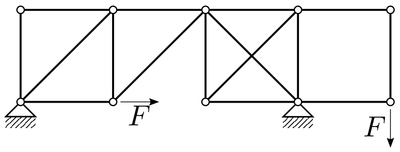
Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. habil. P. Betsch
Prof. Dr.-Ing. habil. Th. Seelig

Prüfung in
Statik starrer Körper
4. März 2020

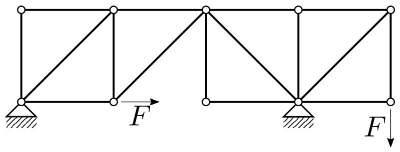
1. Aufgabe (ca. 27 % der Gesamtpunktzahl)

Aufgabe 1.1

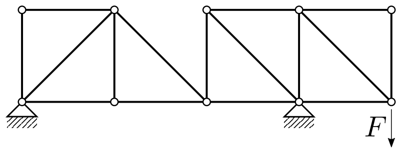
I:



II:



III:



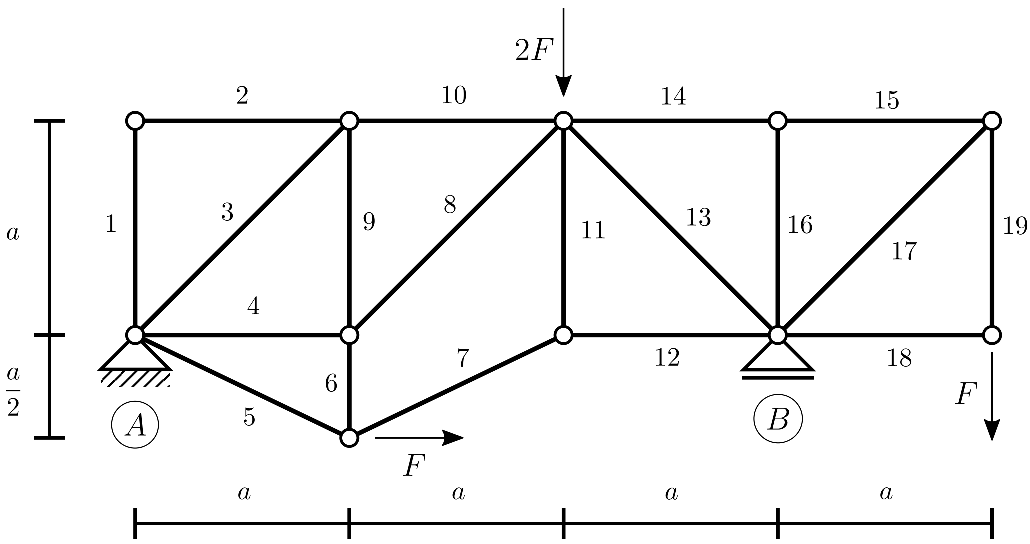
Gegeben seien die dargestellten drei Fachwerke. Bearbeiten Sie folgende Aufgabenteile:

a) Ermitteln Sie für welche(s) Fachwerk(e) die Abzählformel (notwendige Bedingung) für statische Bestimmtheit erfüllt ist.

b) Welche(s) Fachwerk(e) sind statisch bestimmt? Begründen Sie Ihre Antwort ausführlich.

c) Verschieben Sie in Fachwerk I **einen** Stab so, dass das System statisch bestimmt ist/bleibt und der verschobene Stab an neuer Stelle auf Zug belastet ist (Hinweis: Nullstäbe beachten, keine Rechnung erforderlich).

Aufgabe 1.2



Führen Sie am dargestellten System folgende Aufgabenteile durch:

a) Beurteilen Sie das Tragwerk hinsichtlich statischer Bestimmtheit.

b) Bestimmen Sie, falls vorhanden, alle Nullstäbe des Systems (mit Begründung).

c) Bestimmen Sie alle Lagerreaktionen sowie die Stabkräfte in den Stäben 5-8.

Gegeben: a, F

Musterlösung - Aufgabe 1 Aufgabe 1.1

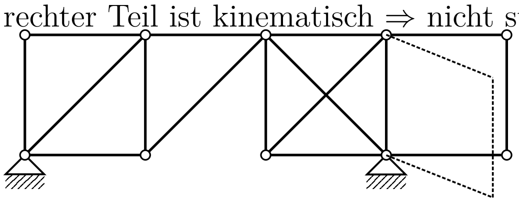
a) Es gilt

- Alle drei Tragwerke sind Fachwerke ⇒ Abzählformel für Fachwerke
- Für alle drei Tragwerke gilt:

$$\left.\begin{array}{rl} a = 4 & \text{(Lager)} \\ k = 10 & \text{(Knoten)} \\ s = 16 & \text{(Stäbe)} \end{array}\right\} \Rightarrow 2k = 20 = a + s \qquad \checkmark$$

⇒ Notwendige Bedingung für alle 3 Tragwerke erfüllt

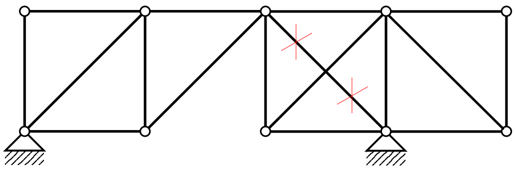
b) **System I:**
rechter Teil ist kinematisch ⇒ nicht statisch bestimmt



System II:
Zwei Teile nach Aufbauprinzip → starre Körper.
Diese sind als Dreigelenkbogen zusammengesetzt.
⇒ statisch bestimmt

System III:
Siehe System II.
ABER: Dreigelenkbogen mit drei Gelenken auf einer Linie
⇒ kinematisch, also nicht statisch bestimmt.

c) Verschiebe durchgekreuzten Stab:

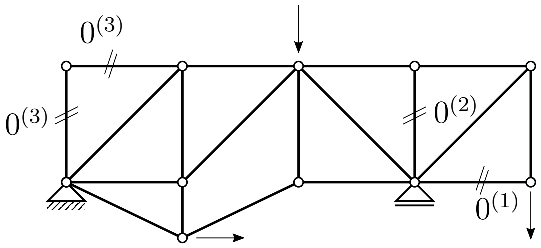


Aufgabe 1.2

a)
- $a = 3, \quad s = 19, \quad k = 11 \quad \Rightarrow 2k = 22 = a + s \quad \checkmark$
- Zwei Teile nach Aufbauprinzip, mit 3 Stäben, die sich nicht in einem Punkt schneiden verbunden ⇒ insgesamt ein starrer Körper.
- Nicht kinematisch gelagert.

