1. Aufgabe: (ca. 10% der Gesamtpunktzahl)

Bitte beantworten Sie folgende Fragen:

1. Wie viele unabhängige Normal- und Schubspannungen gibt es in der Festigkeitslehre von dreidimensionalen Körpern?

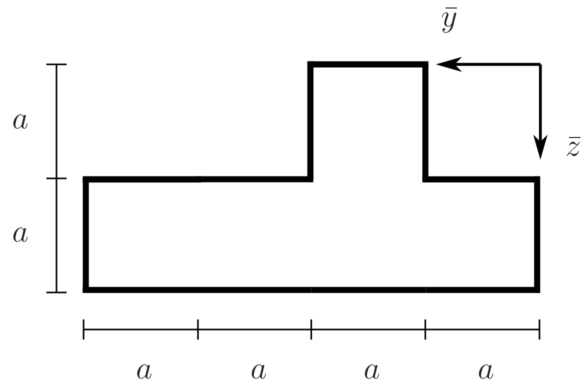
2. Durch welche Einschränkungen des allgemeinen dreidimensionalen Spannungszustandes wird der ebene Spannungszustand definiert?

3. Zeichnen Sie den Mohrschen Spannungskreis für den einachsigen Zug. Wie groß sind die maximalen Schubspannungen, wenn beim einachsigen Zug die Normalspannung σ_0 wirkt?

4. Welche unabhängigen Materialparameter beinhaltet das Hookesche Elastizitätsgesetz der dreidimensionalen Festigkeitslehre (ohne Temperatureinfluss)?

5. Was versteht man unter dem Begriff Kernfläche? Welche Bedeutung hat die Kernfläche im Mauerwerksbau? Skizzieren Sie die Kernfläche eines Kreisquerschnitts.

2. Aufgabe (ca. 17% der Gesamtpunktzahl)



Gegeben sei der oben abgebildete Querschnitt einer Führungsschiene.

a) Bestimmen Sie die Koordinaten des Fächenschwerpunktes $(\bar{y}_s, \bar{z}_s)$ bezüglich des gegebenen Koordinatensystems $(\bar{y}, \bar{z})$. Skizzieren sie diesen unter Angabe der entsprechenden Maße in obige Abbildung.

Bitte rechnen Sie im Folgenden mit den Schwerpunktkoordinaten $\bar{y}_s = 1,9a$ und $\bar{z}_s = 1,3a$ weiter.

b) Bestimmen Sie die Flächenträgheitsmomente I_y, I_z, I_{yz} in Bezug auf den Schwerpunkt.

c) Bestimmen Sie die Hauptträgheitsmomente I_1, I_2 und die zugehörigen Winkel φ_1^* und φ_2^*.

Bitte runden Sie sämtliche Ergebnisse auf zwei Nachkommastellen.

Gegeben: a

Lösung 2. Aufgabe

a) Schwerpunkt

$$y_s = \frac{\sum y_{s_i} A_i}{\sum y_{s_i} A_i} = \frac{4a^2 \cdot 2a + a^2 \cdot \frac{3}{2}a}{4a^2 + a^2} = 1,9a$$
$$z_s = \frac{\sum z_{s_i} A_i}{\sum y_{s_i} A_i} = \frac{4a^2 \cdot \frac{3}{2}a + a^2 \cdot \frac{1}{2}a}{4a^2 + a^2} = 1,3a$$

b) Flächenträgheitsmomente

$$I_y = \frac{4a \cdot (1a)^3}{12} + (0.2a)^2 \, 4a^2 + \frac{a \cdot a^3}{12} + (-0,8a)^2 \, a^2 \approx \underline{1,22 \, a^4}$$
$$I_z = \frac{1a \cdot (4a)^3}{12} + (0.1a)^2 \, 4a^2 + \frac{a \cdot a^3}{12} + (-0.4a)^2 \, a^2 \approx \underline{5,62 \, a^4}$$
$$I_{yz} = 0 - (-0.1a)\,(-0,2a)\,4a^2 + 0 - (-0.4a)\,(-0.8a)\,a^2 = -\underline{0,4 \, a^4}$$

c) Hauptträgheitsmomente und Winkel zu Hauptachsen

Hauptträgheitsmomente:

$$I_{1,2} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + {I_{yz}}^2} = \begin{cases} 5,65a^4 = I_1 \\ 1.18a^4 = I_2 \end{cases}$$

