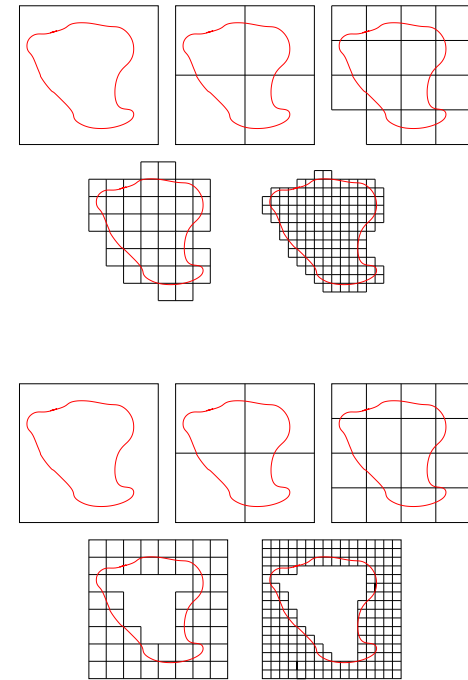


Mehrskalenberechnungen bei inhomogenen Körpern

Johann Bitzenbauer, Karl Schweizerhof

- Motivation
- Homogenisierung
- Mehrgittermethoden
- Composite Finite Elemente Strategie
 - Hierarchische Netzgenerierung
 - Mehrgitteralgorithmus
- Beispiele



Motivation

- Werkstoffe besitzen oft eine Mikrostruktur (periodisch/aperiodisch)
- wünschenswert für effektive makroskopische Beschreibung:
 - geringe Anzahl von Unbekannten
 - geringer Rechenaufwand
- Homogenisierung: im Linearen sehr effektiv, im Nichtlinearen sehr aufwendig
- Mehrgittermethoden: Problem der konsistenten Grobgitterkorrektur
- Lösungsmöglichkeiten: - Grobgitter aus Homogenisierung
 - Grobgitter durch algebraischen Transferoperator
 - Grobgitter über **Composite Finite Elemente** Strategie



Literatur

Homogenisierung

- D. Cioranescu, P. Donato: *An Introduction to Homogenization*, Oxford lecture series in mathematics and its applications 17, Oxford University Press, 1999. → gute Einführung in die lineare Theorie
- G. Geymonat, S. Müller, N. Triantafyllidis: *Homogenization of Nonlinearly Elastic Materials, Microscopic Bifurcation and Macroscopic Loss of Rank-One Convexity*, Archive for Rational Mechanics and Analysis 122, pp. 231-290, 1993. → Grundlegende theoretische Darstellung nichtlinearer Phänomene
- J. Schröder, C. Miehe: *Stability problems in micro-macro-transitions: Analysis of elastic micro-structures*, in: Trends in Computational Structural Mechanics (Eds.: Wall, W.A.; Bletzinger, K.-U.; Schweizerhof, K.), CIMNE Barcelona, pp. 218-227, 2001. → Umsetzung in FE und Diskussion

Homogenisierungsbasierte Mehrgitterverfahren

- N. Neuß: *Homogenisierung und Mehrgitter*, Dissertation, Universität Heidelberg, 1995.
- J. Fish, V. Belsky: *Multigrid method for periodic heterogeneous media, Part 2: Multiscale modeling and quality control in multidimensional case*, Computer methods in applied mechanics and engineering 126, pp. 17-38, 1995. → erste Arbeiten im Linearen, Konzept nicht auf nichtlineare Probleme übertragbar
- C.G. Bayreuther, C. Miehe: *Homogenisierungsbasierte Mehrgitter-Transferoperatoren für nichtlineare heterogene Materialien*, PAMM 3, pp. 248-249, 2003. → Knoten-/Patchweises Vorgehen, quasialgebraisches Mehrgitterverfahren

Literatur

Andere Mehrgitterverfahren für inhomogene Probleme

W.L. Wan: *Scalable and Multilevel Iterative Methods*, Dissertation, University of California Los Angeles, 1998.

→ erste Arbeiten zur energieminimierenden Interpolation; systematischen Wahl der Grobgitterpunkte

S.A. Sauter: *Vergrößerung von Finite-Elemente-Räumen*, Habilitation, Universität Kiel, 1997.

→ systematische Wahl der Grobgitterpunkte, konzeptionell klarer Algorithmus

W. Hackbusch, S.A. Sauter: *Composite finite elements for problems containing small geometric details - Part II: Implementation and numerical results*, Computing and Visualization in Science 1, pp. 15-25, 1997.

W. Hackbusch, S.A. Sauter: *Adaptive Composite Finite Elements for the Solution of PDEs containing non-uniformly distributed Micro-Scales*, Matematiceskoe Modelirovanie 8, pp. 31-43, 1998.

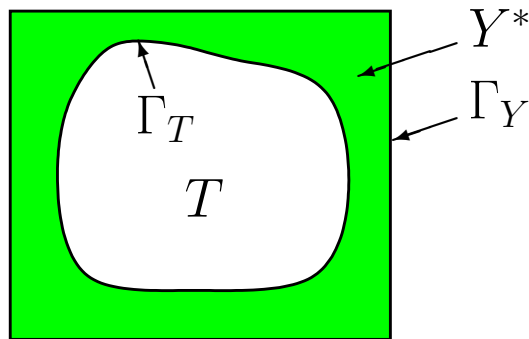
R. Warnke: *Schnelle Löser für elliptische Randwertprobleme mit springenden Koeffizienten*, Dissertation (Betreuung S.A. Sauter), Universität Zürich, 2003.

Hierarchische Netzgenerierung

F.J. Deister: *Selbstorganisierendes hybrid-kartesisches Netzverfahren zur Berechnung von Strömungen um komplexe Konfigurationen*, VDI-Verlag Düsseldorf, 2002.

→ gute Darstellung des Quadtree-/Octree-Algorithmus

Grundlagen der Homogenisierung



Einheitszelle Y mit Loch T

Gebiet Ω vollständig ausgefüllt mit
sich periodisch wiederholender Einheitszelle Y

Skelettanteil $Y^* = Y \setminus T$

interner Rand $\Gamma_{int} = \cup \Gamma_T$

externer Rand $\Gamma_{ext} = \partial\Omega \setminus \Gamma_{int}$

auf $\cup Y^*$: Gleichgewicht $\sigma_{ij,j} = f_i$

Stoffgesetz $\sigma_{ij} = E_{ijkl} \epsilon_{kl}$ (linear)

Kinematik $\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ (linear)

auf $\cup \Gamma_T$: Randbedingung $\sigma_{ij} n_j = 0$

Ziel: - Bestimmung makroskopischer Gleichungen für Stoffgesetz und Kinematik

- Ansatz: asymptotische Entwicklung $u_i(x, y) = u_i^0(x) + \epsilon u_i^1(x, y) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$

mit $u_i^1(x, y) = \underbrace{h_{ikl}(y)}_{\text{Einheitslösungen}} u_{(k,l)}^0(x)$ $x \dots$ Makrolevel, $y \dots$ Mikrolevel

Grundlagen der Homogenisierung

Berücksichtigung der Terme bis $\mathcal{O}(\epsilon)$ liefert

- PDGL zur Bestimmung der Einheitslösungen

auf Y^* : $\frac{\partial}{\partial y_j} [E_{ijkl}(\mathbf{y}) h_{(k,y_l)mn}(\mathbf{y})] = -\frac{\partial}{\partial y_j} E_{ijmn}(\mathbf{y})$ („Materialinhomogenitäten“)

auf Γ_T : $n_j E_{ijkl}(\mathbf{y}) h_{(k,y_l)mn}(\mathbf{y}) = -n_j E_{ijmn}(\mathbf{y})$ („innere Löcher“)

auf Γ_Y : periodische Randbedingungen („Nachbarzellen“)

- schwache Form $\int_{Y^*} v_{(i,y_j)}(\mathbf{y}) E_{ijkl}(\mathbf{y}) h_{(k,y_l)mn}(\mathbf{y}) dY^* = - \int_{Y^*} v_{(i,y_j)}(\mathbf{y}) E_{ijmn}(\mathbf{y}) dY^*$

