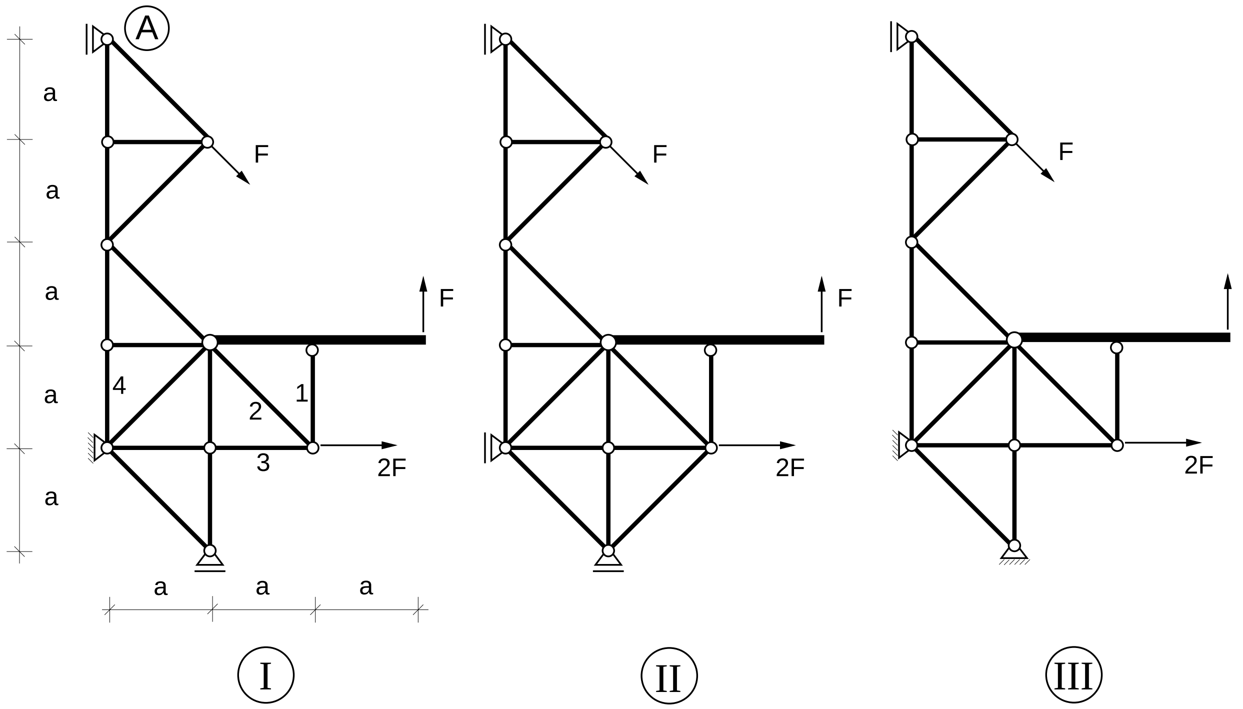
Institut für Mechanik	Prüfung in
Prof. Dr.-Ing. habil. P. Betsch	Statik starrer Körper
Prof. Dr.-Ing. habil. Th. Seelig	6. März 2019

1. Aufgabe: (ca. 25 % der Gesamtpunkte)



a) Beurteilen Sie die Tragwerke **I** – **III** hinsichtlich der statischen Bestimmtheit (mit Begründung!).

Die restlichen Aufgabenteile sind nur am Tragwerk **I** zu bearbeiten:

b) Bestimmen Sie alle Nullstäbe (mit Begründung).

c) Berechnen Sie die Stabkräfte S_1, S_2 und S_3.

d) Berechnen Sie die Auflagerreaktionen im Punkt **A**, sowie die Stabkraft S_4.