⇒ statisch bestimmt.

b) Nullstäbe:



(1) belasteter Zweischlag mit Kraft in Richtung eines Stabes ⇒ anderer Stab ist Nullstab.

(2) unbelasteter Knoten mit 3 Stäben. 2 Stäbe parallel ⇒ 3. Stab Nullstab.

(3) unbelasteter Zweischlag ⇒ beide Stäbe sind Nullstäbe.

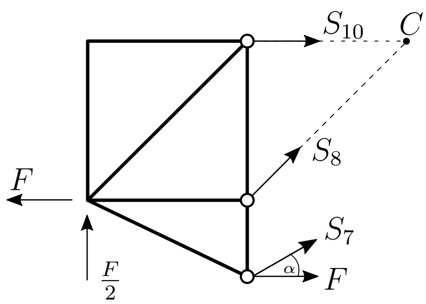
c) **Lagereaktionen:**

$$\sum F_{ix} \overset{!}{=} 0: \quad A_x = -F$$

$$\sum M_i^A \overset{!}{=} 0: \quad F\frac{a}{2} - 2F2a - F4a + B3a = 0 \quad \Leftrightarrow \quad B = \frac{5}{2}F$$

$$\sum F_{iy} \overset{!}{=} 0: \quad A_y + B - 2F - F = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A_y = \frac{1}{2}F$$

Stabkräfte:
Ritterschnitt:



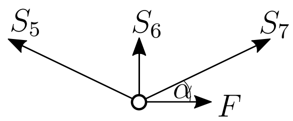
$$\sin(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{5}}, \qquad \cos(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\sum M_i^C \overset{!}{=} 0: \quad F\frac{3}{2}a - Fa - \frac{1}{2}F2a + S_7\frac{8}{\sqrt{5}}\frac{3}{8}a - S_7\frac{1}{\sqrt{5}}a = 0$$

$$\Rightarrow S_7 = \frac{\sqrt{5}}{4}F$$

$$\sum F_{iy} \overset{!}{=} 0: \quad A_z + S_8\frac{1}{\sqrt{2}} + S_7\frac{1}{\sqrt{5}} \quad \Rightarrow \quad S_8 = -\frac{3\sqrt{2}}{4}F$$

Knotenpunktverfahren:

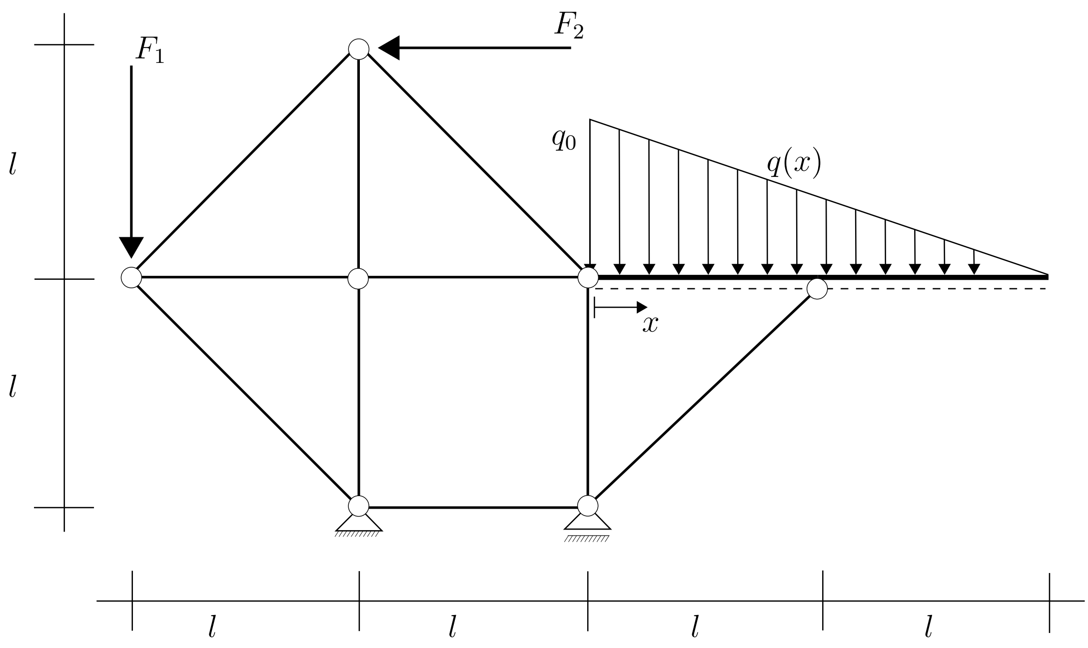


$$\sum F_{ix} \overset{!}{=} 0: \qquad S_7\frac{2}{\sqrt{5}} - S_5\frac{2}{\sqrt{5}} + F = 0$$

$$\Rightarrow S_5 = S_2 + \frac{\sqrt{5}F}{2} = \frac{3\sqrt{5}}{4}F$$

$$\sum F_{iy} \overset{!}{=} 0: \qquad S_6 = -\frac{1}{\sqrt{5}}(S_5 + S_8) = -F$$

2. Aufgabe (ca. 29 % der Gesamtpunktzahl)



Das dargestellte Tragwerk wird durch zwei Einzellasten F_1 und F_2 sowie eine linear veränderliche Streckenlast $q(x)$ belastet.

a) Beurteilen Sie das Tragwerk hinsichtlich der statischen Bestimmtheit.

b) Bestimmen Sie die Schnittgrößenverläufe $Q(x)$ sowie $M(x)$ des Balkens unter Verwendung des gegebenen Koordinatensystems.