+ periodische Randbedingungen

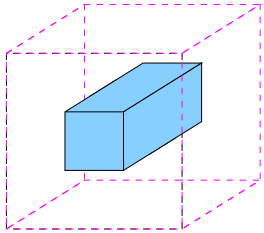
- Resultate:

→ makroskopisches Gleichgewicht $\frac{\partial}{\partial x_j} \langle \sigma_{ij}^0(\mathbf{x}) \rangle = \frac{|Y^*|}{|Y|} \langle f_i(\mathbf{x}) \rangle$

→ effektiver Elastizitätstensor $E_{ijkl}^{hom} = \frac{1}{|Y|} \int_{Y^*} E_{ijmn}(\mathbf{y}) [\delta_{km} \delta_{ln} + h_{(m,y_n)kl}(\mathbf{y})] dY^*$

Beispiel: Block unter Gleichlast

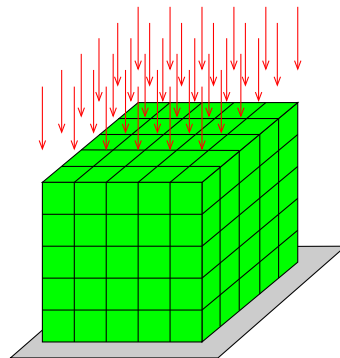
● Mikrostruktur



Matrixmaterial: $E = 2.92, \nu = 0.35$

Kernmaterial: $E = 72.3, \nu = 0.22$

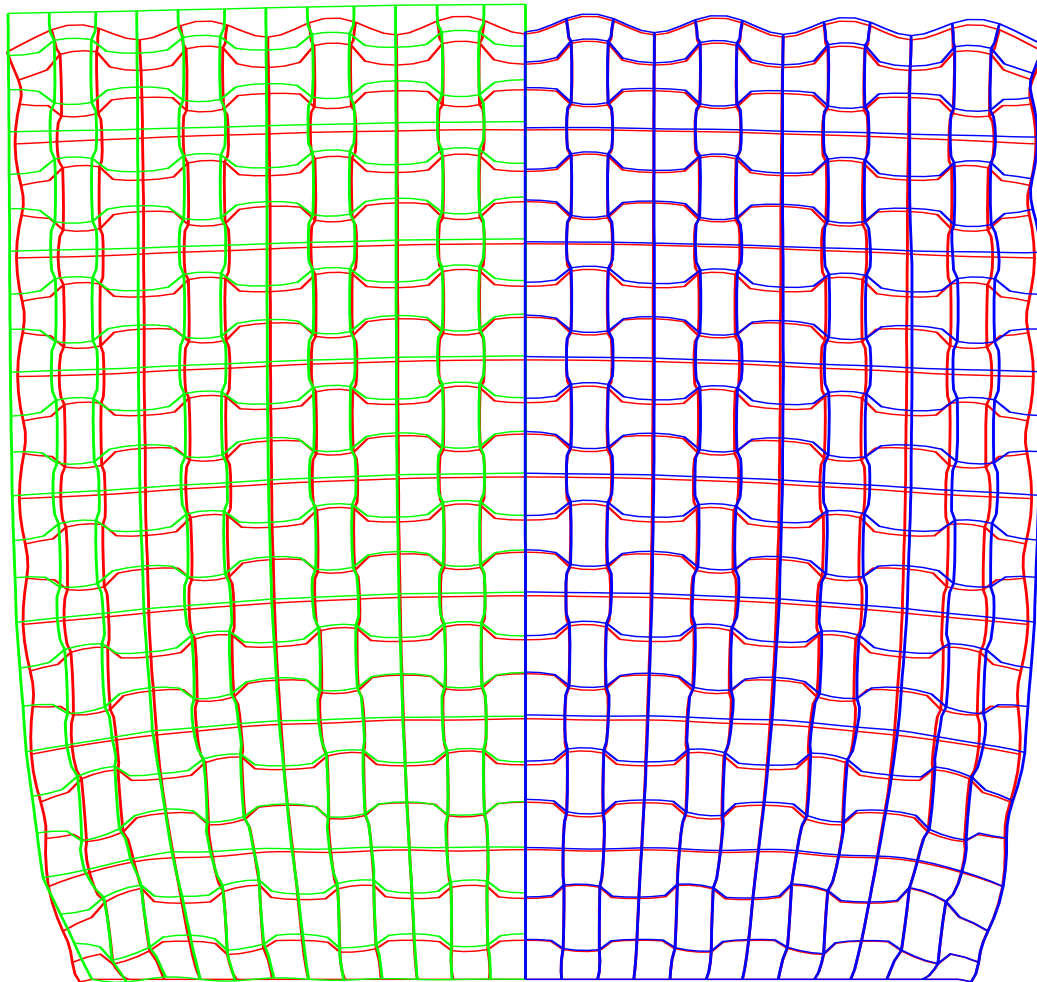
● Makrostruktur



- Diskretisierung: → Mikroskale 9x9x9 Elemente
- Makroskale: Variation der Größe des Problems
6x6x6, 8x8x8 und 10x10x10 Elemente

➔ Ziel: Rechenzeitvergleich verschiedener Algorithmen

Beispiel: Block unter Gleichlast



deformiertes Netz

Betrachtung der Netzdeformation

- **rotes Netz:**
durchdiskretisierte Referenzlösung u^ϵ
(quasi-exakte Lösung)
- **grünes Netz** (linkes Teilsystem):
homogenisierte Lösung $u^0 + u^1$
mit endlicher Zellenzahl
- **blaues Netz** (rechtes Teilsystem):
Lösung u^m durch Mikro-Makro-Strategie
(Zweigitterverfahren mit lokaler Defektkorrektur)
→ gute Lösungsqualität

Beispiel: Block unter Gleichlast - Ergebnisqualität und Rechenzeitbedarf

u^ϵ = Referenzlösung

u^m = Lösung mittels Mikro-Makro-Strategie
angenommene Grenzschichtdicke: 2 Zellen

$u^0 + u^1$ = Lösung aus Homogenisierung

maximale Abweichung von der Referenzlösung

	$\frac{\max u^\epsilon - u^0 - u^1 }{\max u^\epsilon }$	$\frac{\max u^\epsilon - u^m }{\max u^\epsilon }$
$\epsilon = 1/6$	0.070	0.013
$\epsilon = 1/8$	0.054	0.012
$\epsilon = 1/10$	0.043	0.011
	Homogenisierung	Zweigitterverfahren

Problem: Störungen am Rand

Rechenzeitbedarf verschiedener Lösungsalgorithmen: $\epsilon_{tol} = 10^{-4}$

→ Jacobi-Vorkonditioniertes cg-Verfahren (cgj)

→ Zweigittertechniken:

- Gebietszerlegung (Überlappung: 1 Element)

in Kombination mit Grobgitterkorrektur (mg)

