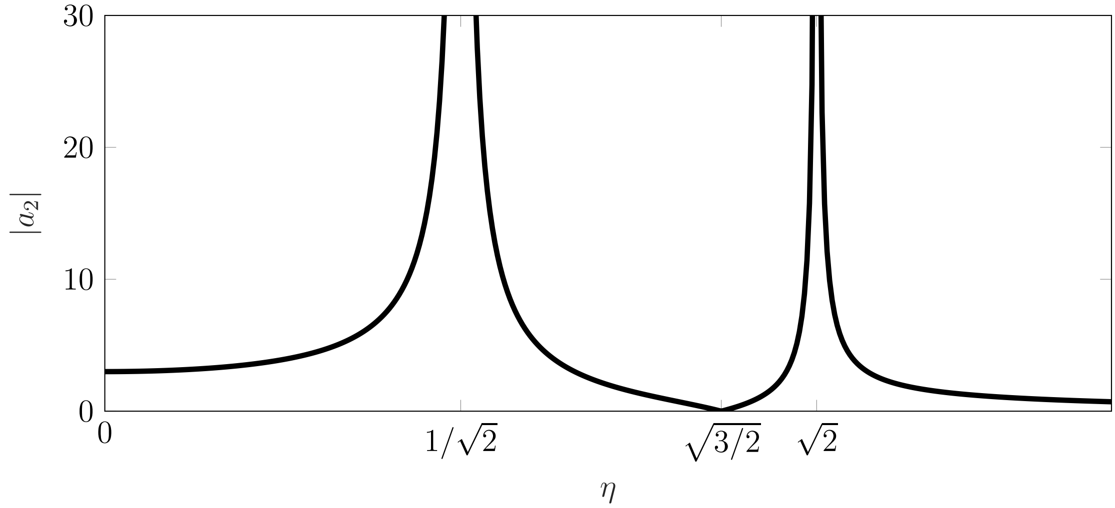
1. Aufgabe: (ca. 17% der Gesamtpunkte)

a) Bei einem Feder-Masse-Dämpfer-System (DGL: $m\ddot{x} + d\dot{x} + cx = 0$) mit der Masse m und Federsteifigkeit c beträgt die Amplitude nach $n = 10$ Schwingungszyklen ein Viertel des Anfangswertes. Wie groß ist die Dämpfungskonstante d?

b) Nennen Sie drei Möglichkeiten der Schwingungsreduzierung bzw. -vermeidung.

c) Das Phänomen der Schwebung betrifft zwei benachbarte Gebäude. Wie kann in diesem Fall das Phänomen theoretisch verhindert und praktisch abgemildert werden?

d) Für einen Schwinger mit zwei Freiheitsgraden ist der Betrag der Amplitude des 2. Freiheitsgrads $|a_2|$ über das Abstimmungsverhältnis η aufgetragen



Benennen Sie das Verhalten bzw. die Effekte bei $\eta = 0$, $\eta = 1/\sqrt{2}$, $\eta = \sqrt{3/2}$ und $\eta = \sqrt{2}$.

e) Was wird unter Scheinresonanz verstanden? Wäre es ratsam, ein Bauwerk auf diese Scheinresonanz hin zu bemessen?

Musterlösung - Aufgabe 1

a) geg.: $x_{10} = \frac{1}{4}x_0$
logarithmisches Dekrement

$$\delta = \frac{1}{n}\ \ln(\frac{x_n}{x_{n+1}}) = \frac{1}{10}\ \ln(\frac{x_0}{x_{10}}) = \frac{1}{10}\ln(4)$$
$$= \frac{2\pi D}{\sqrt{1-D^2}}$$
$$\Leftrightarrow (1-D^2)\,\delta^2 = (2\pi D)^2 \quad \Leftrightarrow \ D^2(4\pi^2+\delta^2) = \delta^2 \quad \Leftrightarrow \ D = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2+\delta^2}} = 0.021$$
$$\Rightarrow d = 2m\omega_0 D = 2\sqrt{mc}D = 0.0441\sqrt{cm}$$