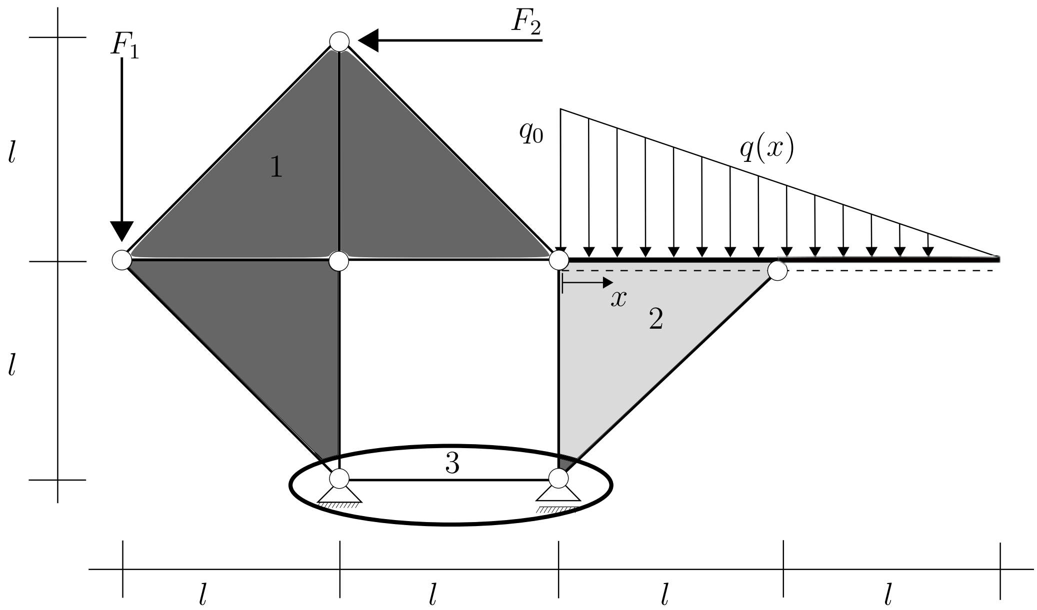
c) Bestimmen Sie den Normalkraftverlauf $N(x)$ des Balkens.

d) Skizzieren Sie die Funktionsverläufe $M(x), Q(x)$ und $N(x)$ des Balkens unter Angabe der Ordinaten an den Bereichsrändern.

Gegeben: $l,\ q_0,\ F_1,\ F_2$

Musterlösung - Aufgabe 2

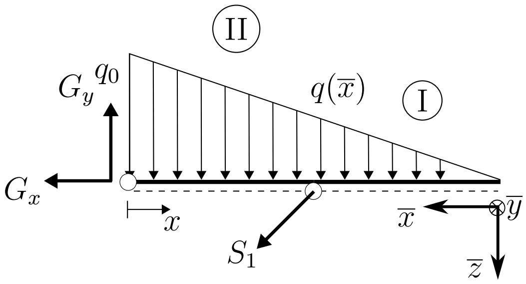
a) Prüfe statische Bestimmtheit..



Körper **1** gemäß 1. Bildungsgesetz.
Körper **3** starr und ebenfalls statisch bestimmt.
Entfernen von Stab 3 und Behinderung der entstehenden Kinematik durch zweiwertiges Auflager B. → statisch bestimmt und nicht kinematischer Dreigelenkbogen.

⇒ Das System ist statisch bestimmt.

b) **Variante 1: Integration von rechts**



Streckenlast als Funktion von $\overline{x}$: $q(\overline{x}) = \frac{1}{2} q_0 \frac{\overline{x}}{L}$

Bereichseinteilung und Integration

I für $0 < \overline{x} < L$:

$$\frac{dQ}{d\overline{x}} = -q(\overline{x})$$

$$Q^I(\overline{x}) = \frac{1}{4} q_0 \frac{\overline{x}^2}{L} + C_1$$

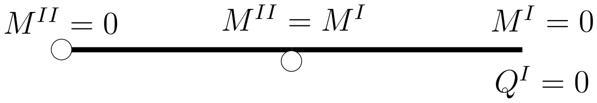
$$M^I(\overline{x}) = \frac{1}{12} q_0 \frac{\overline{x}^3}{L} + C_1 \overline{x} + C_2$$

II für $L < \overline{x} < 2L$:

$$Q^{II}(\overline{x}) = \frac{1}{4} q_0 \frac{\overline{x}^2}{L} + C_3$$

$$M^{II}(\overline{x}) = \frac{1}{12} q_0 \frac{\overline{x}^3}{L} + C_3 \overline{x} + C_4$$

Übergangs- und Randbedingungen



Randbedingungen einfordern

$$M^I(0) \overset{!}{=} 0 \quad \to C_2 = 0$$
$$Q^I(0) \overset{!}{=} 0 \quad \to C_1 = 0$$

Übergangs- und Randbedingungen einfordern

$$M^{II}(2L) = \frac{8}{12}q_0L^2 + C_3 2L + C_4 \overset{!}{=} 0$$
$$\to C_4 = -2C_3 - \frac{2}{3}q_0L^2$$

$$M^I(L) \overset{!}{=} M^{II}(L)$$
$$\frac{1}{12}q_0L^2 = \frac{1}{12}q_0L^2 + C_3L - 2C_3L - \frac{2}{3}q_0L^2$$
$$C_3 = -\frac{2}{3}q_0L$$
$$\to C_4 = \frac{4}{3}q_0L^2 - \frac{2}{3}q_0L^2 = \frac{2}{3}q_0L^2$$

Funktionsverläufe (als Funktion von $\overline{x}$ zunächst)

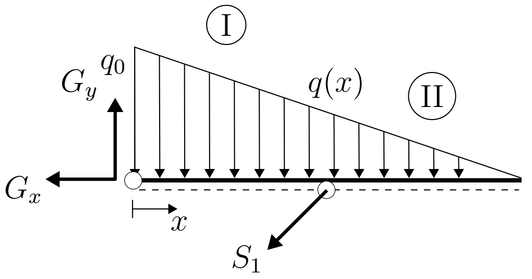
$$Q^I(\overline{x}) = \frac{1}{4}q_0\frac{\overline{x}^2}{L} \qquad Q^{II}(\overline{x}) = \frac{1}{4}q_0\frac{\overline{x}^2}{L} - \frac{2}{3}q_0L$$
$$M^I(\overline{x}) = \frac{1}{12}q_0\frac{\overline{x}^3}{L} \qquad M^{II}(\overline{x}) = \frac{1}{12}q_0\frac{\overline{x}^3}{L} - \frac{2}{3}q_0L\overline{x} + \frac{2}{3}q_0L^2$$