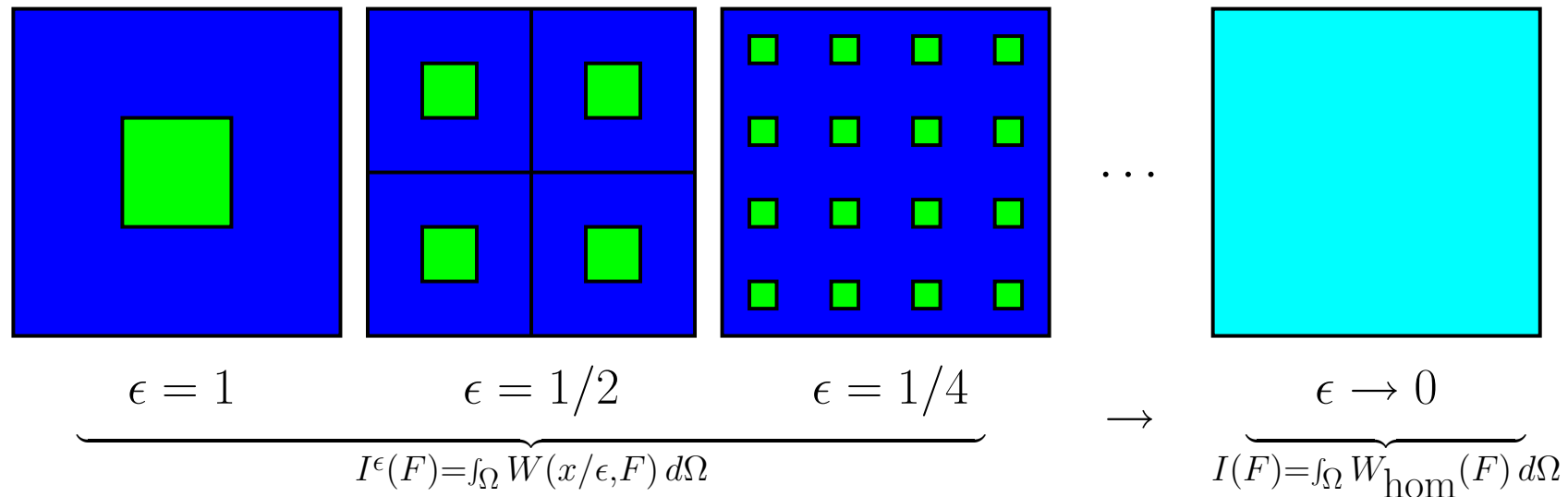
Glättung durch cgj-Verfahren

- Mikro-Makro-Strategie (mm)

	Unbekannte	cgj	mg	mm
$\epsilon = 1/5$	285 660	641 [s]	288 [s]	-
$\epsilon = 1/6$	490 050	1 380 [s]	472 [s]	455 [s]
$\epsilon = 1/8$	1 151 064	-	1 031 [s]	740 [s]
$\epsilon = 1/10$	2 235 870	-	2 062 [s]	1 208 [s]

Homogenisierung nichtlinearer Integranden

- Körper mit Mikrostruktur und Längenskalenverhältnis ϵ
- mikroskopische Verzerrungsenergiedichte $W(x/\epsilon, F)$



- Grenzübergang $\epsilon \rightarrow 0$: Verzerrungsenergiedichte $W_{\text{hom}}(F)$
nur vom Gradienten F , nicht vom Ort x abhängig

Homogenisierung nichtlinearer Integranden

- Homogenisierung konvexer Integranden

$$W_{\text{hom}}(F) = \inf_{\frac{1}{|Y|} \int_Y W(x, F + \nabla h) dY} \quad \text{mit } h \in H_{\text{per}}^1$$

auf Mikrolevel gegeben:

- Verzerrungsenergiedichte $W(x, F)$
- mikroskopischer 1. PK $P = \frac{\partial W}{\partial F}$
- mikroskopische Moduli $\mathcal{L} = \frac{\partial^2 W}{\partial F \partial F}$

- aber: nichtlineare Elastizitätstheorie nicht konvex,
Betrachtung eines a priori unbekanntes Zellensembles nötig
- Lokalisierung: Lösung auf einer Einheitszelle Y
 - verschiebungsgesteuerte Deformation unter periodischen Randbedingungen
 - verformte Konfiguration x auf Mikrolevel

$$x = \underbrace{F}_{\text{makroskopischer Deformationsgradient}} + \underbrace{X}_{\text{mikroskopischer Ortsvektor}} + \underbrace{h}_{\text{Y-periodische Verschiebung}}$$



Homogenisierung nichtlinearer Integranden

● Vorgehensweise:

→ Bestimmung des F zugeordneten Y -periodischen Verschiebungsfeldes h

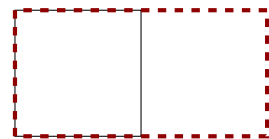
→ dann **inkrementelle** mikroskopische Moduli \mathcal{L}_{ijkl}
und mikroskopische Spannungen P_{ij} bekannt

→ makroskopischer 1. Piola-Kirchhoffscher Spannungstensor

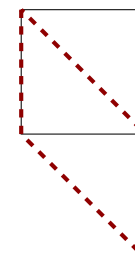
$$\bar{P}_{ij} = \frac{1}{|Y|} \int_Y P_{ij} dY$$

→ Störung des Deformationsgradienten durch Verschiebungsgradienten mit Rang 1

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



→ Bestimmung der den Störungen zugeordneten
 Y -periodischen Verschiebungsfelder Δh

Homogenisierung nichtlinearer Integranden

- PDGL zur Bestimmung der effektiven Moduli

$$\text{auf } Y : \frac{\partial}{\partial y_j} \left[\mathcal{L}_{ijkl}(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial y_l} \Delta h_k^{mn}(\mathbf{y}) \right] = - \frac{\partial}{\partial y_j} \mathcal{L}_{ijmn}(\mathbf{y}) \quad (\text{„Materialinhomogenitäten“})$$

$$\text{auf } \Gamma_Y : \text{ periodische Randbedingungen} \quad (\text{„Nachbarzellen“})$$

- ➔ schwache Form

$$\int_Y \frac{\partial}{\partial y_j} v_i(\mathbf{y}) \mathcal{L}_{ijkl}(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial y_l} \Delta h_k^{mn}(\mathbf{y}) dY = - \int_Y \frac{\partial}{\partial y_j} v_i(\mathbf{y}) \mathcal{L}_{ijmn}(\mathbf{y}) dY$$

+ periodische Randbedingungen

- Resultate:

- ➔ makroskopisches Gleichgewicht $\frac{\partial}{\partial x_j} \bar{P}_{ij} + \bar{f}_i = 0$

- ➔ Inkrement des 1. PK: $\Delta \bar{P}_{ij} = \bar{\mathcal{L}}_{ijkl} \Delta F_{kl}$

- ➔ effektiver Elastizitätstensor

$$\bar{\mathcal{L}}_{ijkl} = \frac{1}{|Y|} \int_Y \left[\delta_{im} \delta_{jn} + \frac{\partial}{\partial y_n} \Delta h_m^{ij}(\mathbf{y}) \right] \mathcal{L}_{mnop}(\mathbf{y}) \left[\delta_{ko} \delta_{lp} + \frac{\partial}{\partial y_p} \Delta h_o^{kl}(\mathbf{y}) \right] dY$$

- ➔ Information über Elliptizität des vergrößerten Problems

Mathematische Definition der Elliptizität der makroskopischen Moduli

- makroskopische Moduli $\tilde{\mathcal{L}}$ bei nicht konvexen Integranden

→ immer elliptisch, d.h. $\tilde{\mathcal{L}}_{ijkl} a_i b_j a_k b_l \geq 0 \quad \forall a, b$

→ nicht immer streng elliptisch, d.h. $\tilde{\mathcal{L}}_{ijkl} a_i b_j a_k b_l \stackrel{?}{>} c \cdot a_i b_j a_i b_j$ mit $c > 0; \forall a, b$

→ Verlust der strengen Elliptizität $\hat{=}$ Möglichkeit zur Scherbandbildung

→ Lokalisierungsbedingung:

$$\det \underbrace{(\tilde{\mathcal{L}}_{ijkl} a_j a_l)}_{\text{Akustiktensor}} \begin{cases} > 0 : \text{stabiles GG} \\ \leq 0 : \text{Schubversagen möglich} \end{cases}$$

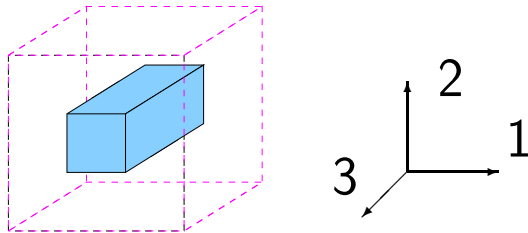
→ Überprüfung der Lokalisierungsbedingung in Kugelkoordinaten

$$a = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{l} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{array}$$