b)
- Dämpfung
- Über- bzw. unterkritische Abstimmung des Gebäudes / aktive und passive Abschirmung (Maschinen vom Gebäude oder Gebäude vom Fundament (Erdbeben))
- Tilger (Hinzufügen eines Feder-Masse-Systems - Tilger schwingt statt Gebäude)

c) Verhinderung: Unendlich steifer Boden
Abmilderung: Dämpfung

d)
- $\eta = 0$: Eigenschwingung
- $\eta = 1/\sqrt{2}$ und $\eta = \sqrt{2}$: Resonanz
- $\eta = \sqrt{3/2}$: Schwingungstilgung

e) Scheinresonanz: Für eine Resonanzstelle $\Omega = \omega_i$ besitzt die Amplitude eine hebbare Unstetigkeit (Zähler und Nenner gleich Null). Trotz der Resonanzbedingung bleiben die Amplituden endlich, da die zugehörige Eigenform nicht angeregt wird.

Nein, Kenntnisse des Systems (m_{ij}, k_{ij}, Ω) nicht immer exakt bekannt und kleine Abweichungen heben Scheinresonanz auf.

2. Aufgabe: (ca. 9% der Gesamtpunkte)

Betrachtet wird eine $2\,\pi$-periodische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(t + 2\,\pi) = f(t)$ für $t \in \mathbb{R}$. Die Funktion ist folgendermaßen definiert

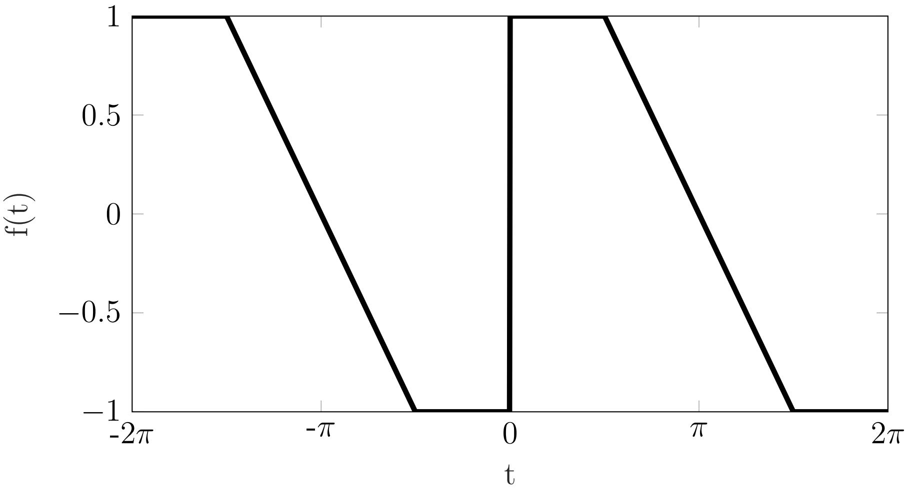
$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \in [0, \pi/2) \\ -2/\pi\, t + 2 & \text{für } t \in [\pi/2, 3\,\pi/2) \\ -1 & \text{für } t \in [3\,\pi/2, 2\,\pi) \end{cases}$$

a) Skizzieren Sie die Funktion auf dem Intervall $[-2\,\pi, 2\,\pi]$.

b) Stellen Sie die Integrale zur Bestimmung der Fourierkoeffizienten von $f(t)$ auf. Begründen Sie anhand der Integrale, welche Fourierkoeffizienten gleich Null und welche Fourierkoeffizienten von Null verschieden sind? **Eine Berechnung ist nicht erforderlich!**

Musterlösung - Aufgabe 2

a)



b) Fourier-Reihe

$$f_e(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\underbrace{C_k}_{a_k} \cos(k\,\omega\,t) + \underbrace{S_k}_{b_k} \sin(k\,\omega\,t) \right]$$

$f(t)$ ist eine ungerade Fkt. $f(t) = -f(-t)\ \forall t \in \mathbb{R}$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T \underbrace{f(t)}_{\text{ungerade}} \,\mathrm{d}t = 0$$