Zugehörige Rotation:

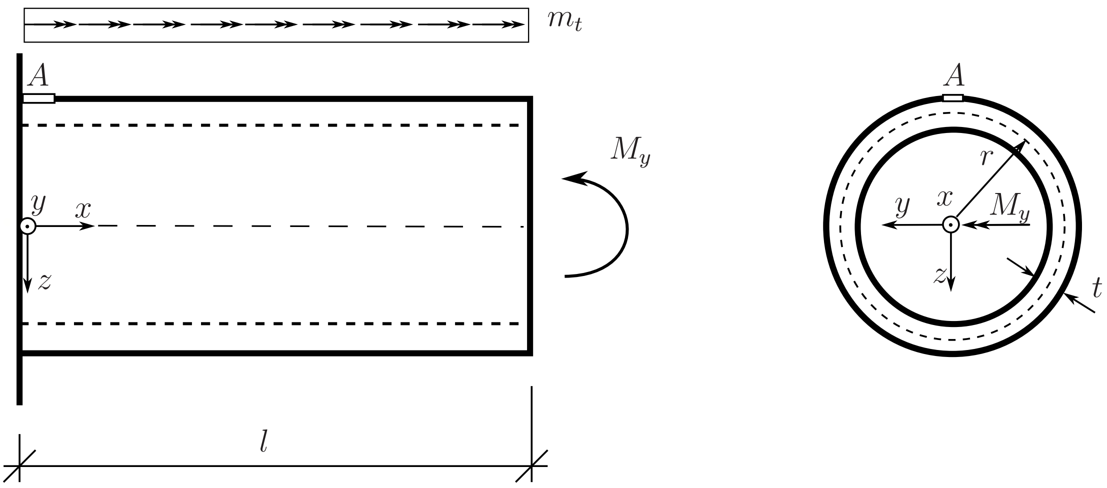
$$\Longrightarrow \varphi^* = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{2*(-0.4)}{1,22-5,65}\right) = 5,15^\circ$$

Zugehörige Achse

$$I_\xi(2 \cdot \varphi^*) = \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2}\cos(2 \cdot \varphi^*) + I_y z \sin(2 \cdot \varphi^*)$$
$$= 1.18 = I_2$$

$$\Rightarrow \varphi_2 = \varphi^* = 5,15^\circ; \qquad \varphi_1 = \varphi^* + 90^\circ = 95,15^\circ$$

3. Aufgabe (ca. 19% der Gesamtpunktzahl)



Ein einseitig eingespanntes dünnwandiges Rohr mit mittlerem Radius r, Wandstärke t und Länge l wird am freien Ende mit einem Biegemoment M_y belastet. Zusätzlich wird der Kragarm mit einem über die Länge l konstant verteilten Torsionsmoment m_t belastet.
Bearbeiten Sie folgende Teilaufgaben:

a) Wie groß darf das über die Länge l konstant verteilte Torsionsmoment m_t maximal sein, sodass eine zulässige Schubspannung τ_{max} nicht überschritten wird?

b) Berechnen Sie die Normalspannung σ_x in Punkt A in Abhängigkeit des mittleren Radius r und des Biegemoments M_y.
Skizzieren Sie den Spannungszustand in A an einem infinitesimal kleinen Flächenelement.

c) Berechnen Sie für $r = 10t$ und $m_t l = 2M_y$ die Hauptspannungen und die zugehörigen Hauptspannungsrichtungen in A in Abhängigkeit der Wandstärke t und des Biegemoments M_y

