}\,\dot{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{D}\,\dot{\boldsymbol{x}} \geq 0\,\forall \dot{\boldsymbol{x}} \neq \boldsymbol{0}$

$\boldsymbol{D}$ muss positiv semidefinit sein, d.h. alle Eigenwerte von $\boldsymbol{D}$ müssen größer gleich Null sein

EWP für $\boldsymbol{D}$

$$\det(\boldsymbol{D} - \lambda\,\boldsymbol{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & d-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda\,(d-\lambda) = \lambda^2 - d\,\lambda = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda_{1,2} = \tfrac{d}{2} \pm \sqrt{\tfrac{d^2}{4}} = \tfrac{d}{2} \pm \tfrac{d}{2}$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = d$$

D.h. $\lambda_i \geq 0$ und somit ist $\boldsymbol{D}$ positiv semidefinit. Die Notwendige Bedingung für durchdringende Dämpfung ist erfüllt.

Es liegt zudem Kopplung in $\boldsymbol{K}$ vor, weshalb von durchdringender Dämpfung ausgegangen werden kann.

d) Ansatz

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{C}\cos(\omega t + \alpha)$$

in homogene DGL eingestetzt ergibt Eigenwertproblem (EWP)

$$\left(\boldsymbol{K} - \omega^2\boldsymbol{M}\right)\boldsymbol{C} = 0$$

charakteristische Gleichung für nichttriviale Lösungen mit $\lambda = \omega^2$ und $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ zur Ermittlung der Eigenwerte (EWe)

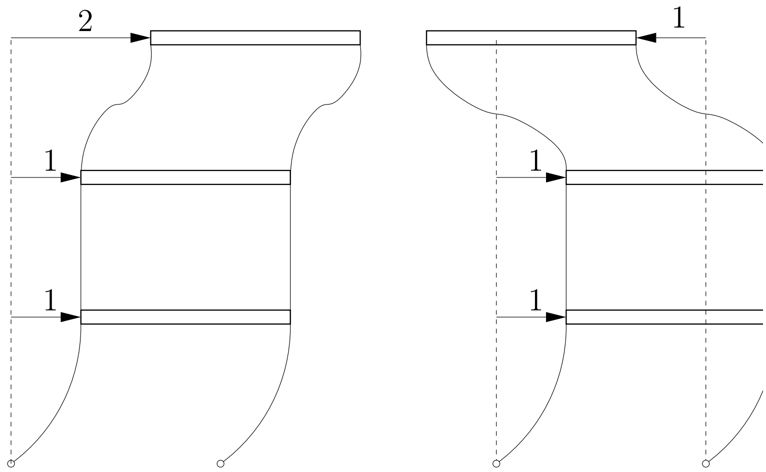
$$\begin{aligned} \det(\boldsymbol{K} - \lambda\,\boldsymbol{M}) = \begin{vmatrix} 3\,k - 2\,\lambda\,m & -k \\ -k & k - \lambda\,m \end{vmatrix} &= (3\,k - 2\,m\,\lambda)\,(k - m\,\lambda) - k^2 = 0 \\ &= \lambda^2 - \tfrac{5}{2}\,\omega_0^2\,\lambda + \omega_0^4 = 0 \\ \Leftrightarrow \lambda_{1/2} &= \tfrac{5}{4}\omega_0^2 \pm \sqrt{\tfrac{25}{16}\,\omega_0^4 - \omega_0^4} = (\tfrac{5}{4} \pm \sqrt{\tfrac{9}{16}}\,\omega_0^2 \\ &= (\tfrac{5}{4} \pm \tfrac{3}{4})\,\omega_0^2 \\ \Rightarrow \lambda_1 &= \tfrac{1}{2}\,\omega_0^2 \quad \Rightarrow \quad \omega_1 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\,\omega_0 \approx 0.707\,\omega_0 \\ \Rightarrow \lambda_2 &= 2\,\omega_0^2 \quad \Rightarrow \quad \omega_2 = \sqrt{2}\,\omega_0 \approx 1.414\,\omega_0 \end{aligned}$$

Eigenvektoren

$$\kappa_1 = \frac{C_{21}}{C_{11}} = -\frac{k_{11}-m_{11}\omega_1^2}{k_{12}-m_{12}\,\omega_1^2} = -\frac{3\,k-2\,m\,\frac{1}{2}\,\omega_0^2}{-k} = 2, \quad \mathbf{\Phi}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \kappa_1 \end{bmatrix}, = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\kappa_2 = \frac{C_{22}}{C_{12}} = -\frac{k_{11}-m_{11}\omega_2^2}{k_{12}-m_{12}\,\omega_2^2} = -\frac{3\,k-2\,m\,2\,\omega_0^2}{-k} = -1, \quad \mathbf{\Phi}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \kappa_2 \end{bmatrix}, = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Darstellung