Integral über ungerade Fkt. ist $= 0$ bzw. siehe Flächeninhalt Skizze

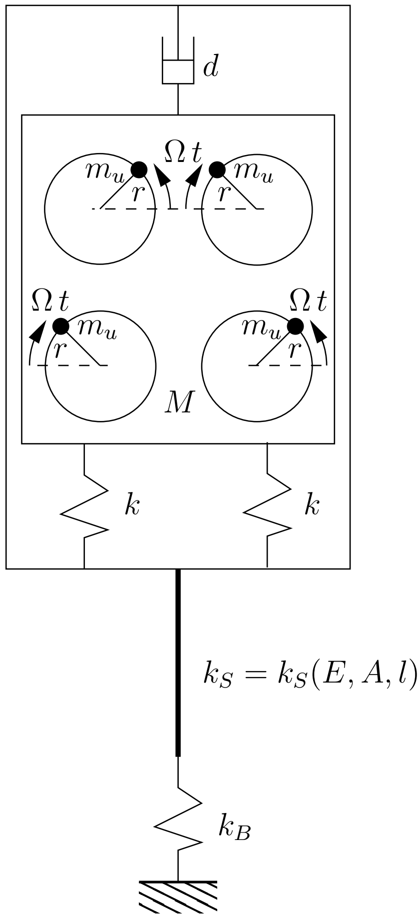
$$a_k = C_k = \frac{2}{T} \int_0^T \underbrace{f(t)}_{\text{ungerade}} \underbrace{\cos(k\,\omega\,t)}_{\text{gerade}} \,\mathrm{d}t = 0$$

ungerade mal gerade Fkt. ergibt ungerade Fkt.; Integral über ungerade Fkt. ist $= 0$

$$b_k = S_k = \frac{2}{T} \int_0^T \underbrace{f(t)}_{\text{ungerade}} \underbrace{\sin(k\,\omega\,t)}_{\text{ungerade}} \,\mathrm{d}t \neq 0$$

ungerade mal ungerade Fkt. ergibt gerade Fkt.; Integral über gerade Fkt. ist $\neq 0$

3. Aufgabe: (ca. 34% der Gesamtpunkte)



Bei einem Vibrationsbär ist der Antrieb (Masse M ohne Berücksichtigung der Unwuchtsmassen m_u) über ein Gehäuse (wird als masselos angenommen) wie abgebildet fest (Klammerung) mit dem in den Boden zu verbringenden Rammgut verbunden. Als Rammgut wird eine Spundwand (E-Modul E, Querschnittsfläche A, Länge l) betrachtet, welche als fest mit dem Boden (Steifigkeit k_B) verbunden angenommen werden soll. Das gesamte System kann somit als raumfest betrachtet werden. Im Antrieb laufen vier Unwuchten (Massen jeweils m_u, Unwuchtradien r) mit konstanten Winkelgeschwindigkeiten Ω wie abbgebildet gegenläufig um. Die Erdanziehung sei zu vernachlässigen. Das System sei schwach gedämpft $0 < D < 1$.

a) Berechnen Sie die Ersatzfedersteifigkeit $k_S = k_S(E, A, l)$ der Spundwand. Gegeben: E, A, l.

Im Folgenden soll mit k_S weiter gerechnet werden. Gegeben: M, m_u, r, k, k_B, k_S, d, Ω.

b) Schneiden Sie das System frei. Bestimmen Sie die Ersatzfedersteifigkeit k_{Ers} für das komplette System.

c) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung für das vorliegende System im Rahmen der synthetischen Methode.

d) Bestimmen Sie die homogene Lösung der Bewegungsgleichung in Abhängigkeit der gegebenen Größen.