Gegeben: $a,\ F$

Musterlösung - 1. Aufgabe

a) Statische Bestimmtheit

Tragwerk	Notwendig					Hinreichend		
	3n	=	r	+	v			
I	$3 \cdot 2$	$=$	4		2	Nicht kinematisch	$\Rightarrow$	Statisch bestimmt
II	$3 \cdot 2$	$\neq$	3		2	Entfällt	$\Rightarrow$	Statisch unbestimmt
III	$3 \cdot 2$	$\neq$	5		2	Entfällt	$\Rightarrow$	Statisch unbestimmt

mit

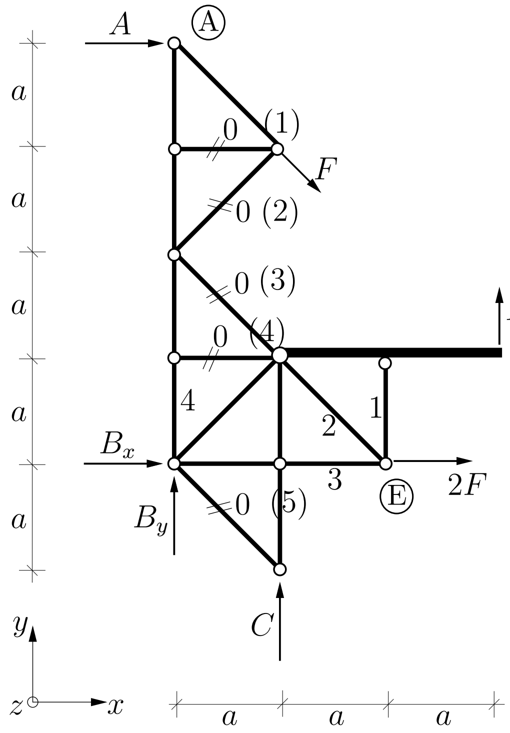
n: Anzahl der starren Körper

r: Lagerreaktionen

v: Verbindungsreaktionen

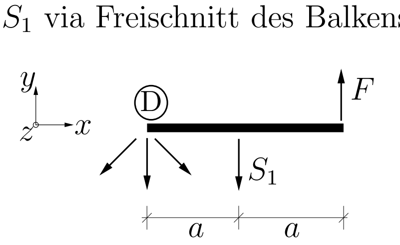
Anmerkung: Die Aufgabe kann alternativ mittels der Fachwerk-Betrachtung behandelt werden.

b) Nullstäbe



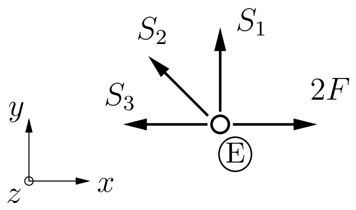
- Drei Stäbe an unbelastetem Knoten. Wirkungslinie zweier Stäbe identisch: (1), (3), (4)
- Zwei Stäbe an belastetem Knoten. Wirkungslinie der Last verläuft in Richtung eines Stabes: (2), (5)

c) S_1 via Freischnitt des Balkens:



$$\sum M_{iz}^{D} = 0 : \; -S_1 \cdot a + F \cdot 2a = 0 \qquad \rightarrow S_1 = \underline{\underline{2F}}$$

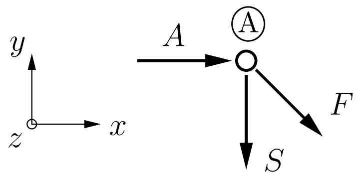
S_2 & S_3 via Knotenpunktverfahren in Ⓔ:



$$\sum F_{iy} = 0: \ S_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} S_2 = 0 \qquad \rightarrow S_2 = \underline{\underline{-2\sqrt{2}F}}$$

$$\sum F_{ix} = 0: \ -S_3 - \frac{1}{\sqrt{2}} S_2 + 2F = 0 \qquad \rightarrow S_3 = \underline{\underline{4F}}$$

d) Auflagerkraft A via Knotenpunktverfahren in Ⓐ:



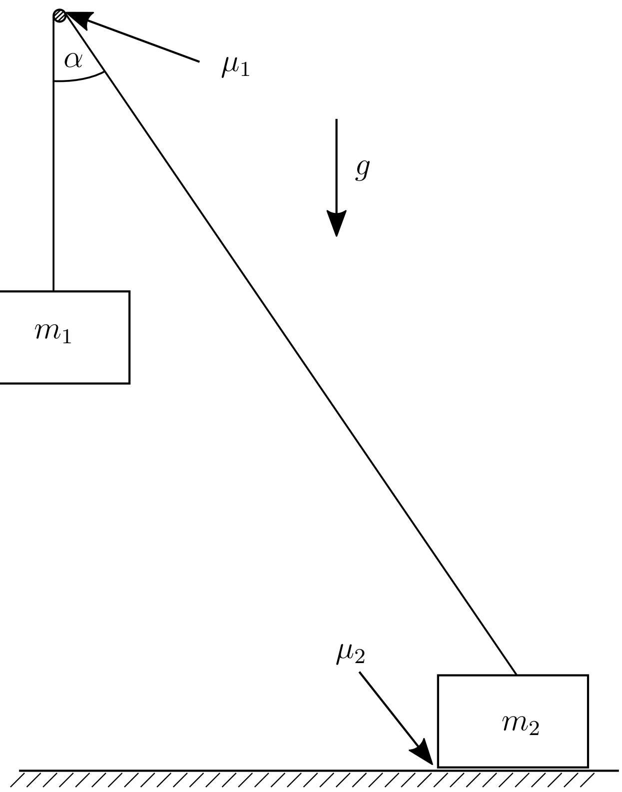
$$\sum F_{ix} = 0: \ \frac{1}{\sqrt{2}} F + A = 0 \qquad \rightarrow A = \underline{\underline{-\frac{1}{\sqrt{2}} F}}$$