Beispiel: Mikrostruktur aus Neo-Hooke-Material

- Neo-Hooke-Material $W(F) = \frac{\mu}{2}[I_C - 3 - 2 \ln J] + \frac{\lambda}{2}(J - 1)^2$

- Mikrostruktur



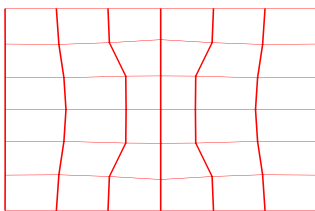
Matrixmaterial: $\mu_M = 1.0$

$\lambda_M = 1.0$

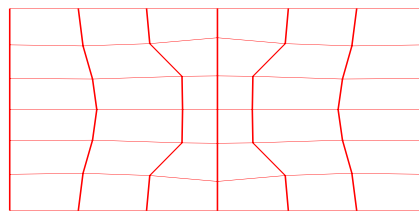
Kernmaterial: $\mu_K = 2.0 \dots 128.0$

$\lambda_K = 2.0 \dots 128.0$

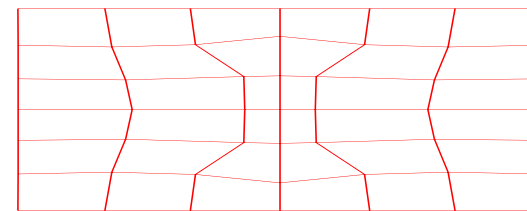
- Homogenisierung in Abhängigkeit der Streckungen $\lambda_{1/2/3}$
(im Bild $\mu_K, \lambda_K = 128.0$)



$\lambda_1 = 1.5$



$\lambda_1 = 2.0$

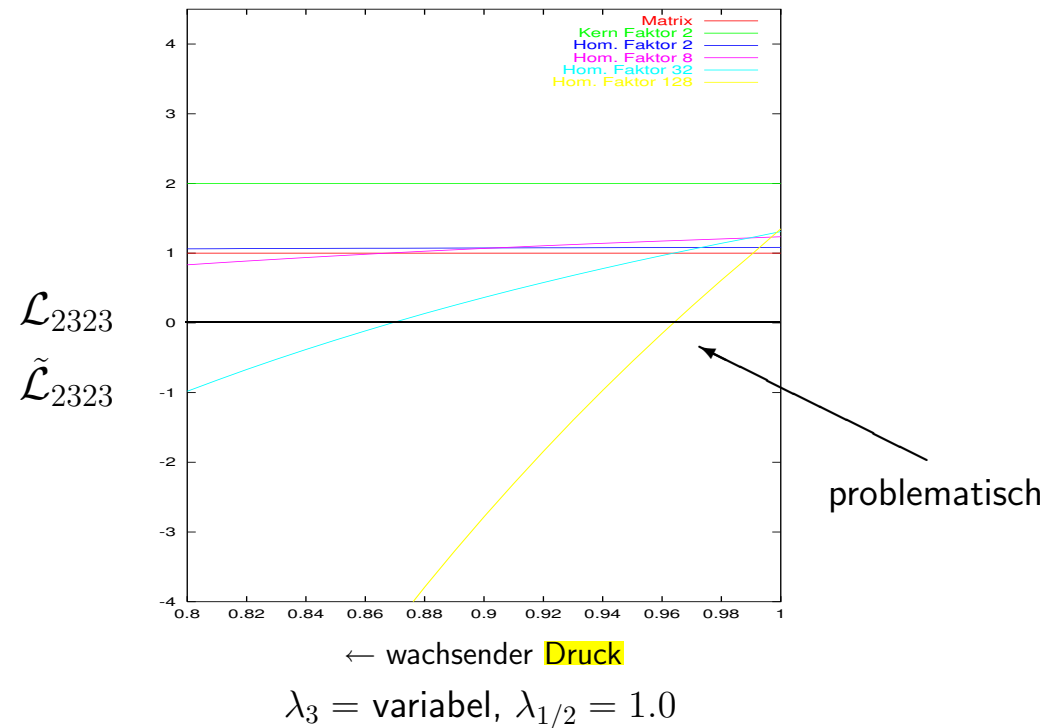
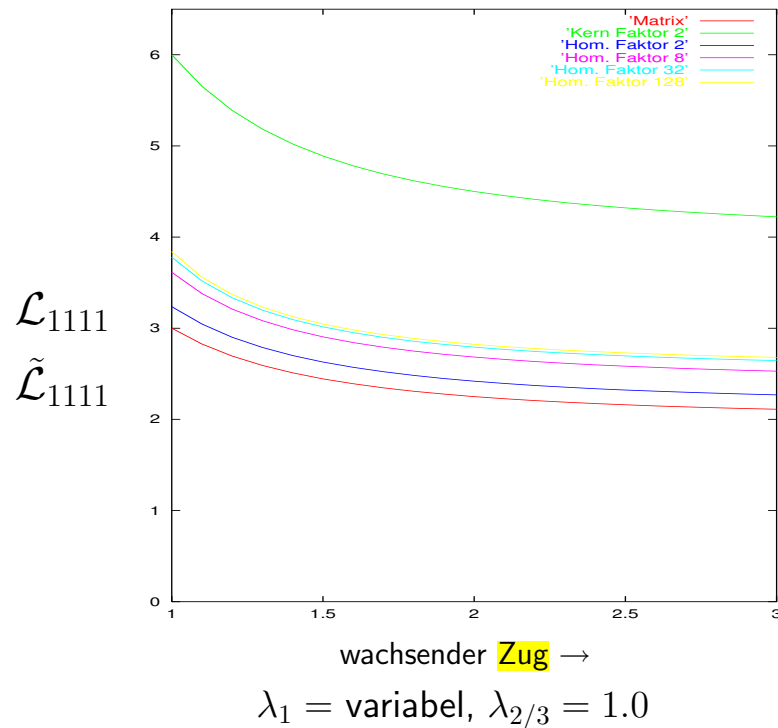