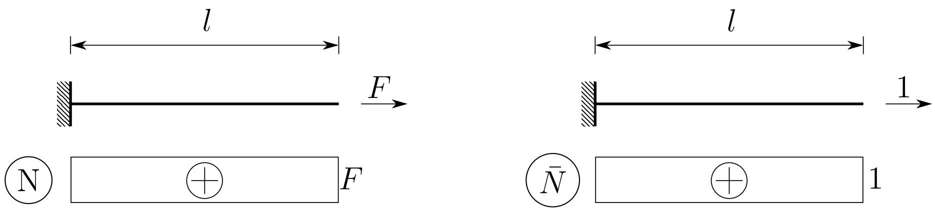
e) Bestimmen Sie die partikuläre Lösung der Bewegungsgleichung in Abhängigkeit der gegebenen Größen.

f) Geben Sie die Bedingung an um das Maximum für die Vergrößerungsfunktion V zu bestimmen.

g) Vor dem Anschalten des Antriebs ist das System in Ruhe, die Anfangswerte zum Betriebsstart sind also $x(t = 0) = 0$, $v(t = 0) = 0$. Bestimmen Sie die spezielle Lösung kurz nach dem Anschalten.

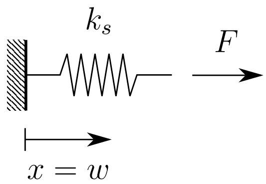
Musterlösung - Aufgabe 3

a) Bestimmung k_s:



$$\alpha_{10} = \int \frac{N\bar{N}}{EA}\,\mathrm{d}x = \frac{F \cdot 1}{EA} l = \frac{Fl}{EA} = w \qquad \Leftrightarrow \qquad F = \frac{EA}{l} \cdot w$$

Lineares Federgesetz:



$$F = k_s \cdot w$$

Koeffizientenvergleich liefert

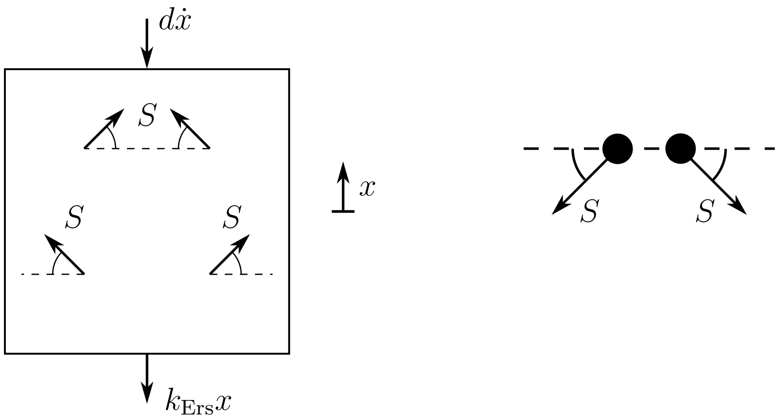
$$k_s = \frac{EA}{l}$$

b) Bestimmung k_{Ers} (Reihenschaltung: $\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$, Parallelschaltung: $k = k_1 + k_2$):

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{k_{\mathrm{Ers}}} = \frac{1}{k_B} + \frac{1}{k_s} + \frac{1}{2k}$$

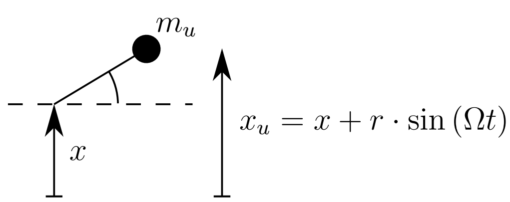
$$\Leftrightarrow \quad k_{\mathrm{Ers}} = \frac{1}{\frac{1}{k_B} + \frac{1}{k_s} + \frac{1}{2k}} = \frac{2k_B k_s k}{2k_s k + 2k_B k + k_B k_s}$$

Freikörperbild:



c) Aufstellen der DGL

Kinematik:



Gehäuse:

$$\uparrow: \quad M\ddot{x} = -d\dot{x} - k_{\text{Ers}}x + 4S\sin(\Omega t)$$

Unwuchtmassen:

$$\uparrow: \quad m_u\ddot{x_u} = -S\sin(\Omega t)$$

mit Kinematik:

$$\underbrace{(M + 4m_u)}_{\tilde{M}}\ddot{x} + d\dot{x} + k_{\text{Ers}}x = 4m_u r\Omega^2\sin(\Omega t)$$