$$\sum F_{iy} = 0: \ -\frac{1}{\sqrt{2}} F - S = 0 \qquad \rightarrow S = -\frac{1}{\sqrt{2}} F$$

Stabkraft S_4:

$$S_4 = S = \underline{\underline{-\frac{1}{\sqrt{2}} F}}$$

2. Aufgabe: (ca. 20 % der Gesamtpunkte)



Zwei Massen m_1 und m_2 sind wie skizziert durch ein Seil verbunden. Das Seil wird dabei an einem starren Lager mit Kreisquerschnitt und Haftbeiwert μ_1 umgelenkt.

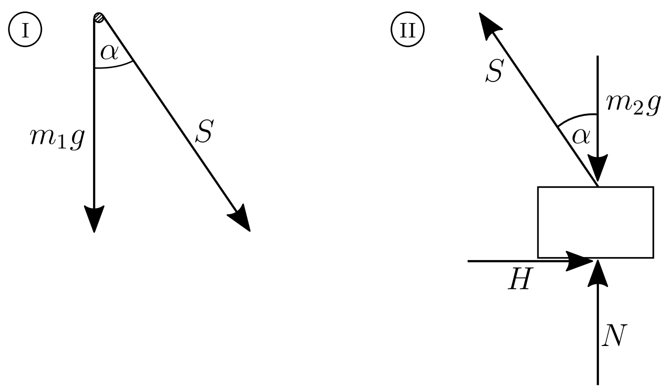
a) Wie groß muss das Verhältnis der Massen m_2/m_1 mindestens sein, damit Gleichgewicht herrscht?

b) Welcher Winkel α ergibt sich im Sonderfall $\mu_2 = 0$ und wie lautet dann das kleinste erforderliche Massenverhältnis m_2/m_1?

Gegeben: $g,\ \mu_1,\ \mu_2$

Musterlösung - 2. Aufgabe

a) Freischnitt:



I Seilhaftung (Euler-Eytelwein-Gleichung):

$$m_1 g \leq S e^{\mu_1(\pi-\alpha)} \quad \Leftrightarrow \quad S \geq m_1 g e^{-\mu_1(\pi-\alpha)} \tag{1}$$

II Gleichgewicht:

$$\rightarrow: \quad H - \sin(\alpha) S = 0 \tag{2}$$

$$\uparrow: \quad N + S\cos(\alpha) - m_2 g = 0 \quad \Leftrightarrow \quad N = m_2 g - S\cos(\alpha) \tag{3}$$

$$\text{Haftbedingung:} \quad H = \mu_2 N \quad \text{(Grenzfall)} \tag{4}$$

Einsetzen:

(3) in (4) in (2):

$$\mu_2 m_2 g - \mu_2 S\cos(\alpha) - S\sin(\alpha) = 0 \tag{5}$$

(1) in (5):

$$\mu_2 m_2 g - m_1 g e^{-\mu_1(\pi-\alpha)} \left(\mu_2 \cos(\alpha) + \sin(\alpha)\right) \geq 0$$

Auflösen:

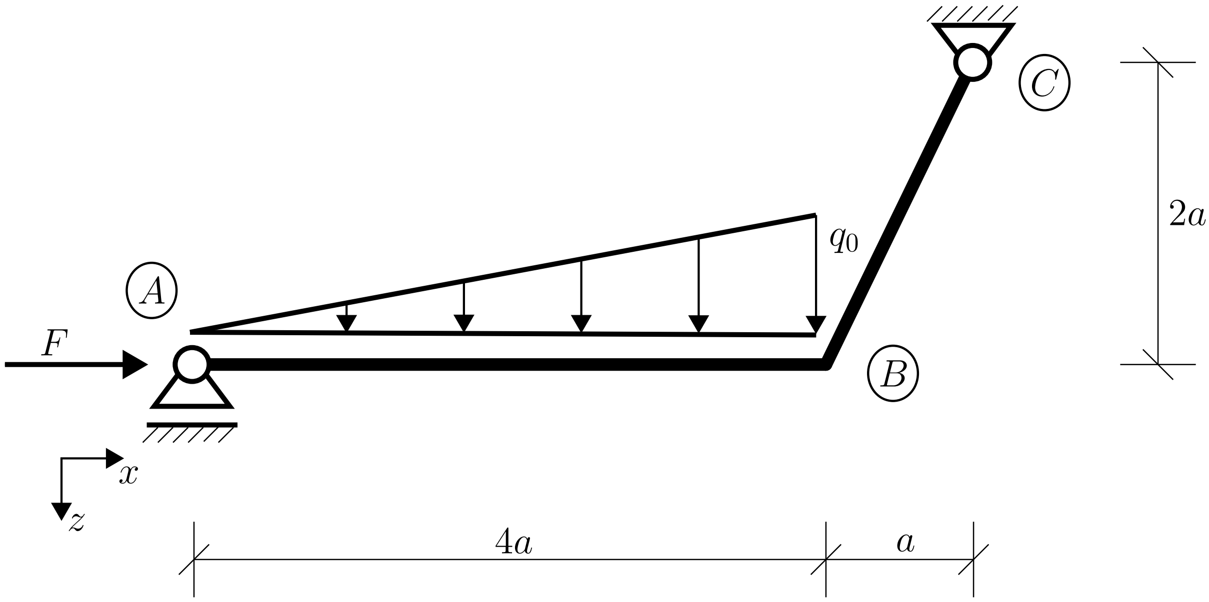
$$\frac{m_2}{m_1} \geq e^{-\mu_1(\pi-\alpha)} \frac{\mu_2 \cos(\alpha) + \sin(\alpha)}{\mu_2}$$

b) Im Fall $\mu_2 = 0$ (also $H = 0$) ergibt sich $\alpha = 0$. Daraus folgt $S \geq m_1 g e^{-\mu_1 \pi}$. Für die kleinste erforderliche Masse m_2 ist außerdem $N = 0$. Somit gilt im Gleichgewicht $m_2 g = S$.

Einsetzen der Seilkraft S (Grenzfall!) und Auflösen:

$$m_2 g = m_1 g e^{-\mu_1 \pi} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{m_2}{m_1} = e^{-\mu_1 \pi}$$

3. Aufgabe: (ca. 35 % der Gesamtpunkte)



Für das dargestellte Tragwerk unter der linear veränderlichen Streckenlast $q(x)$ sowie der Einzelkraft F sind die folgenden Aufgabenteile zu bearbeiten:

a) Bestimmen Sie die Lagerreaktionen in A und C.

b) Bestimmen Sie die formelmäßigen Verläufe der Schnittgrößen $M(x)$ und $Q(x)$ im Bereich A-B.

c) Skizzieren Sie die Verläufe der Schnittgrößen N, Q und M im Bereich A-C in der **beigefügten Vorlage** und geben Sie die wesentlichen Ordinaten an.

Gegeben: $a,\ q_0,\ F = q_0\, a$

Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. habil. P. Betsch
Prof. Dr.-Ing. habil. Th. Seelig

Prüfung in
Statik starrer Körper
6. März 2019

Vorlage zur 3. Aufgabe, c)