Transformation auf Koordinate x unter Verwendung von $\overline{x} = 2L - x$

$$\to Q^I = \frac{1}{4}q_0\frac{(2L-x)^2}{L} = \frac{1}{4}q_0\frac{x^2}{L} - q_0x + q_0L$$
$$M^I \overset{\textbf{VZ!}}{=} -\frac{1}{12}q_0\frac{\overline{x}^3}{L} = -\frac{1}{12}q_0\frac{(2L-x)(4L^2-4Lx+x^2)}{L}$$
$$= \frac{1}{12}q_0\frac{x^3}{L} - \frac{1}{2}q_0x^2 + q_0Lx - \frac{2}{3}q_0L^2$$

$$Q^{II}(x) = Q^I(x) - \frac{2}{3}q_0L = \frac{1}{4}q_0\frac{x^2}{L} - q_0x + \frac{1}{3}q_0L$$
$$M^{II}(x) = M^I(x) + \frac{2}{3}q_0L(2L-x) - \frac{2}{3}q_0L^2 \quad \text{Vorzeichenwechsel wegen der Transformation}$$
$$= \frac{1}{12}q_0\frac{x^3}{L} - \frac{1}{2}q_0x^2 + q_0Lx - \frac{2}{3}q_0L^2 + \frac{4}{3}q_0L^2 - \frac{2}{3}Lxq_0 - \frac{2}{3}q_0L^2$$
$$= \frac{1}{12}q_0\frac{x^3}{L} - \frac{1}{2}q_0x^2 + \frac{1}{3}q_0Lx$$

Variante 2: Integration von links



Streckenlast als Funktion von x: $q(x) = q_0 - \frac{x}{2L}q_0$

Bereichseinteilung und Integration

I für $0 < x < L$:

$$\frac{dQ}{dx} = -q(x)$$

$$Q^I(x) = \frac{x^2}{4L}q_0 - q_0 x + C_1$$

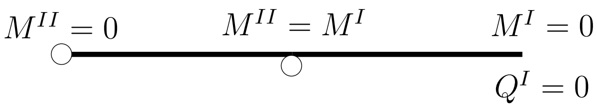
$$M^I(x) = \frac{x^3}{12L}q_0 - \frac{x^2}{2}q_0 + C_1 x + C_2$$

II für $L < x < 2L$:

$$Q^{II}(x) = \frac{x^2}{4L}q_0 - q_0 x + C_3$$

$$M^{II}(x) = \frac{x^3}{12L}q_0 - \frac{x^2}{2}q_0 + C_1 x + C_2$$

Übergangs- und Randbedingungen



Übergangs- und Randbedingungen einfordern

$M^I(x=0) \overset{!}{=} 0$ $\qquad C_2 = 0$

$Q^I x(x=2l) \overset{!}{=} 0$ $\qquad \frac{\cancel{4}L^{\cancel{2}}}{\cancel{4L}}q_0 - 2q_0 l + C_3 = 0$

$\rightarrow C_3 = q_0 L$

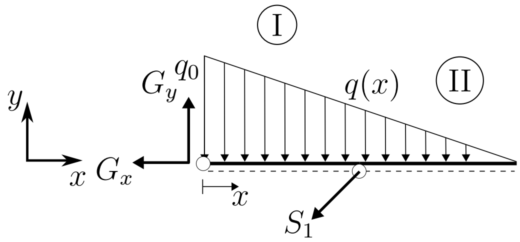
$M^{II}(x=2l) \overset{!}{=} 0$ $\qquad \frac{8}{12}L^2 q_0 - \cancel{q_0 2L^2} + \cancel{q_0 2L^2} + C_4 = 0$

$\rightarrow C_4 = -\frac{2}{3}q_0 L^2$

$M^{II}(x=L) \overset{!}{=} M^I(x=L)$ $\qquad \cancel{\frac{1}{12}q_0 L^2} - \cancel{\frac{1}{2}q_0 L^2} - \frac{2}{3}q_0 L^2 + q_0 L^2 = \cancel{\frac{1}{12}q_0 L^2} - \cancel{\frac{1}{2}q_0 L^2} + C_1 L$

$\rightarrow C_1 = -\frac{1}{3}q_0 L$

Variante 3: Kräftegleichgewicht



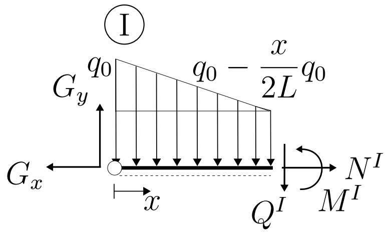
Mit den Gelenkkräften G_x, G_y und der Stabkraft S_1

$$\sum M_{iy}^A \stackrel{!}{=} 0 : \frac{S_1}{\sqrt{2}}L - \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}Lq_0\frac{1}{3}2L = 0 \qquad \rightarrow S_1 = -\sqrt{2}\frac{2}{3}q_0L$$

$$\sum F_{ix} \stackrel{!}{=} 0 : -G_x - \frac{S_1}{\sqrt{2}} = 0 \qquad \rightarrow G_x = \frac{2}{3}q_0L$$

$$\sum F_{iy} \stackrel{!}{=} 0 : G_y - \frac{S_1}{\sqrt{2}} - q_0L = 0 \qquad \rightarrow G_y = q_0L + \frac{S_1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{3}q_0L$$

Bereich I für: $0 < x < L$:



$$\sum F_{iz} \stackrel{!}{=} 0 : \qquad Q^I(x) + \frac{1}{2}x(q_0 + q_0 - \frac{x}{2L}q_0) - G_y = 0$$