$$\Leftrightarrow \quad \ddot{x} + \frac{d}{\tilde{M}}\dot{x} + \underbrace{\frac{k_{\text{Ers}}}{\tilde{M}}}_{\omega_0^2}x = \frac{4m_u r\Omega^2}{\tilde{M}}\sin(\Omega t)$$

$$\text{EZ } (\tau = \omega_0 t): \quad x'' + \underbrace{\frac{d}{\tilde{M}\omega_0^2}}_{2D}x' + x = \underbrace{4\frac{m_u}{\tilde{M}}r}_{\bar{x}_0}\underbrace{\frac{\Omega^2}{\omega_0^2}}_{\eta^2}\sin(\eta\tau)$$

d) homogene Lösung:

$$x_h = e^{-D\tau}\left(A\cos(\nu\tau) + B\sin(\nu\tau)\right)$$
$$\text{mit } \nu = \sqrt{1 - D^2}$$

e) partikuläre Lösung:

$$\text{Ansatz rechte Seite:} \quad x_p = \bar{x}_0\underbrace{\eta^2 V}_{V_1}\sin(\eta\tau - \gamma)$$

$$\text{mit } V_1 = \frac{\eta^2}{\sqrt{\left(1-\eta^2\right)^2 + \left(2D\eta\right)^2}}, \quad \tan(\gamma) = \frac{2D\eta}{1-\eta^2}, \quad \bar{x}_0 = 4\frac{m_u}{\tilde{M}}r$$

f) Bedingung max Vergrößerungsfunktion

$$\frac{\partial V_1}{\partial\eta} \stackrel{!}{=} 0$$

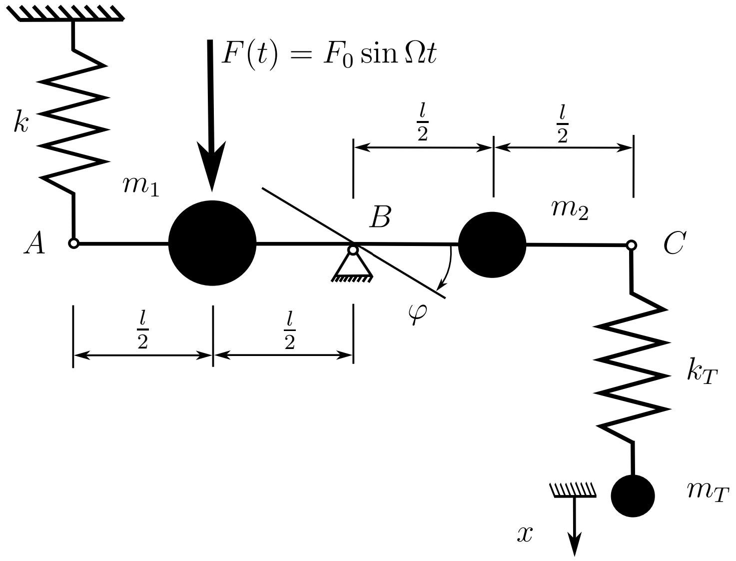
g) spezielle Lösung:

$$x(0) = 0 \qquad v(0) = 0$$

$$\begin{aligned}
\text{mit: } x_s &= x_h + x_p = e^{-D\tau}\left(A\cos(\nu\tau) + B\sin(\nu\tau)\right) + \bar{x}_0 \cdot V_1\sin(\eta\tau - \gamma) \\
x_s' &= -De^{-D\tau}\left(A\cos(\nu\tau) + B\sin(\nu\tau)\right) + e^{-D\tau}\left(-A\nu\sin(\nu\tau) + B\cos(\nu\tau)\right) \\
&\quad + \bar{x}_0\eta V_1\cos(\eta\tau - \gamma) \\
x_s(0) &= 0 = A + \bar{x}_0 V_1\sin(-\gamma) \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{A = -\bar{x}_0 V_1\sin(-\gamma)} \\
\dot{x}_s(0) &= \omega_0 x_s'(0) = -DA + B\nu + \bar{x}_0\eta V_1\cos(-\gamma) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \boxed{B = -\frac{1}{\nu}\left(D\bar{x}_0 V_1\sin(-\gamma) + \bar{x}_0\eta V_1\cos(-\gamma)\right)}
\end{aligned}$$

$$\text{ohne Phasenverschiebung } (\gamma = 0): \quad A = 0, \; B = -\frac{\bar{x}_0\eta V_1}{\nu}$$