Gegeben: $l, r, t, \tau_{max}, M_y,$

4. AUFGABE

Lösung 3. Aufgabe

a) Normalspannung:
Schubspannung infolge Torsion:

$$\tau_{T,max} = \frac{M_{T,max}}{2A_m t} = \frac{m_T l}{2\pi r^2 t} \leq \tau_{zul} \qquad \Rightarrow \qquad m_T \leq \frac{1}{l} 2\pi r^2 t \tau_{zul}$$

b) Normalspannung infolge Biegemoment:

$$\sigma_x = \frac{M_y}{I_y} z \qquad mit \qquad I_y = \pi r^3 t$$
$$z = r + \frac{t}{2}$$

b) Hauptspannungen und zugehörige Hauptspannungsrichtungen:
Hauptspannungen:

$$\sigma_{1/2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

mit

$$\sigma_y = 0$$
$$\sigma_x = -\frac{M_y}{\pi r^3 t}(r + \frac{t}{2}) = -\frac{21}{20}\frac{M_y}{\pi 100 t^3}$$
$$\tau_{xy} = \frac{m_T l}{2\pi r^2 t} = \frac{2M_y}{2\pi r^2 t} = \frac{M_y}{\pi 100 t^3}$$

dann:

$$\sigma_{1/2} = -\frac{21}{40} \pm \sqrt{\left(-\frac{21}{40}\right)^2 + 1}$$
$$\rightarrow \sigma_1 = -0,525 - 1,130 = -1,655 \frac{M_y}{\pi 100 t^3}$$
$$\rightarrow \sigma_2 = -0,525 + 1,130 = 0,605 \frac{M_y}{\pi 100 t^3}$$

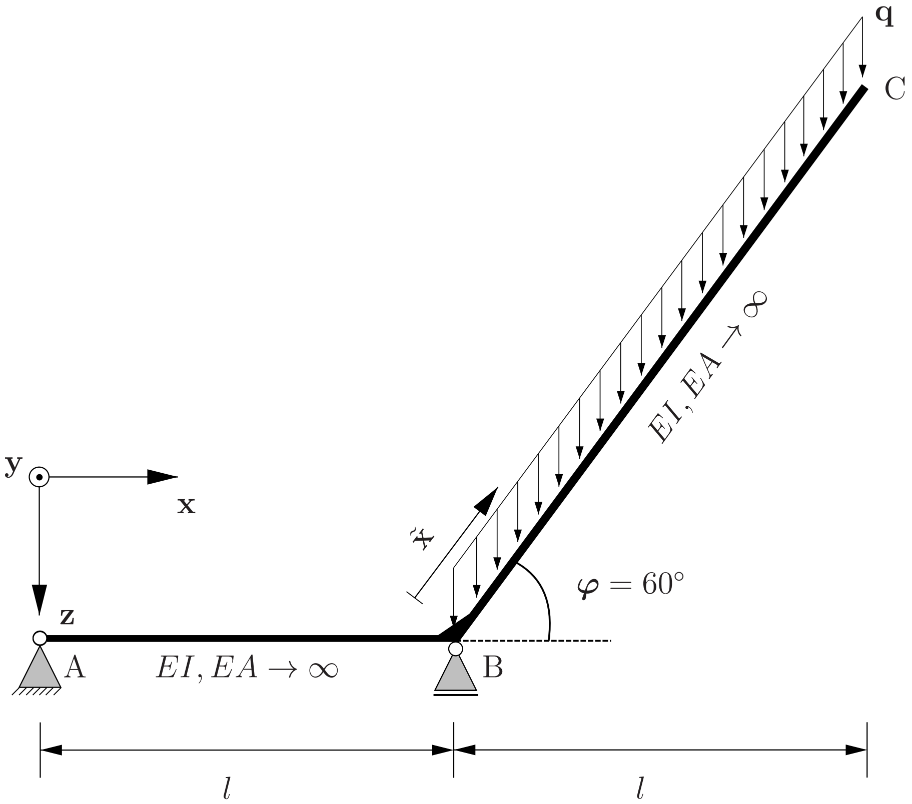
Hauptspannungsrichtungen:

$$\tan(2\varphi^*) = \frac{2\tau}{\sigma_x - \sigma_y} = -\frac{40}{21}$$
$$\rightarrow \varphi^* = -31,2^\circ$$