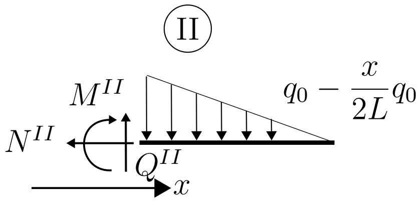
$$\rightarrow Q^I(x) = G_y - q_0x + \frac{x^2}{4L}q_0 = \frac{1}{4}q_0\frac{x^2}{L} - q_0x + \frac{1}{3}q_0L$$

$$\sum M_{iy}^x \stackrel{!}{=} 0 : \qquad M^I(x) - G_yx + (q_0 - \frac{x}{2L}q_0)\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2}\frac{x}{2L}q_0x\frac{2}{3}x = 0$$

$$\rightarrow M^I(x) = \frac{q_0x^3}{4L} - \frac{q_0x^3}{6L} - \frac{q_0x^2}{2} + \frac{1}{3}q_0Lx$$

$$\rightarrow M^I(x) = \frac{1}{12L}q_0x^3 - \frac{1}{2}q_0x^2 + \frac{1}{3}q_0Lx$$

Bereich II für: $L < x < 2L$:



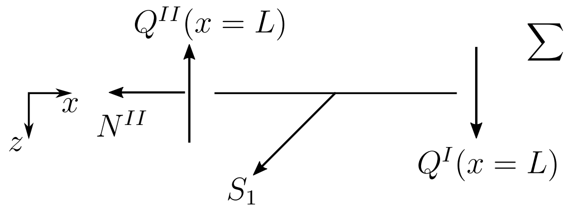
$$\sum F_{iz} \stackrel{!}{=} 0 : \quad -Q^{II}(x) + \frac{1}{2}(q_0 - \frac{x}{2L}q_0)(2L - x) = 0$$

$$\rightarrow Q^{II}(x) = \frac{q_0x^2}{4L} - q_0x + q_0L$$

$$\sum M_{iy}^x \stackrel{!}{=} 0 : \quad -M^{II}(x) - (q_0 - \frac{x}{2L}q_0)\frac{1}{2}(2L - x)\frac{1}{3}(2L - x) = 0$$

$$\rightarrow M^{II}(x) = \frac{1}{12L}q_0x^3 - q_0\frac{x^2}{2} + q_0Lx - \frac{2}{3}q_0L^2$$

c) Normalkraftverlauf $N(x)$:



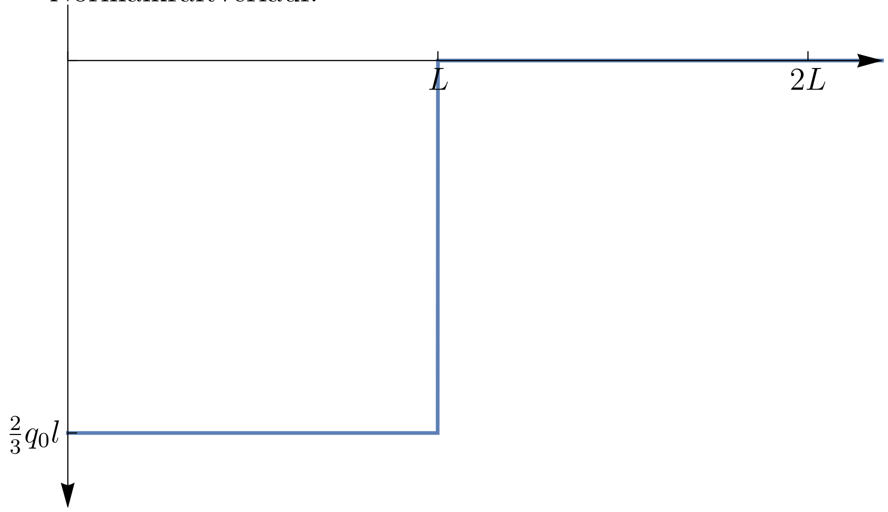
$$\sum F_{iz} \stackrel{!}{=} 0 : -Q^{II}(x = L) + \frac{S_1}{\sqrt{2}} + Q^I(x = L) = 0$$

$$\frac{2}{3}q_oL - \frac{S_1}{\sqrt{2}} = 0$$

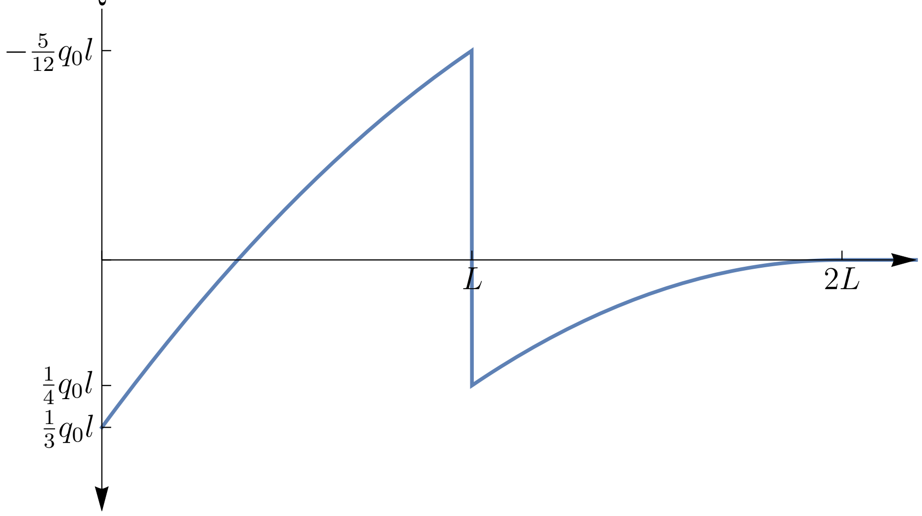
$$\rightarrow S_1 = -\sqrt{2}\frac{2}{3}q_0L \qquad \rightarrow N^{II} = \frac{2}{3}q_0L$$

d) Schnittgrößenverläufe:

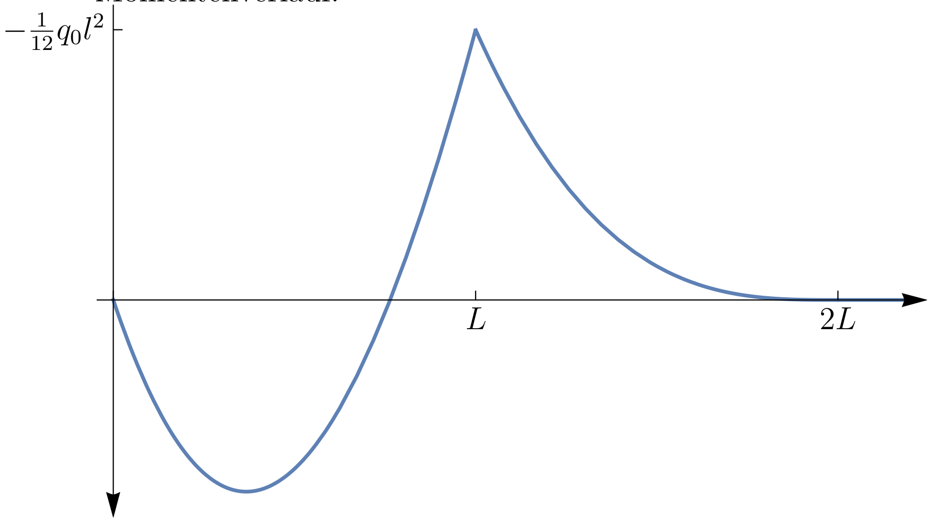
Normalkraftverlauf:



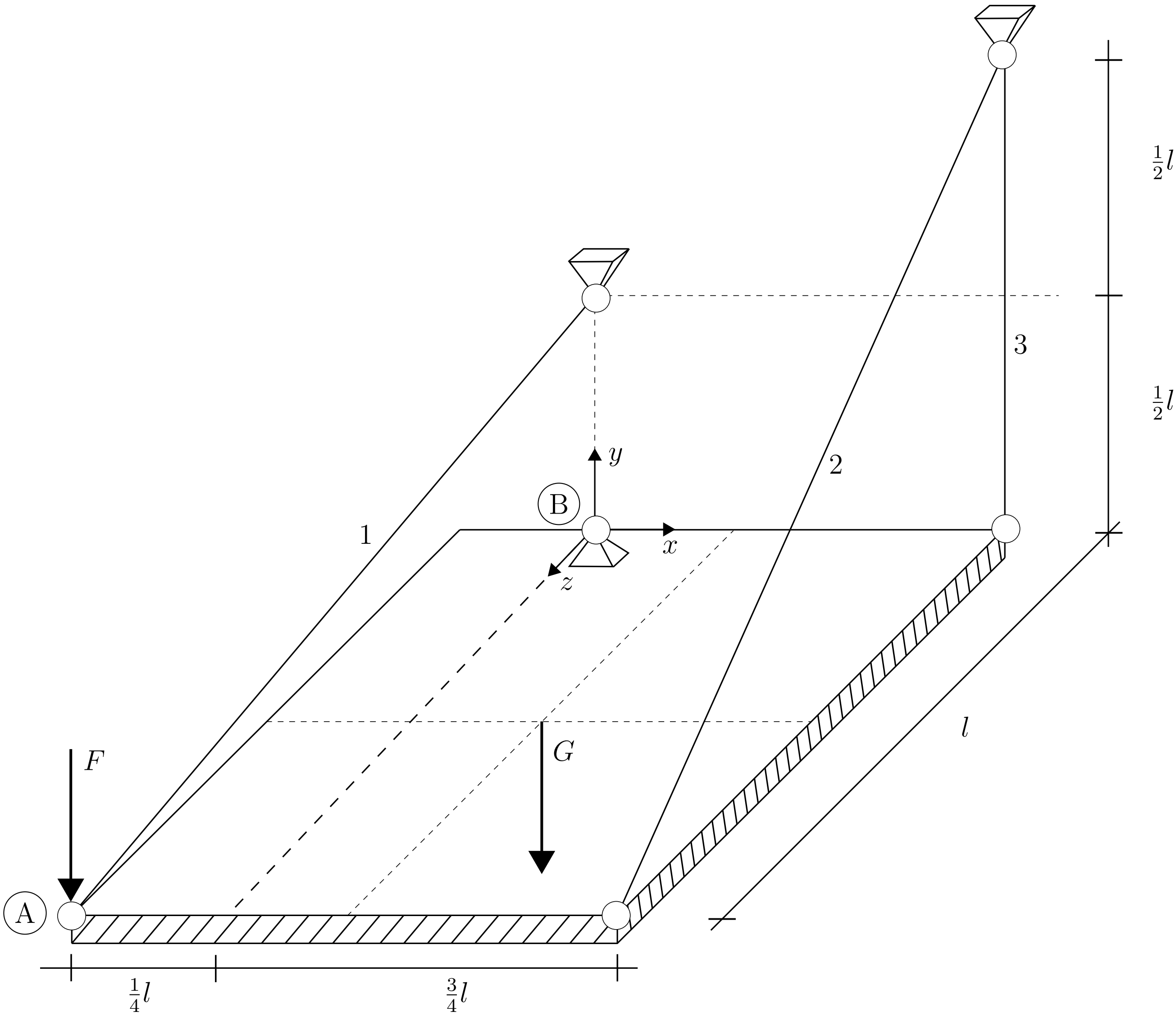
Querkraftverlauf:



Momentenverlauf:



3. Aufgabe (ca. 17 % der Gesamtpunktzahl)



Das dargestellte Vordach wird durch drei Seile abgespannt und ist im Punkt B gelenkig gelagert. Das Vordach wird durch sein Eigengewicht G sowie einer am Knoten A angreifenden Gewichtskraft F eines Blumentopfes belastet.

a) Beurteilen Sie das Tragwerk hinsichtlich der statischen Bestimmtheit.