4. Aufgabe: (ca. 40% der Gesamtpunkte)



Ein masseloser Stab mit konzentrierten Punktmassen (m_1, m_2) ist in Punkt B zweiwertig gelenkig gelagert und in Punkt A durch eine Feder (Federsteifigkeit k) mit der starren Umgebung verbunden. Desweiteren ist der Stab in Punkt C mit einer Tilgermasse m_T durch eine Feder (Federsteifigkeit k_T) verbunden. Beide Federelemente sind für $\varphi = 0$ und $x = 0$ entspannt. Das Sytem wird mit einer an der Masse m_1 angreifenden Kraft $F(t)$ harmonisch mit der Frequenz Ω erregt.

Bearbeiten Sie zu oben beschriebenem System folgende Teilaufgaben:

a) Stellen Sie unter Verwendung der Lagrangeschen Gleichungen 2. Art die Bewegungsgleichungen für kleine Verdrehungen in Abhängigkeit der Koordinaten φ und x auf.

b) Berechnen Sie die Eigenfrequenzen des Sytems für $k_T = 2k$ und skizzieren Sie die zugehörigen Eigenformen.

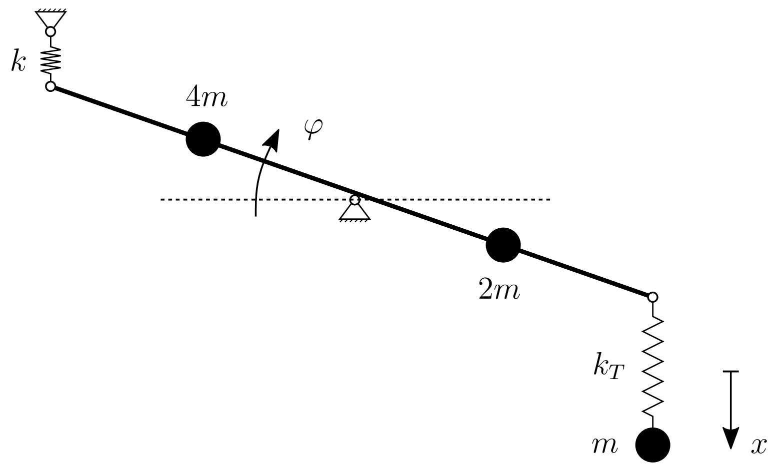
c) Bestimmen Sie die Federsteifigkeit k_T so, dass die stationäre Schwingung des masselosen Stabes getilgt wird. Wie groß ist die Amplitude der Tilgermasse in diesem Fall?

Gegeben: $m_1 = 4m,\ m_2 = 2m,\ m_T = m,\ k,\ l,\ \Omega,\ F_0$

Hinweis: Die Aufgabe ist mit der Methode nach Lagrange zu lösen. Andere Lösungswege als diese werden nicht gewertet. Der Einfluss der Gravitation kann vernachlässigt werden.

Musterlösung - Aufgabe 4

a) Bewegungsgleichungen



Kinetische Energie:

$$T = \frac{1}{2}\overbrace{4m}^{m_1}\left(\frac{l}{2}\right)^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\overbrace{2m}^{m_2}\left(\frac{l}{2}\right)^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\overbrace{m}^{m_T}\dot{x}^2$$
$$\Rightarrow T = \frac{3}{4}ml^2\,\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

Potentielle Energie:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}k\left(sin\left(\varphi\right)\cdot l\right)^2 + \frac{1}{2}k_T\left(x - sin\left(\varphi\right)l\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}kl^2 sin^2\left(\varphi\right) + \frac{1}{2}k_T\left(x^2 - 2x\,sin\left(\varphi\right)l + sin^2\left(\varphi\right)l^2\right) \end{aligned}$$

Lagrangefunktion:

$$L = \frac{3}{4}ml^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}l^2 sin^2\left(\varphi\right)\left(k + k_T\right) - \frac{1}{2}k_T\,x^2 + k_T\,x\,sin\left(\varphi\right)l$$