Zugehörigkeit:

$$\sigma_\xi = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos(2\varphi^*) + \tau\sin(2\varphi^*) = -1,655\frac{M_y}{\pi 100 t^3} = \sigma_1$$
$$\rightarrow \sigma_1 : \varphi_1^* = -31,2^\circ$$
$$\rightarrow \sigma_2 : \varphi_2^* = 58,8^\circ$$

4. Aufgabe: (ca. 26% der Gesamtpunktzahl)



Das dargestellte ebene System wird in Bereich $B-C$ durch die konstante, vertikale Streckenlast q belastet.

a) Bestimmen Sie die Lagerreaktionen in den Punkten A und B.

b) Geben Sie im Zusammenhang mit der Differentialgleichung der Biegeline alle Rand- und Übergangsbedingungen an, welche Null sind.

c) Ermitteln Sie die Momentenverläufe $M(x)$ und $M(\tilde{x})$ in den Bereichen $A-B$ und $B-C$.

d) Ermitteln Sie den exakten Verlauf der Biegelinie in Bereich $A-B$ und $B-C$ in lokalen Koordinaten.

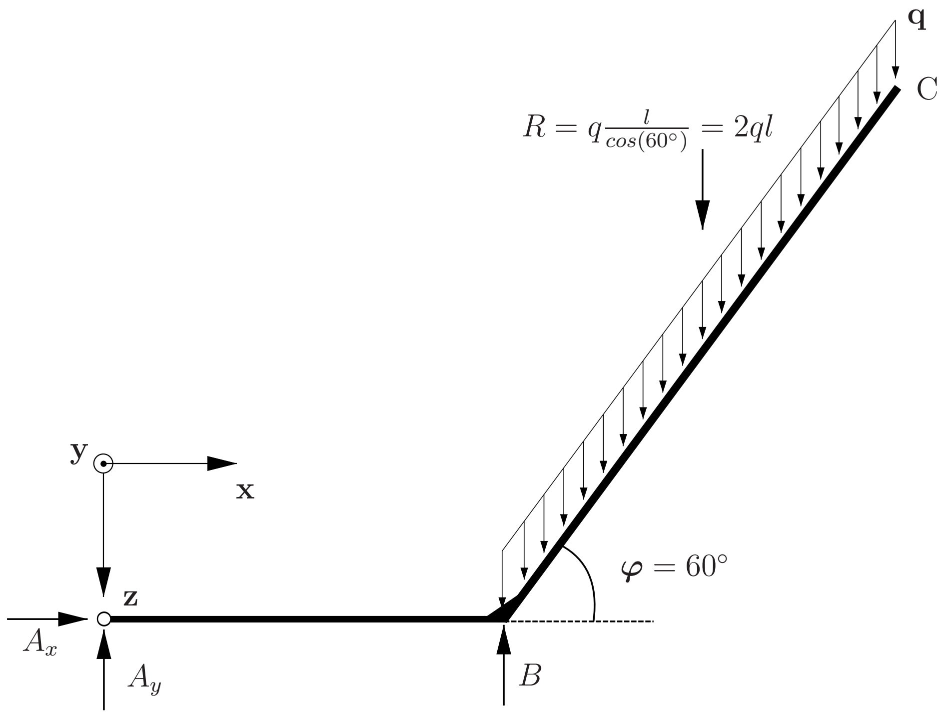
e) Ermitteln Sie den Ort der größten Durchbiegung in Bereich $A-B$.