$\lambda_1 = 2.5$

verschiedene Streckungen in 1-Richtung

Betrachtung der vorliegenden Elastizitätsmoduli

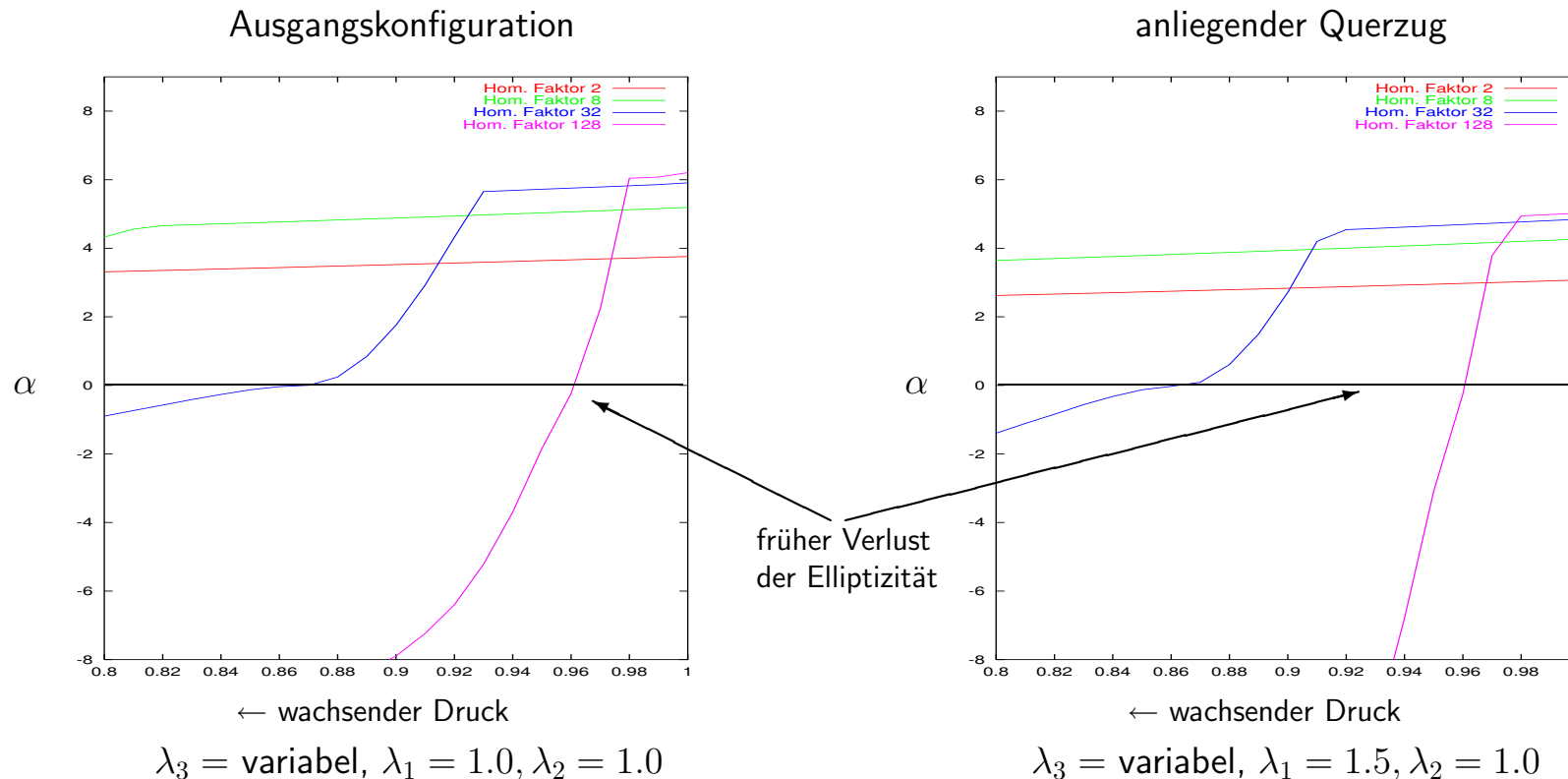
● $\mathcal{L}_{ijkl} = \frac{\partial^2 W}{\partial F_{ij} \partial F_{kl}}, \quad \tilde{\mathcal{L}}_{ijkl} = \frac{\partial^2 W^{hom}}{\partial F_{ij} \partial F_{kl}}$



→ bei grossen Steifigkeitsunterschieden und anliegendem Druck effektive Schubsteifigkeit (wesentlich) geringer als die der einzelnen Phasen

Betrachtung der Akustiktensoren - bei Druck auftretende Probleme

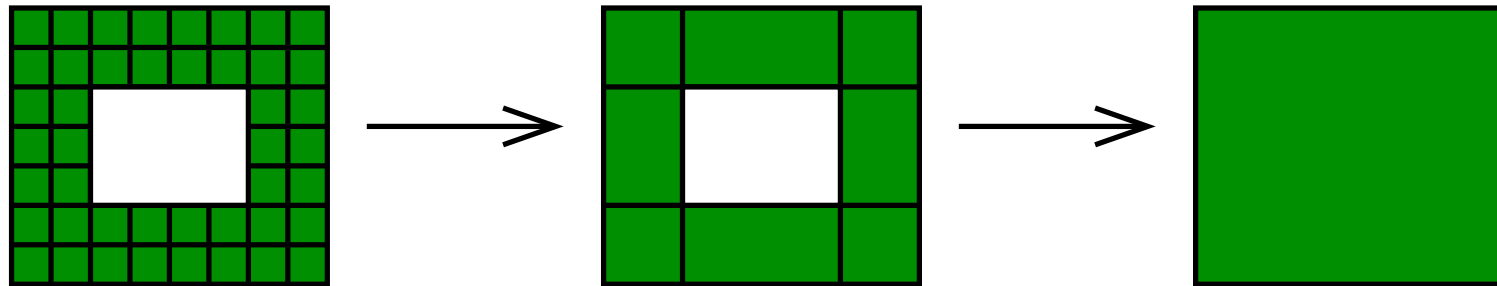
- Minimum der Determinante des Akustiktensors $\alpha = \min_{|n=1} \det(\tilde{\mathcal{L}}_{ijkl} n_j n_l)$



- bei nicht positiver Determinante des Akustiktensors Scherbandbildung möglich
- im Mehrgitterkontext Elliptizität entscheidend für Lösbarkeit

Composite Finite Elemente Strategie und Mehrgittermethoden

- klassisches Multigrid: minimale Anzahl der Finiten Elemente zur Geometrie-
beschreibung von der Geometrie selbst abhängig



feines Gitter
Ansatzraum S^{l+1}

größtmögliches Gitter mit
klassischen Finiten Elementen
Ansatzraum S^l

größtmögliches Gitter im
Ansatzraum S^{CFE}

- Ansatzraum $S^{CFE} := \{u|_{\Omega} : u \in S(\Omega)\}$
 - Restriktion aller Funktionen aus einem beliebigen Ansatzraum (der das Gebiet Ω komplett überdeckt) auf das eigentliche Definitionsgebiet
- damit Entkopplung der Diskretisierung von der Geometrie möglich
- konsistenter hierarchischer Mehrgitter-Algorithmus

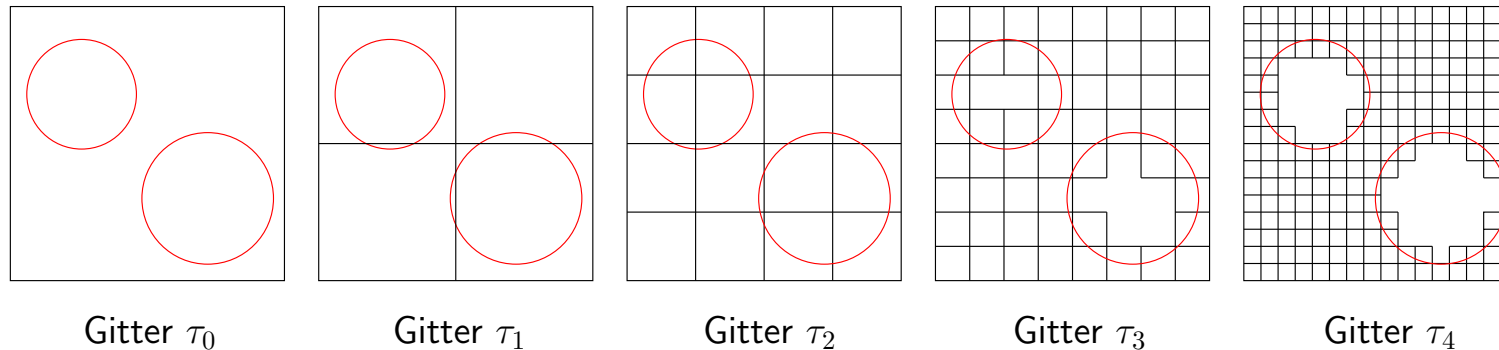
Konstruktion einer Gitterhierarchie für CFE (1)

Anfangsschritte analog zu Standard FE

- Gegeben sei ein mit Hexaedern zu vernetzendes Gebiet Ω mit (inneren) Rändern
- Ausgegangen wird von einer das Gebiet Ω **komplett** überdeckenden Anfangstriangulierung τ_0 mit zugehöriger Netzweite $h_0 = \mathcal{O}(\text{diam } \Omega)$
 - Aus dieser wird durch **reguläre** Verfeinerung eine Gitterfolge $\{\tau_l\}_{0 \leq l \leq l_{\max}}$ mit zugehöriger Netzweite $h_0 = 2 \cdot h_1 = 4 \cdot h_2 = \dots \geq h_{l_{\max}}$ erzeugt
 - Elemente, die während des Verfeinerungsprozesses **komplett** ausserhalb des Gebietes Ω landen, werden weggelassen
- Die Gitter τ_l sind logisch und physisch verbunden:
 - Jedes Elternelement aus τ_l hat eine eindeutige Menge an Kinderelementen in τ_{l+1}
 - Jedes Kinderelement aus τ_l hat einen eindeutigen Elternteil in τ_{l-1}