Lagrange'sche Gleichungen 2. Art:

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = \frac{3}{2}ml^2\dot{\varphi} \qquad \longrightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right) = \frac{3}{2}ml^2\ddot{\varphi}$$
$$\frac{\partial L}{\partial\varphi} = -\frac{1}{\cancel{2}}\,l^2\left(k + k_T\right)\,\cancel{2}\,\underbrace{\left(sin\varphi\right)}_{\approx\varphi}\,\underbrace{cos\left(\varphi\right)}_{\approx 1} + k_T\,x\,\underbrace{cos\left(\varphi\right)}_{\approx 1}l$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{x}} = m\dot{x} \qquad \longrightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\right) = m\ddot{x}$$
$$\frac{\partial L}{\partial x} = -k_T\,x + k_T\,\underbrace{sin\left(\varphi\right)}_{\approx\varphi}l$$

Linearisierte Bewegungsgleichungen:

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2}ml^2 & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{\varphi} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \left(k + k_T\right)l^2 & -k_T\,l \\ -k_T\,l & k_T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varphi \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_0\,\frac{l}{2}\,sin\left(\Omega t\right) \\ 0 \end{bmatrix}$$

b) Eigenfrequenzen und Eigenformen

$\Rightarrow k_T = 2k$:

$$\det \begin{bmatrix} 3kl^2 - \frac{3}{2}ml^2\omega^2 & -2kl \\ -2kl & 2k - m\omega^2 \end{bmatrix} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \left(3kl^2 - \frac{3}{2}ml^2\omega^2\right)\left(2k - m\omega^2\right) - 4k^2l^2 = 0$$

$$\Rightarrow 6k^2\cancel{l^2} - 3k\cancel{l^2}m\omega^2 - 3m\cancel{l^2}k\omega^2 + \frac{3}{2}m^2\cancel{l^2}\omega^4 - 4k^2\cancel{l^2} = 0$$

$$\Rightarrow \omega^4 - 4\frac{k}{m}\omega^2 + \frac{4}{3}\frac{k^2}{m^2} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\omega^2 - 2\frac{k}{m}\right)^2 - 4\frac{k^2}{m^2} + \frac{4}{3}\frac{k^2}{m^2} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\omega^2 - 2\frac{k}{m}\right)^2 = \frac{8}{3}\frac{k^2}{m^2}$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \left(\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \pm \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)\frac{k}{m} = \frac{2\left(\sqrt{3} \pm \sqrt{2}\right)}{\sqrt{3}}\frac{k}{m}$$

$$\omega_1^2 = \left(2 - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)\frac{k}{m} = 0,37\frac{k}{m}$$

$$\omega_2^2 = \left(2 + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)\frac{k}{m} = 3,63\frac{k}{m}$$

Eigenformen:

$$\begin{bmatrix} 3kl^2 - \frac{3}{2}ml^2\omega_i^2 & -2kl \\ -2kl & 2k - m\omega_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1^i \\ C_2^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$C_1^i = 1$:

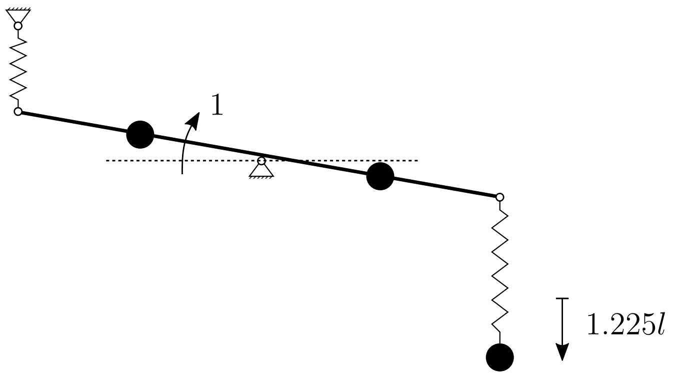
$$3kl^2 - \frac{3}{2}ml^2\omega_i^2 - 2kl\,C_2^i = 0$$