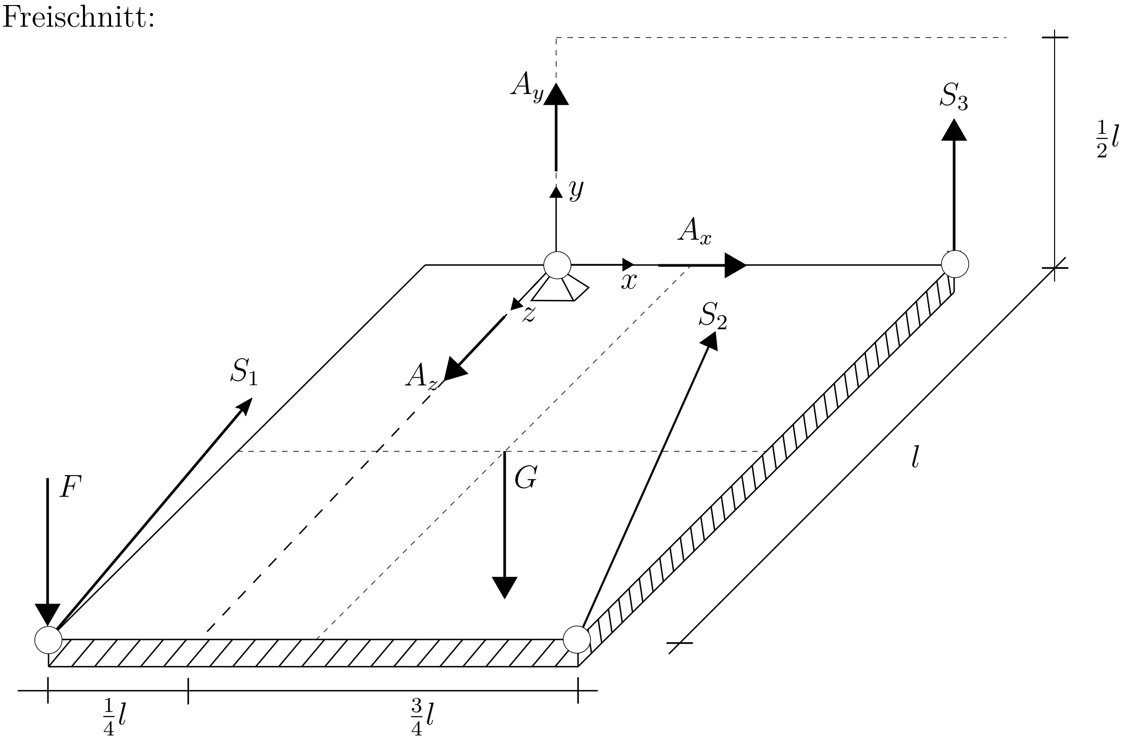
b) Ermitteln Sie die Seilkräfte in den Seilen 1, 2 und 3.

Gegeben: l, F, G

Musterlösung - Aufgabe 3

a) Statische Bestimmtheit:
$6n = 6 = a + g = 6 + 0 \rightarrow$ Wahre Aussage.
Und: System ist nicht kinematisch gelagert.
$\rightarrow$ System statisch bestimmt.

b) Stabkräfte:
Freischnitt:



$$\overrightarrow{S_1} = S_1 \cos(\gamma_x)\overrightarrow{e_x} + S_2 \cos(\gamma_y)\overrightarrow{e_y} + S_3 \cos(\gamma_z)\overrightarrow{e_z}$$

$$\left.\begin{aligned} L_x &= \frac{1}{4}L \\ L_y &= \frac{1}{2}L \\ L_z &= -L \end{aligned}\right\} L = \sqrt{(\frac{1}{4}L)^2 + (\frac{1}{2}L)^2 + (L)^2} = \frac{\sqrt{21}}{4}L \rightarrow \begin{aligned} \cos(\gamma_x) &= \frac{1}{\sqrt{21}} \\ \cos(\gamma_y) &= \frac{2}{\sqrt{21}} \\ \cos(\gamma_z) &= -\frac{4}{\sqrt{21}} \end{aligned}$$

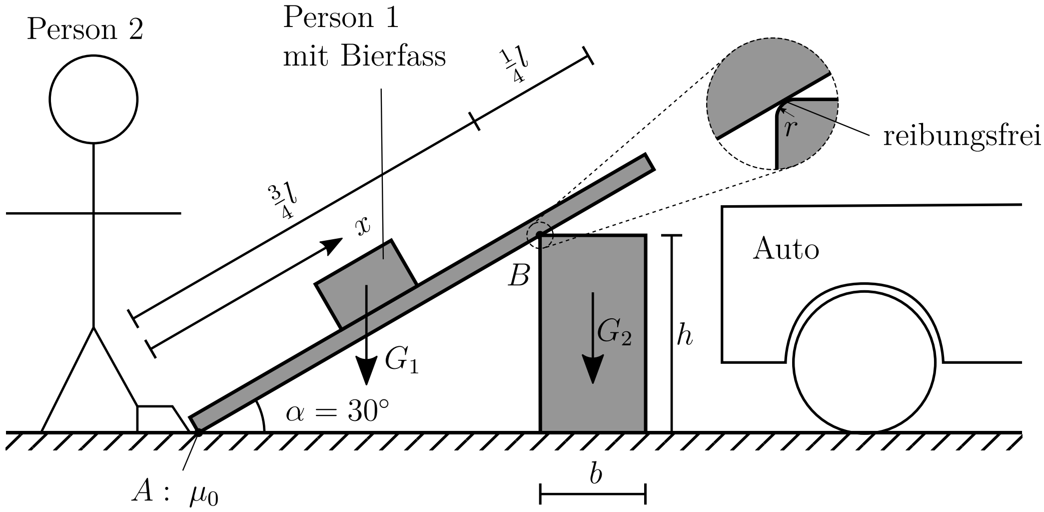
$$\sum M_{iy}^{B} = 0 : \qquad \frac{S_2}{\sqrt{2}} = 0 \rightarrow S_2 = 0$$

$$\sum M_{ix}^{B} = 0 : \qquad G\frac{L}{2} + FL - S_1\frac{2}{\sqrt{21}}L = 0 \rightarrow S_1 = \frac{\sqrt{21}}{2}(\frac{G}{2} + F)$$

$$\sum M_{iz}^{B} = 0 : \qquad F\frac{L}{4} - G\frac{L}{4} - S_1\frac{\cancel{2}L}{\sqrt{21}\cancel{4}_2} + S_3\frac{3}{4}L = 0$$

$$S_3 = \frac{4}{3}\left[\frac{G}{4} - \frac{F}{4} + \frac{S_1}{2\sqrt{21}}\right] = \frac{4}{3}\left[\frac{G}{4} - \frac{F}{4} + \frac{G}{8} + \frac{F}{4}\right] = \frac{4\cancel{3}}{\cancel{3}8}G = \frac{G}{2}$$

4. Aufgabe (ca. 27 % der Gesamtpunktzahl)



Person 1 möchte nach der TM1 Klausur mit einer Konstruktion aus einem masselosen Brett (Länge l) und einem starren Quader (Gewicht G_2, Höhe h, Breite b) ein Bierfass in ein Auto laden. Person 1 wird inkl. Bierfass als Klotz mit Gewicht G_1 idealisiert. Zwischen Brett und Boden wirkt der Haftkoeffizient $\mu_0 = 0.6$ (Punkt A) und in Punkt B liegt das Brett reibungsfrei auf. Zwischen Person 1 und Brett kann Haften angenommen werden. Der Quader steht auf dem Boden ohne zu rutschen.