Konstruktion einer Gitterhierarchie für CFE (2)

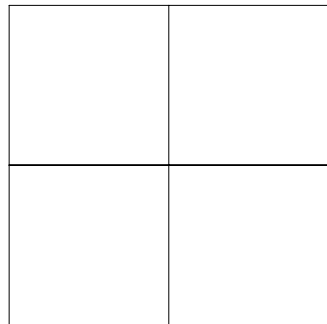
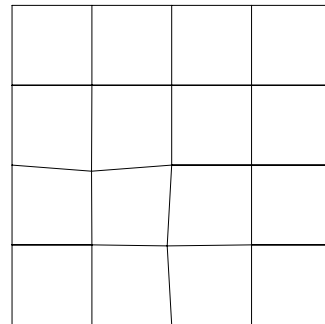
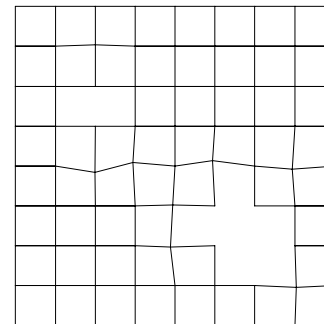
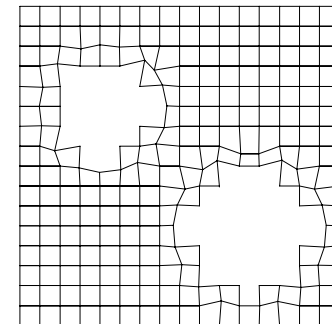
- Beispiel für eine Gitterfolge $\{\tau_l\}_{0 \leq l \leq l_{\max}}$



- Die so erzeugte Folge von Gittern τ_l ist i.a. keine geeignete Approximation des Gebietes Ω
- Im nächsten Schritt wird das feinste erzeugte Gitter durch kleine Modifikationen an den Rand angepasst

Konstruktion einer Gitterhierarchie für CFE (3)

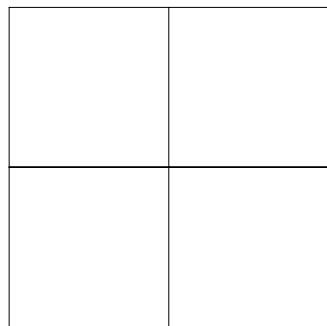
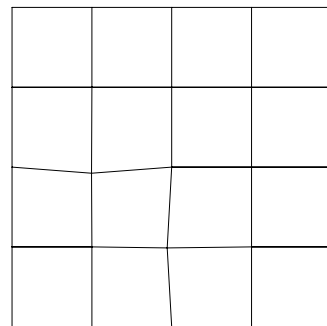
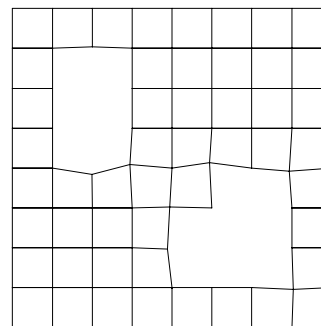
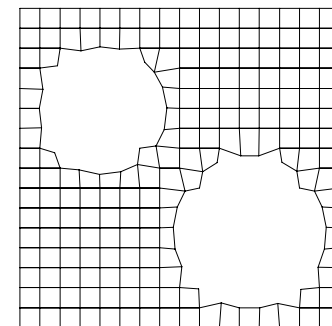
- Eine Kante XY des FE-Netzes wird als Randkante betrachtet, falls genau einer ihrer Knoten im Gebiet und einer ausserhalb liegt
- In allen Randkanten wird der dem Rand am nächsten liegende Knoten X oder Y auf den Rand geschoben

Gitter τ_1 Gitter τ_2 Gitter τ_3 Gitter τ_4

- ➔ Dadurch ändert sich die Form **aller** Elemente auf **allen** Leveln, die den verschobenen Punkt als Knoten haben
- ➔ Die **physikalische** Ordnung der Gitter geht **verloren**, die **logische** Ordnung der Elter/Kinder-Beziehungen bleibt **bestehen**
 - zentral für Mehrgitterverfahren

Konstruktion einer Gitterhierarchie für CFE (4)

- Nächster konzeptioneller Schritt
 - Entfernen aller Elemente des feinsten Gitters, die im wesentlichen ausserhalb des Gebietes Ω liegen
 - anschliessend werden rekursiv bis zum grössten Level alle Elemente entfernt, die **komplett** ausserhalb des Gebietes Ω liegen

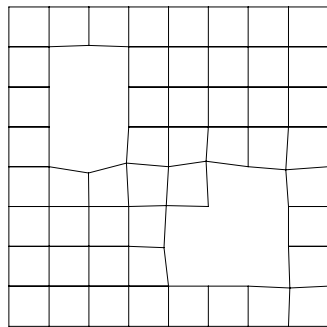
Gitter τ_1 Gitter τ_2 Gitter τ_3 Gitter τ_4

- Vorteile:
 - wenig gestörte Elemente/Gitter
 - gute Konvergenz
 - einfache Interpolation
 - eindeutige Hierarchie der Netze

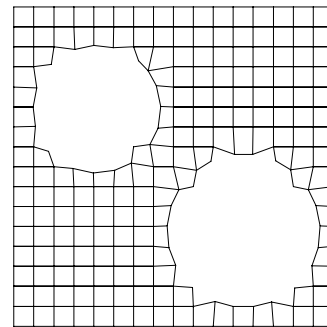
Konstruktion einer Gitterhierarchie für CFE (5)

- Bei Hexaedern eventuell sinnvoll:
 - Die durch das Entfernen von Elementen entstandenen neuen Randpunkte des feinsten Gitters werden auf den Rand geschoben
 - Kontrolle und ggf. Korrektur der Elementformen und Innenwinkel der auf dem feinsten Level veränderten Elemente
 - Ersetzen zu stark gestörter Hexaeder durch Tetraeder