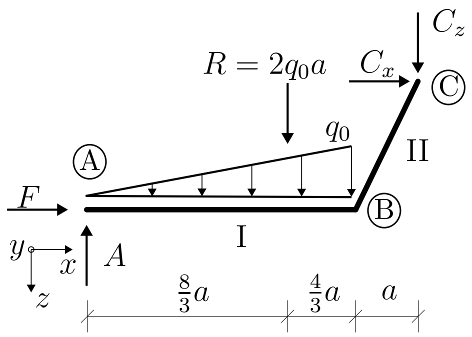
N

Q

M

Musterlösung - 3. Aufgabe

a) Freischnitt



Lagerreaktionen

$$\sum M_{iy}^C = 0: \quad -A \cdot 5a + R \cdot \frac{7}{3}a + F \cdot 2a = 0$$

$$\rightarrow A = \underline{\underline{\frac{4}{3}q_0\, a}}$$

$$\sum F_{ix} = 0: \quad C_x + F = 0$$

$$\rightarrow C_x = \underline{\underline{-q_0\, a}}$$

$$\sum F_{iz} = 0: \quad -A + C_z + R = 0$$

$$\rightarrow C_z = \underline{\underline{-\frac{2}{3}q_0\, a}}$$

b) Verläufe (Bereich I) via Integration

$$q^I(x) = \frac{q_0}{4a}x$$

$$Q^I(x) = -\frac{q_0}{8a}x^2 + C_1$$

$$M^I(x) = -\frac{q_0}{24a}x^3 + C_1 x + C_2$$

Randbedingungen

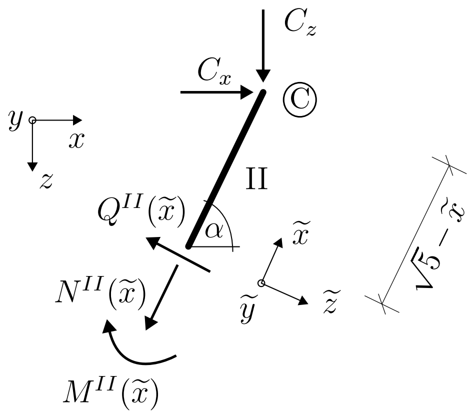
$$Q^I(x=0) = A \quad \rightarrow C_1 = \frac{4}{3}q_0\, a$$

$$M^I(x=0) = 0 \quad \rightarrow C_2 = 0$$

$$\Rightarrow Q^I(x) = \underline{\underline{-\frac{q_0}{8a}x^2 + \frac{4}{3}q_0\, a}}$$

$$\Rightarrow M^I(x) = \underline{\underline{-\frac{q_0}{24a}x^3 + \frac{4}{3}q_0\, a\, x}}$$

c) Schnittgrößen im Bereich II



Geometrie

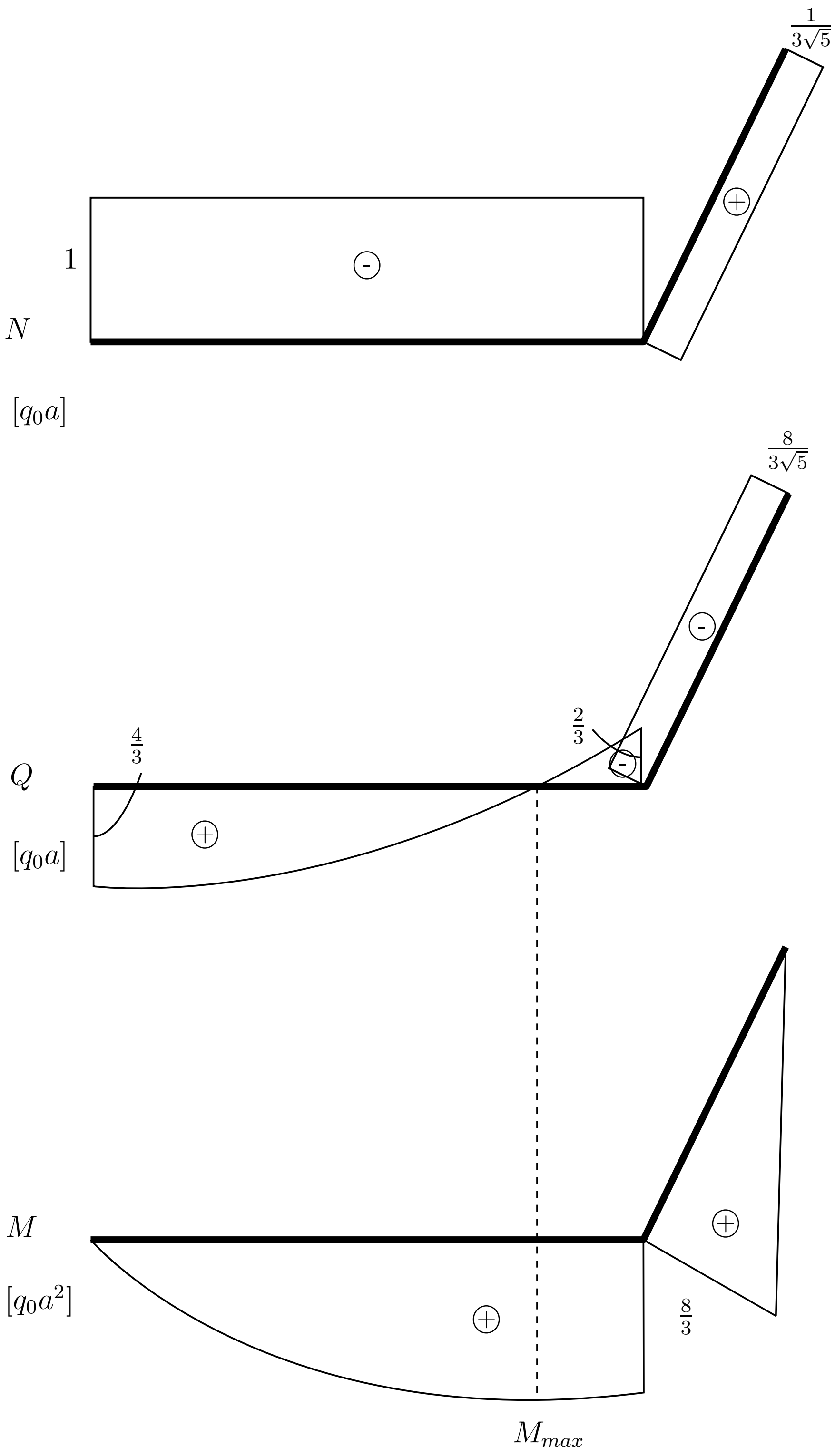
$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \qquad \sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Schnittgrößen