Grundschwingung Oberschwingung

Homogene Lsg.:

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}_1 + \boldsymbol{q}_2, \quad \boldsymbol{q}_1 = \underbrace{C_{11}\,\mathbf{\Phi}_1}_{\boldsymbol{C}_1} \cos(\omega_1\,t + \alpha_1), \quad \boldsymbol{q}_2 = \underbrace{C_{12}\,\mathbf{\Phi}_2}_{\boldsymbol{C}_2} \cos(\omega_2\,t + \alpha_2)$$

e) Ansatz partikuläre Lsg.:

$$\boldsymbol{q}_p = \boldsymbol{a}\,\cos(\Omega\,t)$$

In DGL eingesetzt

$$(\boldsymbol{K} - \Omega^2\,\boldsymbol{M})\,\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ F_0 \end{bmatrix}$$

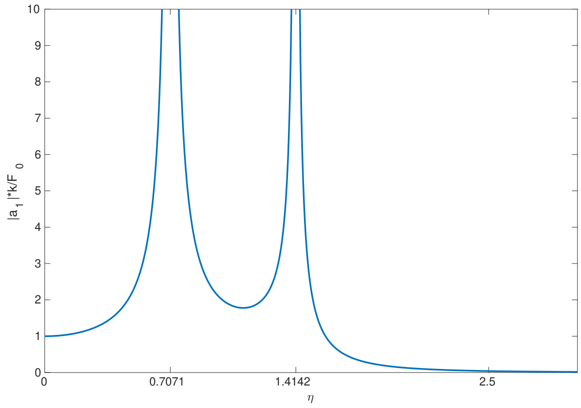
mit

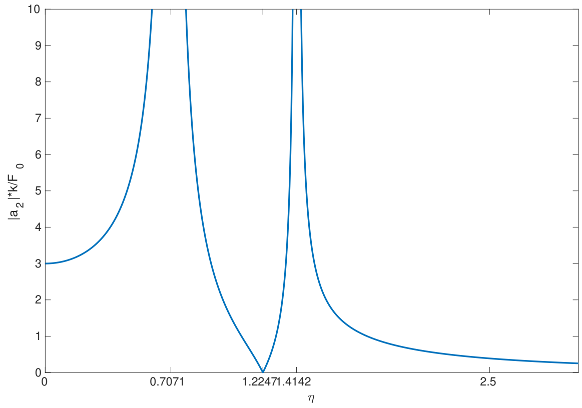
$$\begin{aligned} N = \det(\boldsymbol{K} - \Omega^2\,\boldsymbol{M}) &= m^2\,(\Omega^4 - \tfrac{5}{2}\,\omega_0^2\,\Omega^2 + \omega_0^4) \\ &= m^2\,(\Omega^2 - \omega_1^2)\,(\Omega^2 - \omega_2^2) = m^2\,\omega_0^4\,(\eta^2 - \tfrac{1}{2})\,(\eta^2 - 2) \\ Z_1 &= \left| \begin{bmatrix} 0 & k_{12} - \Omega^2\,m_{12} \\ F_0 & k_{22} - \Omega^2\,m_{22} \end{bmatrix} \right| = F_0\,k \\ Z_2 &= \left| \begin{bmatrix} k_{11} - \Omega^2\,m_{11} & 0 \\ k_{21} - \Omega^2\,m_{21} & F_0 \end{bmatrix} \right| = (3\,k - 2\,m\,\Omega^2)\,F_0 \end{aligned}$$

ergeben sich die Amplituden zu

$$a_1 = \frac{Z_1}{N} = \frac{F_0/k}{(\eta^2-\frac{1}{2})\,(\eta^2-2)}, \quad a_2 = \frac{Z_2}{N} = \frac{F_0/k(3-2\,\eta^2)}{(\eta^2-\frac{1}{2})\,(\eta^2-2)}$$

Skizzen Amplituden





Schwingungstilgung für

$$Z_2 = 0 = F_0\,(3\,k - 2\,m\,\Omega^2)$$
$$\Leftrightarrow 3 - 2\,\eta^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \eta = \sqrt{\tfrac{3}{2}} \approx 1.225$$