vor Korrektur

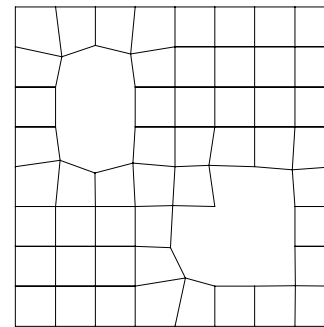


Gitter τ_3

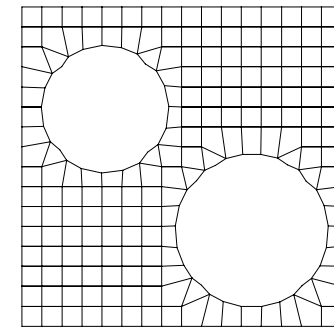


Gitter τ_4

nach Korrektur



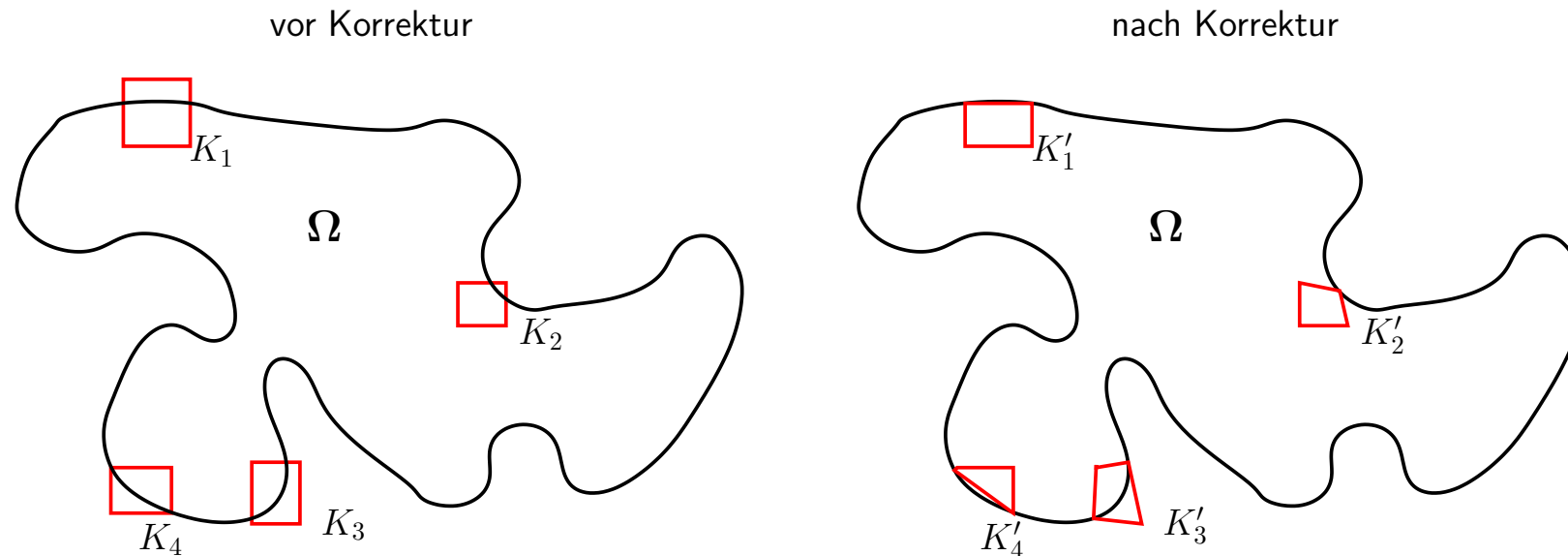
Gitter τ_3



Gitter τ_4

Konstruktion einer Gitterhierarchie für CFE (6)

● typische geometrische Situationen



- Elemente vom Typ K_1 : - Rand schneidet gegenüberliegende Kanten
- sehr gutmütiger Fall, Randanpassung einfach
- Elemente vom Typ K_2 und K_3 : - Rand schneidet benachbarte Kanten
- Anpassung einfach, falls gemeinsamer Knoten in der Nähe des Randes
- falls nicht, müssen zwei Knoten verschoben werden
- Elemente vom Typ K_4 : - Rand geht durch zwei gegenüberliegende Knoten
- manchmal keine sinnvolle Alternative zur Verwendung von Dreieckselementen

Mehrgitteralgorithmus basierend auf CFE

- Entstanden ist eine hierarchisch, aber **nicht physikalisch** verschachtelte Folge von Gittern $\{\tau_l\}_{0 \leq l \leq l_{\max}}$
- Konstruktion eines Mehrgitteralgorithmus zur Lösung des Variationsproblems
finde $u \in H^1(\Omega)$ mit $\int_{\Omega} \langle a \nabla u, \nabla v \rangle dx = \int_{\Omega} (f, v) dx \quad \forall v \in H^1(\Omega)$
- Die Systemmatrix $K_{l_{\max}}$ auf dem feinsten Gitter $\tau_{l_{\max}}$ kann auf Standardweise aufgestellt werden
- Die Grobgittermatrizen der Levels $l - 1, \dots, 0$ entstehen rekursiv durch die **Galerkinprodukte** $K_{l-1} = (P_{l-1}^l)^T K_l P_{l-1}^l$
mit den aus den Ansatzfunktionen zu konstruierenden **Prolongationsoperatoren** $\underbrace{(P_{l-1}^l)}_{1 \leq l \leq l_{\max}}$
 - Prolongationsoperator enthält Geometrieinformation
 - zentraler Unterschied zu anderen Herangehensweisen

Konstruktion der Prolongationsoperatoren

→ Sei $(S_l)_{l=0}^{l_{\max}}$ eine Familie von Ansatzräumen der Dimension n_l

→ Aus den zugehörigen Ansatzfunktionen $(N_{l,i})_{1 \leq i \leq n_l, 0 \leq l \leq l_{\max}}$ wird durch

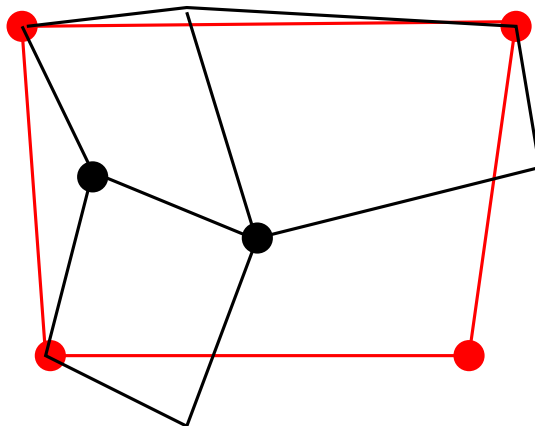
$$\sum_{i=1}^{n_l} w_i N_{l,i} = \sum_{i=1}^{n_{l-1}} v_i N_{l-1,i}$$

die Interpolation

$$w = P_{l-1}^l v \quad \text{mit} \quad (P_{l-1}^l)_{i,j} = N_{l-1,j}(x_{l,i}) \quad \forall 1 \leq i \leq n_l, 1 \leq j \leq n_{l-1}$$

von Feingitterfunktionen w aus Grobgitterfunktionen v bestimmt

→ wichtig: Ausnutzen der hierarchischen Struktur der Netze



- Elternelement
- Kinderelemente
- Grogitterknoten
- zu interpolierende Feingitterknoten

Knotensuche

→ ähnlich wie bei Kontaktproblem

→ einfach, da nur in der Nachbarschaft

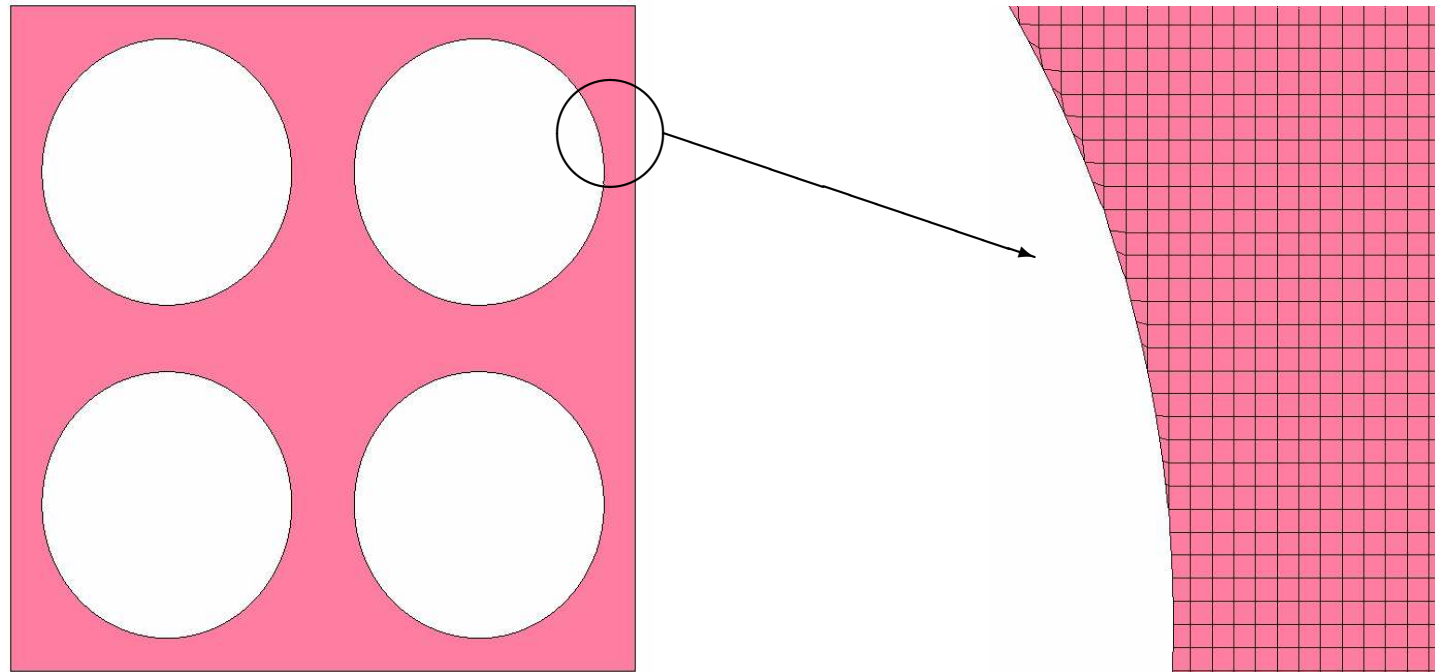
Standardalgorithmus: Newton-Multigrid für nichtlineare Probleme