Gegeben: $l, q, EI, EA \to \infty$

Lösung 4. Aufgabe

a) Lagerreaktionen

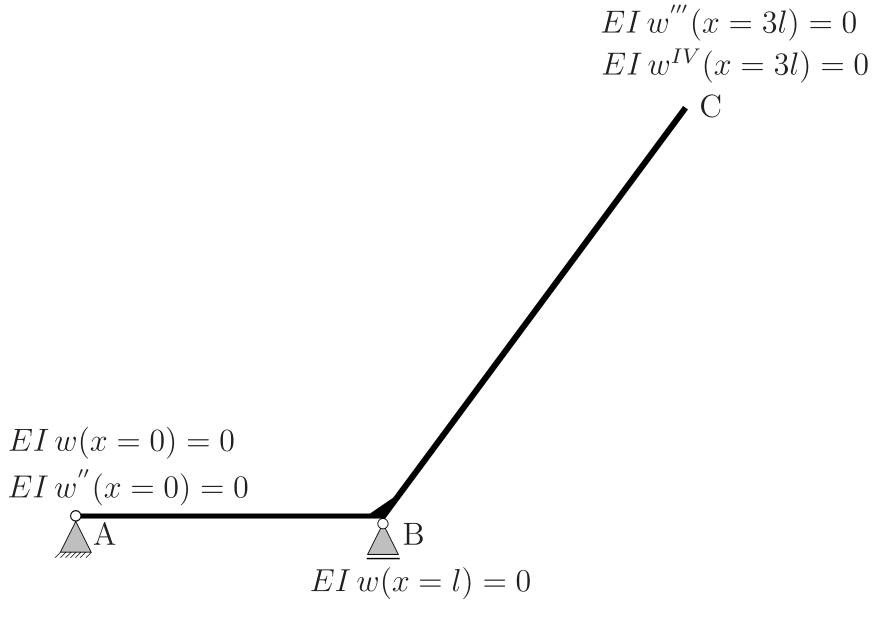
Freischnitt



Gleichgewicht

$$\sum F_{ix} = 0: \quad A_x = 0$$
$$\sum M^B = 0: \quad A_y = -ql$$
$$\sum F_{iy} = 0: \quad B = 3ql$$

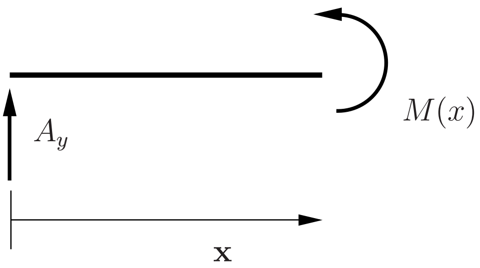
b) Rand- und Übergangsbedingungen gleich Null



c) Momentenverläufe

Bereich I:

Freischnitt

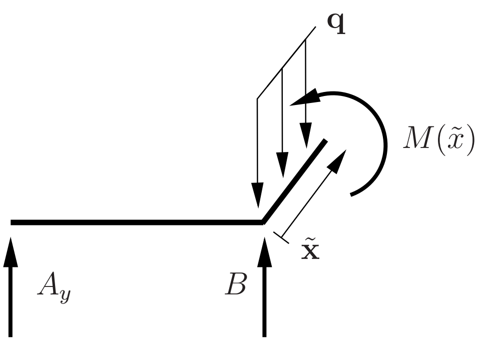


Gleichgewicht

$$\sum M^x = 0: \quad -A_y x + M(x) = 0$$
$$\Rightarrow M(x) = -qlx$$

Bereich II:

Freischnitt



Gleichgewicht

$$\sum M^{\tilde{x}} = 0: \quad -A_y\,(l + \tilde{x}\cos(60°)) - B\tilde{x}\cos(60°)$$
$$+ q\frac{\tilde{x}^2}{2}\cos(60°) + M(\tilde{x}) = 0$$
$$\Rightarrow M(\tilde{x}) = ql\tilde{x} - q\frac{\tilde{x}^2}{4} - ql^2$$

d) Biegelinienverläufe

Bereich I:

$$EIw^{''}(x) = -M(x) = qlx$$
$$EIw^{'}(x) = \frac{1}{2}qlx^2 + C_1$$
$$EIw(x) = \frac{1}{6}qlx^3 + C_1x + C_2$$

Bereich II:

$$EIw^{''}(\tilde{x}) = -M(x) = -ql\tilde{x} + q\frac{\tilde{x}^2}{4} + ql^2$$
$$EIw^{'}(\tilde{x}) = -\frac{1}{2}ql\tilde{x}^2 + q\frac{\tilde{x}^3}{12} + ql^2\tilde{x} + C_3$$
$$EIw(\tilde{x}) = -\frac{1}{6}ql\tilde{x}^3 + q\frac{\tilde{x}^4}{48} + \frac{1}{2}ql^2\tilde{x}^2 + C_3\tilde{x} + C_4$$