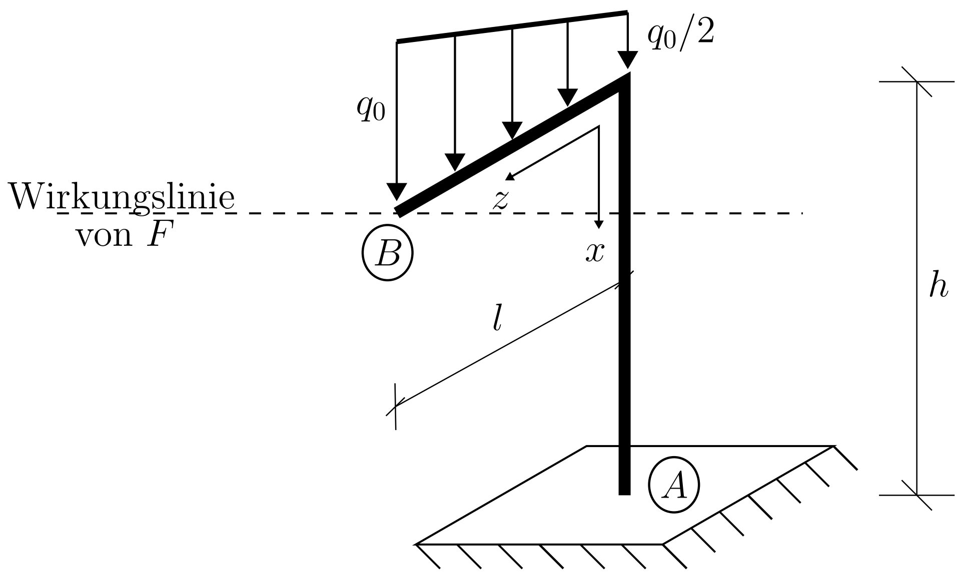
$$\sum F_{i\widetilde{x}} = 0: \quad N^{II}(\widetilde{x}) = \frac{1}{\sqrt{5}}C_x - \frac{2}{\sqrt{5}}C_z = \frac{q_0 a}{3\sqrt{5}}$$

$$\sum F_{i\widetilde{z}} = 0: \quad Q^{II}(\widetilde{x}) = \frac{2}{\sqrt{5}}C_x + \frac{1}{\sqrt{5}}C_z = -\frac{8q_0 a}{3\sqrt{5}}$$

Schnittgrößenverläufe



4. Aufgabe: (ca. 20 % der Gesamtpunkte)



Ein im Punkt A eingespannter Rahmen sei durch eine trapezförmige Streckenlast (siehe Skizze) sowie eine im Punkt B angreifende und in positiver y-Richtung (Rechtssystem!) wirkende Kraft F belastet.