Bearbeiten Sie folgende Aufgabenteile:

a) Wie weit kann Person 1 mit Bierfass auf das Brett gehen, ohne dass das Brett in A rutscht? Bestimmen Sie die Position x.

b) Da Person 1 die Berechnung in a) nicht durchgeführt hat, kam es zum Sturz und geschütteltem Bier. Deshalb wird Person 2 zur Hilfe geholt um mit dem Fuß Rutschen in Punkt A zu verhindern. Kann Person 1 das Bierfass nun bis $x = l$ tragen, ohne dass das Brett um B kippt?

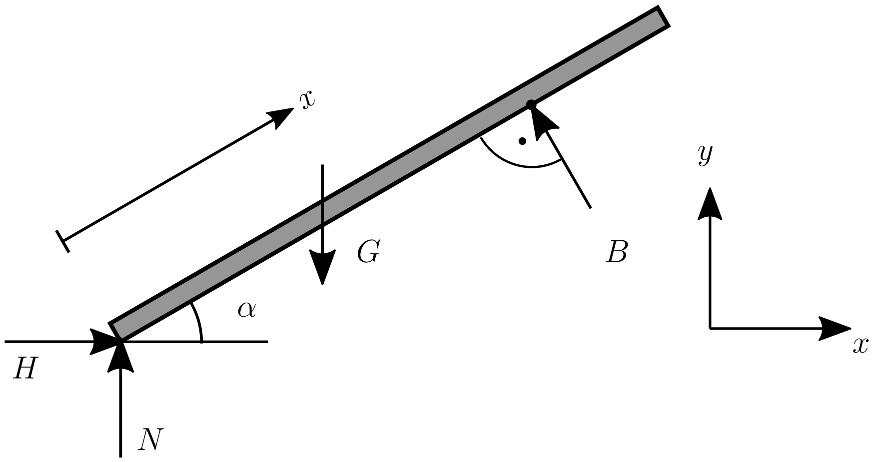
c) Wie groß muss die Breite b des Quaders sein, damit dieser für $x = l$ nicht kippt?

Hinweis: Für Aufgabenteile a) und b) darf angenommen werden, dass der Quader nicht kippen kann.

Gegeben: l, h, $\alpha = 30°$, $\mu_0 = 0.6$, $G_1 = G$, $G_2 = 2G$, G

Musterlösung - Aufgabe 4

a) Freischnitt:



GGW:

$$\sum M_i^A \stackrel{!}{=} 0: \qquad B\frac{3}{4}l - Gx\cos(\alpha) = 0$$

$$\rightarrow B = \frac{3x}{4l}\cos(\alpha)G$$

$$\sum F_{iy} \stackrel{!}{=} 0: \qquad N - G + B\cos(\alpha) = 0$$

$$\rightarrow N = G - B\cos(\alpha) = (1 - \frac{3x}{4l}\cos^2(\alpha))G$$

$$\sum F_{ix} \stackrel{!}{=} 0 \qquad H - B\sin(\alpha) = 0$$

$$\rightarrow H = \frac{4x}{3l}\cos(\alpha)\sin(\alpha)G$$

Haften:

$$|H| \leq \mu_0 N$$

$$\stackrel{H>0}{\rightarrow} \frac{4x}{3l}\cos(\alpha)\sin(\alpha)\cancel{G} \leq \mu_0\cancel{G} - \mu_0\frac{4x}{3l}\cos^2(\alpha)\cancel{G}$$

$$\rightarrow x \leq \frac{3}{4}l\frac{\mu_0}{\cos(\alpha)\sin(\alpha) + \mu_0\cos^2(\alpha)} = 0,510l$$

Mit: $\alpha = 30°$, $\mu_0 = 0,6$

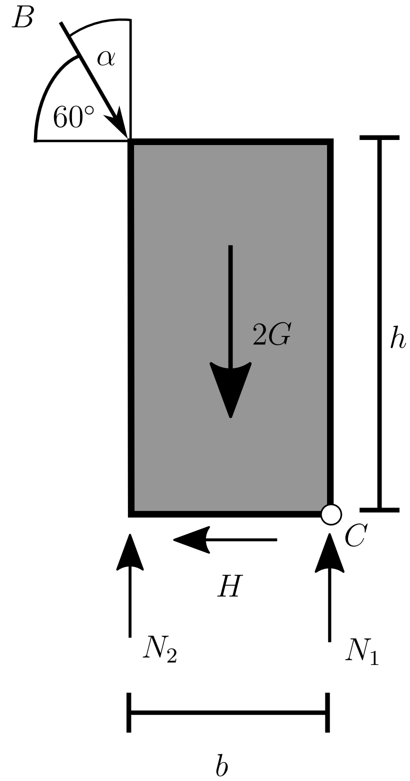
b) Jetzt: H beliebig groß. Kippen falls $N < 0$

$$N = (1 - \frac{3x}{4l}\cos^2(\alpha))G$$

$$N = (1 - \frac{3l}{4l}(\frac{\sqrt{3}}{2})^2)G = 0 \quad |\text{Mit: } x = l$$

$\rightarrow$ Für $x = l$ kippt das Brettt gerade nicht.

c) Freischnitt:



$$B(x=l) = \frac{4}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}G = \frac{2}{\sqrt{3}}G$$

$$\begin{aligned}
\sum M_i^C \overset{!}{=} 0: \qquad & 2G\frac{b}{2} - Bh\sin(\alpha) + Bb\cos(\alpha) - N_2 b = 0 \\
& \rightarrow -\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{1}{2}hG + (1+1)Gb - N_2 = 0 \\
& \rightarrow N_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{h}{b}G + 2G \\
\text{Kein Kippen: } N \overset{!}{\geq} 0: \qquad & \rightarrow +\frac{h}{\sqrt{3}b}G \leq 2G \\
& \rightarrow b \geq \frac{b}{2\sqrt{3}}
\end{aligned}$$