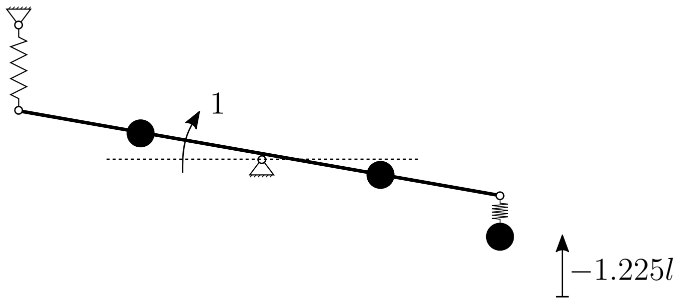
$$\rightarrow C_2^i = \frac{3kl^2 - \frac{3}{2}ml^2\omega_i^2}{-2kl}$$

$$\Rightarrow C_2^1 = \frac{3\cancel{k}\cancel{l^2} - \frac{3}{2}\cancel{m}\cancel{l^2}\left(2 - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)\cancel{\frac{k}{m}}}{-2\cancel{k}\cancel{l}} = \frac{3}{2}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\,l = 1,225\,l$$

$$\Rightarrow C_2^2 = \frac{3l - \frac{3}{2}l\left(2 + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)}{2} = -\frac{3}{2}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\,l = -1,225\,l$$

SKIZZE





c) Bewegungsgleichung

$$M\ddot{\boldsymbol{q}} + K\boldsymbol{q} = \boldsymbol{F} \qquad\qquad \boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} F_0 \cdot \frac{l}{2} sin\,(\Omega t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Stationäre Lösung:

Ansatz: $\boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} sin\,(\Omega t) \qquad \rightarrow \ddot{\boldsymbol{q}} = -\Omega^2 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} sin\,(\Omega t)$

Einsetzen:

$$-M\boldsymbol{a}\,\Omega^2 sin\,(\Omega t)\; + \;K\boldsymbol{a}\,sin\,(\Omega t) = \begin{bmatrix} F_0 \frac{l}{2} \\ 0 \end{bmatrix} sin\,(\Omega t)$$

$$\rightarrow \left(K - M\Omega^2\right)\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} F_0 \frac{l}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad also: \begin{bmatrix} (k+k_T)\,l^2 - \frac{3}{2}ml^2\Omega^2 & -k_T l \\ -k_T l & k_T - m\Omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \frac{l}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Cramersche Regel: $a_1 = \frac{Z_1}{N}$; $a_2 = \frac{Z_2}{N}$

$$Z_1 = \det \begin{bmatrix} F_0 \frac{l}{2} & -k_T l \\ 0 & k_T - m\Omega^2 \end{bmatrix} = F_0 \frac{l}{2}\left(k_T - m\Omega^2\right)$$

$$Z_2 = \det \begin{bmatrix} (k+k_T)\,l^2 - \frac{3}{2}ml^2\Omega^2 & F_0 \frac{l}{2} \\ -k_T l & 0 \end{bmatrix} = F_0 \frac{l^2}{2} k_T$$

$$N = \left(\Omega^4 - \left(\frac{2k + 5k_T}{3m}\right)\Omega^2 + \frac{2}{3}\frac{k\,k_T}{m^2}\right) m^2 l^2$$

Tilgung:

$$Z_1 = 0: \qquad F_0 \frac{l}{2}\left(k_T - m\Omega^2\right) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow k_T = m\Omega^2$$

Amplitude:

$$a_2 = \frac{Z_2}{N} = \frac{F_0 \frac{\cancel{l^2}}{2} \cancel{m\Omega^2}}{\cancel{l^2} m^{\cancel{2}}\left(\cancel{\Omega^4} - \cancel{\frac{2k}{3m}\Omega^2} - \frac{5}{3}\Omega^{\cancel{4}} + \cancel{\frac{2k}{3m}\Omega^2}\right)}$$

$$= \frac{F_0 \frac{1}{2}}{-\frac{2}{3}\Omega^2 m} = -\frac{3}{4}\frac{F_0}{m\Omega^2}$$