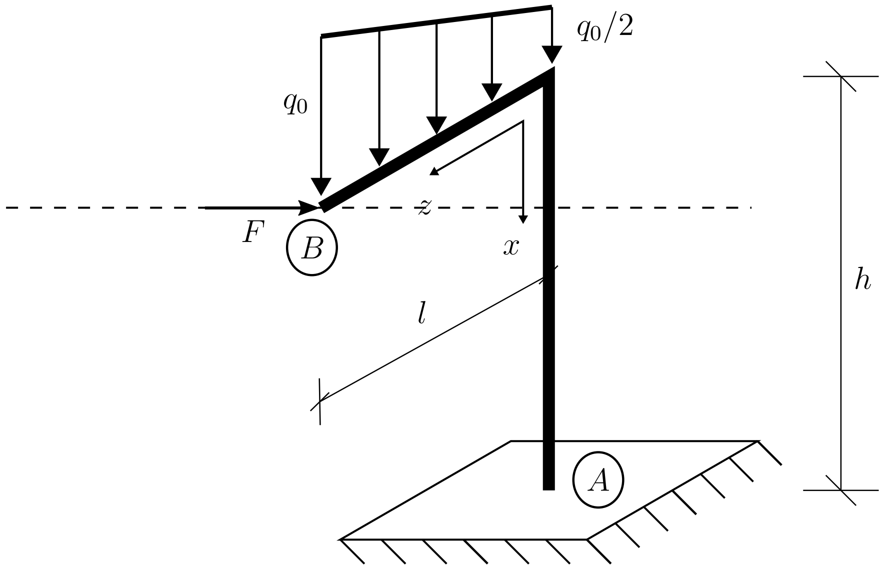
a) Zeichnen Sie die Kraft F in die Skizze ein.

b) Berechnen Sie die Lagerreaktionen im Punkt A.

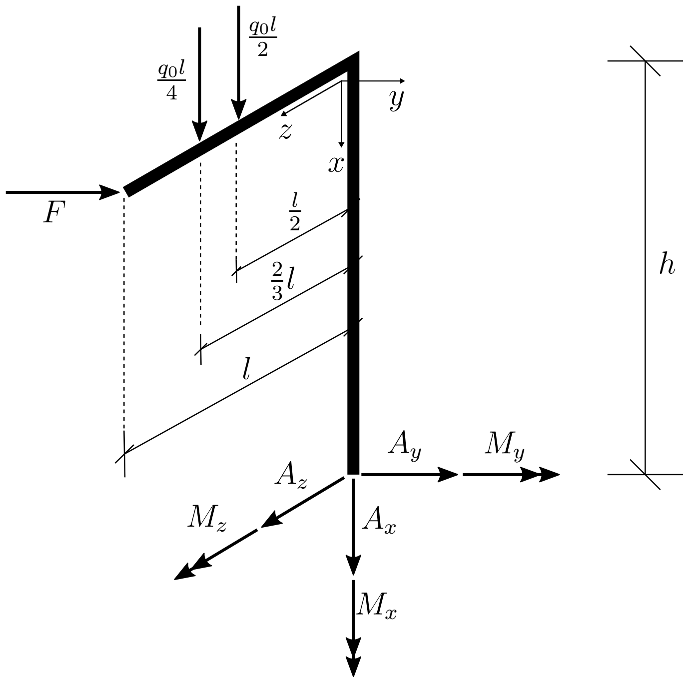
Gegeben: $h,\ l,\ q_0,\ F$

Musterlösung - 4. Aufgabe

a) Skizze:



b) Freischnitt:



Gleichgewicht:

$$\sum F_x = 0: \; \underline{\underline{A_x = -\frac{3}{4} q_0 l}} \qquad \sum M_x^A = 0: \; M_x - Fl = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{M_x = Fl}}$$

$$\sum F_y = 0: \; \underline{\underline{A_y = -F}} \qquad \sum M_y^A = 0: \; M_y + \frac{q_0 l^2}{4} + \frac{q_0 l^2}{6} \;\Leftrightarrow\; \underline{\underline{M_y = -\frac{5}{12} q_0 l^2}}$$

$$\sum F_z = 0: \; \underline{\underline{A_z = 0}} \qquad \sum M_z^A = 0: \; M_z - Fh = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{M_z = Fh}}$$