Randbedingungen:

Bereich I:

$$EIw(x=0)=0 \quad \Rightarrow C_2=0$$
$$EIw(x=l)=0 \quad \Rightarrow C_1=-\frac{1}{6}ql^3$$

Bereich II:

$$EIw(\tilde{x}=0)=0 \quad \Rightarrow C_4=0$$

Übergangsbedingung:

$$EIw'(x=l)=EIw'(\tilde{x}=0) \quad \Rightarrow C_3=\frac{1}{3}ql^3$$

Biegelinienverlauf:

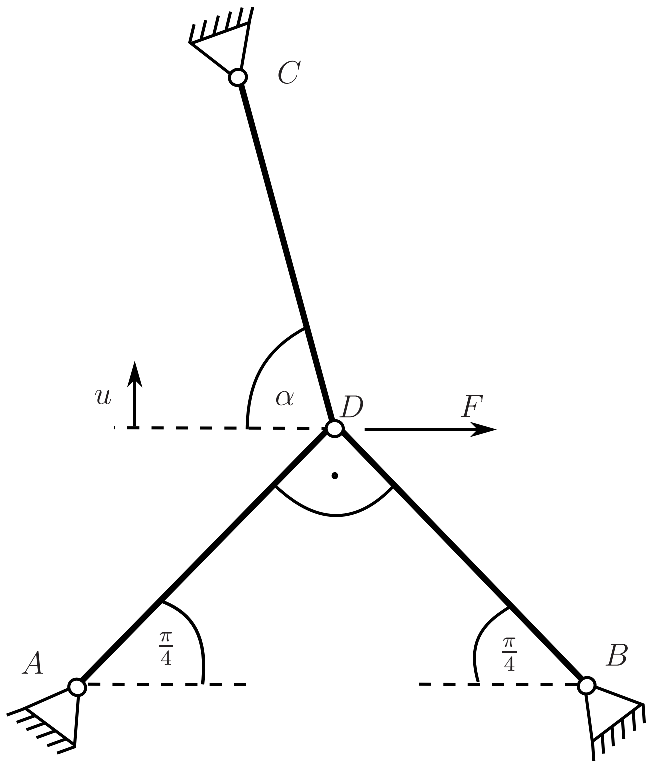
$$EIw(x)=\frac{1}{6}qlx^3-\frac{1}{6}ql^3x$$
$$EIw(\tilde{x})=-\frac{1}{6}ql\tilde{x}^3+q\frac{\tilde{x}^4}{48}+\frac{1}{2}ql^2\tilde{x}^2+\frac{1}{3}ql^3\tilde{x}$$

d) Ort der größten Durchbiegung in Bereich A-B

$$EIw^{'}(x)=\frac{1}{2}qlx^2-\frac{1}{6}ql^3=0$$

$$\rightarrow x_{w_{max}}=\sqrt{\frac{1}{3}}\,l$$

5. Aufgabe: (ca. 28% der Gesamtpunktzahl)



Drei jeweils gelenkig gelagerte Stäbe (Dehnsteifigkeit EA, Länge l) sind im Punkt D gelenkig miteinander verbunden. In Punkt D greift horizontal eine Kraft F an.
Bearbeiten Sie folgende Teilaufgaben:

a) Prüfen Sie die statische Bestimmtheit des Systems.

b) Berechnen Sie unter Verwendung des Prinzips der virtuellen Kräfte die Stabkraft in Stab $\overline{CD}$ in Abhängigkeit des Winkels $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$

c) Berechnen Sie die vertikale Verschiebung u des Punktes D für $\alpha = \frac{\pi}{4}$

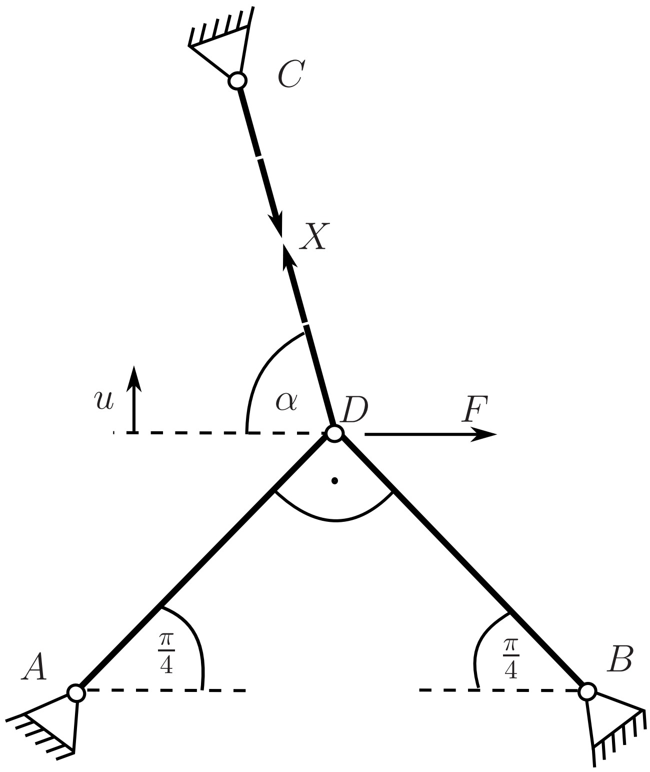
Gegeben: EA, F, l Koppeltafel (siehe Anhang)

Lösung 5. Aufgabe

a) Statische Bestimmtheit:
System ist 1-fach statisch unbestimmt

b) Stabkraft in Stab $\overline{CD}$

- Statisch bestimmtes Grundsystem (1 Bindung lösen)



- 0-LASTFALL
  Gleichgewicht an Knoten D:

$$\sum F_x = 0 : F + S^0_{BD}\frac{\sqrt{2}}{2} - S^0_{AD}\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\sum F_y = 0 : S^0_{AD}\frac{\sqrt{2}}{2} + S^0_{BD}\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\rightarrow S^0_{BD} = -\frac{\sqrt{2}}{2}F \quad ; \quad S^0_{AD} = \frac{\sqrt{2}}{2}F$$

- 1-LASTFALL
  Gleichgewicht an Knoten D:

$$\sum F_x = 0 : S^1_{BD}\frac{\sqrt{2}}{2} - S^1_{AD}\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\cos(\alpha) = 0$$
$$\sum F_y = 0 : S^1_{AD}\frac{\sqrt{2}}{2} + S^1_{BD}\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\sin(\alpha) = 0$$
$$\rightarrow S^1_{BD} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin(\alpha) + \cos(\alpha)) \quad ; \quad S^1_{AD} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin(\alpha) - \cos(\alpha))$$

- Einflusszahlen/Verschiebungen:

$$\alpha_{10} = \frac{1}{EA}\frac{F}{2}(\sin(\alpha) - \cos(\alpha))L - \frac{1}{EA}\frac{F}{2}(\sin(\alpha) + \cos(\alpha))L$$
$$\Rightarrow \alpha_{10} = -\frac{FL}{EA}\cos(\alpha))$$
$$\alpha_{11} = \frac{L}{EA} + \frac{L}{EA}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2(\sin(\alpha) - \cos(\alpha))^2 + \frac{L}{EA}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2(\sin(\alpha) + \cos(\alpha))^2$$
$$\Rightarrow \alpha_{11} = \frac{2L}{EA}$$

- Kompatibilität/Verträglichkeit:

$$\alpha_{10} + X\alpha_{11} = 0$$
$$\Rightarrow X = -\frac{\alpha_{10}}{\alpha_{11}} = \frac{F}{2}\cos(\alpha)$$

c) Verschiebung u für $\alpha = \frac{\pi}{4}$

- Normalkräfte in statisch unbestimmten System:

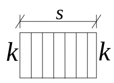
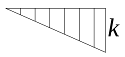
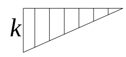
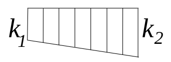
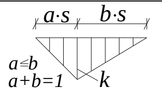
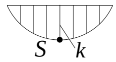
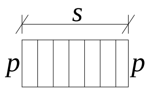
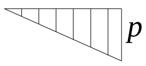
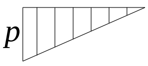
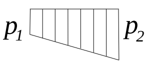
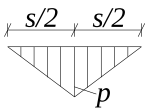
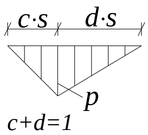
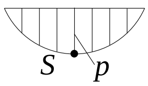
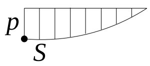
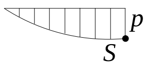
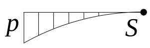
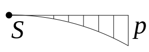
$$S_{AD} = \frac{\sqrt{2}}{2}F$$
$$S_{BD} = -\frac{\sqrt{2}}{4}F$$
$$S_{CD} = \frac{\sqrt{2}}{4}F$$

- Reduktionssatz:

$$u = \frac{FL}{EA}\frac{1}{2} - \frac{FL}{EA}\frac{1}{4} = \frac{FL}{4EA}$$

Anhang: Koppeltafel

Werte der Integrale $\int_0^s P(x) \cdot K(x)\mathrm{d}x$

K(x) / P(x)						
	pks	$\frac{1}{2}pks$	$\frac{1}{2}pks$	$\frac{p}{2}(k_1+k_2)s$	$\frac{1}{2}pks$	$\frac{2}{3}pks$
	$\frac{1}{2}pks$	$\frac{1}{3}pks$	$\frac{1}{6}pks$	$\frac{p}{6}(k_1+2k_2)s$	$\frac{1}{6}pk(1+a)s$	$\frac{1}{3}pks$
	$\frac{1}{2}pks$	$\frac{1}{6}pks$	$\frac{1}{3}pks$	$\frac{p}{6}(2k_1+k_2)s$	$\frac{1}{6}pk(1+b)s$	$\frac{1}{3}pks$
	$\frac{k}{2}(p_1+p_2)s$	$\frac{k}{6}(p_1+2p_2)s$	$\frac{k}{6}(2p_1+p_2)s$	$[\frac{p_1}{6}(2k_1+k_2) + \frac{p_2}{6}(k_1+2k_2)]s$	$[\frac{k}{6}[p_1(1+b)+p_2(1+a)]s$	$\frac{k}{3}(p_1+p_2)s$
	$\frac{1}{2}pks$	$\frac{1}{4}pks$	$\frac{1}{4}pks$	$\frac{p}{4}(k_1+k_2)s$	$\frac{pk}{12b}(3-4a^2)s$	$\frac{5}{12}pks$
	$\frac{1}{2}pks$	$\frac{pk}{6}(1+c)s$	$\frac{pk}{6}(1+d)s$	$\frac{p}{6}[k_1(1+d)+k_2(1+c)]s$	$\frac{pk}{6bc}(2c-c^2-a^2)s$ für $c \geq a$	$\frac{pk}{3}(1+cd)s$
	$\frac{2}{3}pks$	$\frac{1}{3}pks$	$\frac{1}{3}pks$	$\frac{p}{3}(k_1+k_2)s$	$\frac{pk}{3}(1+ab)s$	$\frac{8}{15}pks$
	$\frac{2}{3}pks$	$\frac{1}{4}pks$	$\frac{5}{12}pks$	$\frac{p}{12}(5k_1+3k_2)s$	$\frac{pk}{12}(5-a-a^2)s$	$\frac{7}{15}pks$
	$\frac{2}{3}pks$	$\frac{5}{12}pks$	$\frac{1}{4}pks$	$\frac{p}{12}(3k_1+5k_2)s$	$\frac{pk}{12}(5-b-b^2)s$	$\frac{7}{15}pks$
	$\frac{1}{3}pks$	$\frac{1}{12}pks$	$\frac{1}{4}pks$	$\frac{p}{12}(3k_1+k_2)s$	$\frac{pk}{12}(1+b+b^2)s$	$\frac{1}{5}pks$
	$\frac{1}{3}pks$	$\frac{1}{4}pks$	$\frac{1}{12}pks$	$\frac{p}{12}(k_1+3k_2)s$	$\frac{pk}{12}(1+a+a^2)s$	$\frac{1}{5}pks$

$S \triangleq$ Scheitel einer quadratischen Parabel