- (1) Bestimme **Startlösung** $v_{l_{\max}}^0$ auf dem feinsten Gitter $\tau_{l_{\max}}$
- (2) Bestimme **nichtlineares Residuum** $r_{l_{\max}}^i$ und **Tangente** $K^T(v_{l_{\max}}^i)$
- (3) Führe einen **linearen Mehrgitterzyklus** zur Lösung der Tangentengleichung $K^T(v_{l_{\max}}^i) \Delta v = r_{l_{\max}}^i$ durch
- (4) **Abbruchkriterium** erfüllt? Falls nein, weiter bei (2)



Erstes Beispiel

- Struktur mit vier Löchern, St.-Venant-Kirchhoff-Material mit $\lambda, \mu=1$
- Diskretisierung auf verschiedenen Verfeinerungslevels:
 - 7 Levels \leftrightarrow 5016 Unbekannte
 - 8 Levels \leftrightarrow 18136 Unbekannte
 - 9 Levels \leftrightarrow 68888 Unbekannte (siehe Abbildung)

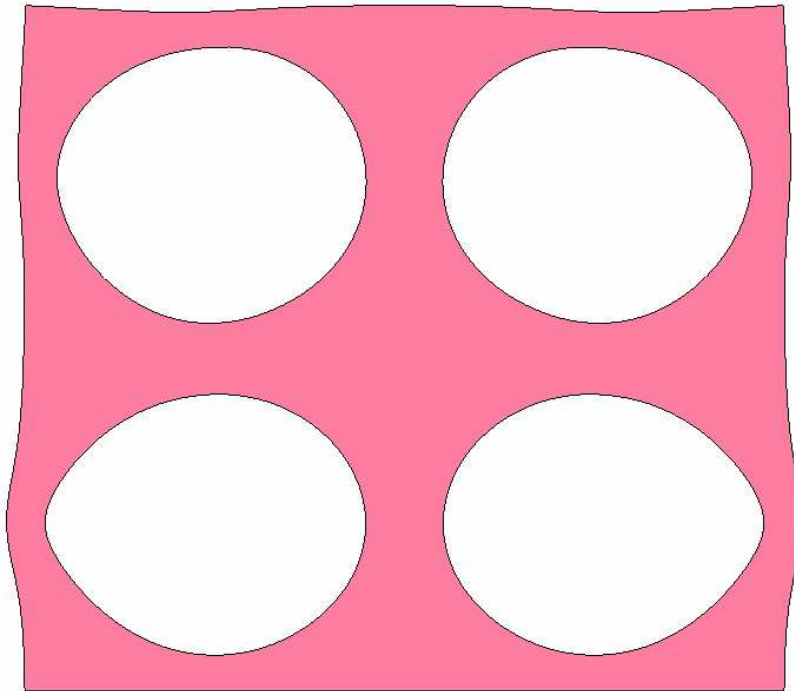


Struktur mit vier Löchern

Ausschnitt aus der Diskretisierung auf dem 9. Level

Erstes Beispiel

- Mehrgitter V-Zyklus, je 1 Zyklus Gauss-Seidel-Verfahren als Vor- und Nachglättung
- Abbruchkriterium $\epsilon^{\text{tol}} \leq 10^{-8}$
- 5 Lastschritte bis zur deformierten Konfiguration mit 5 Prozent Stauchung



deformierte Konfiguration

Level	Unbekannte	Rechenzeit cgj-Verfahren	Rechenzeit Mehrgitter
7	5016	27 sec	45 sec
8	18136	201 sec	169 sec
9	68888	1621 sec	734 sec

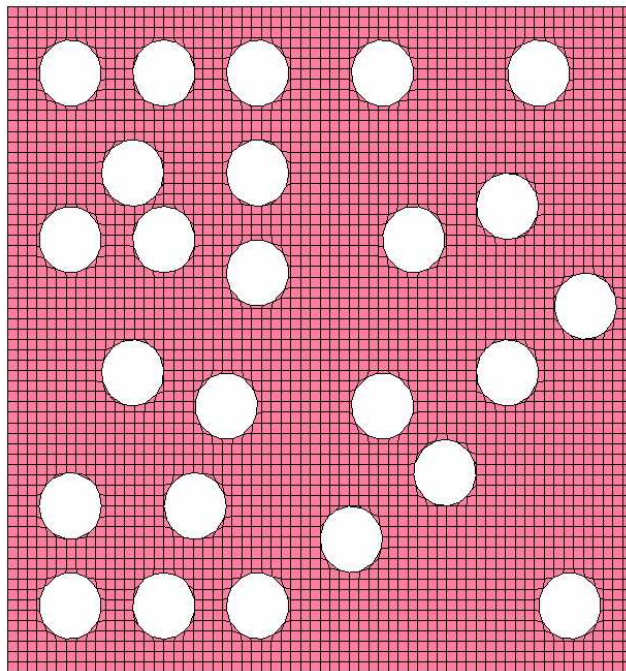
Zweites Beispiel

- Struktur mit 25 willkürlich verteilten Löchern, Neo-Hooke-Material mit $\lambda, \mu=1$
- Mehrgitter V-Zyklus, je 1 Zyklus Gauss-Seidel-Verfahren als Vor- und Nachglättung
- Abbruchkriterium $\epsilon^{\text{tol}} \leq 10^{-8}$
- 4 Lastschritte bis zur deformierten Konfiguration mit 20 Prozent Dehnung
- Rechenzeitvergleich der Diskretisierungen auf den verschiedenen Verfeinerungsniveaus:

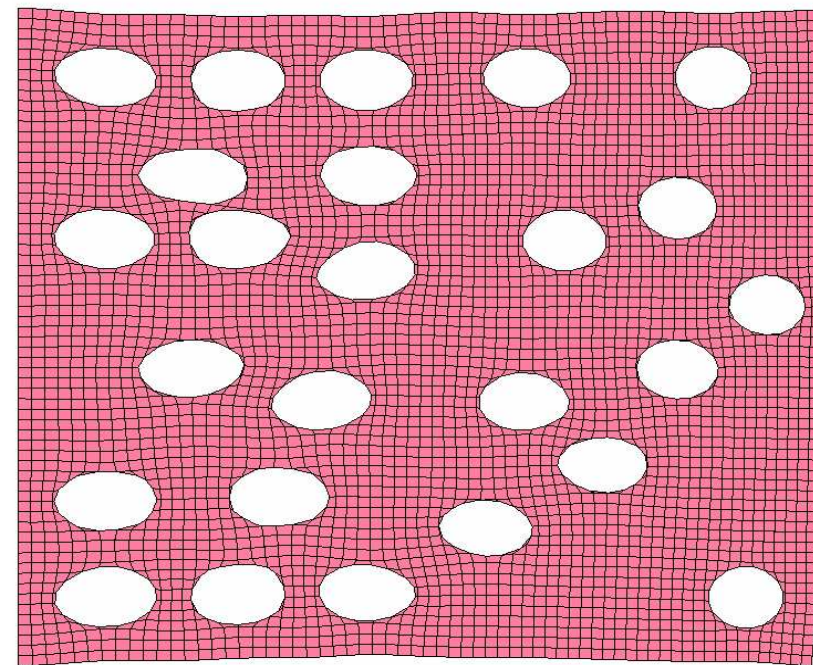
Level	Unbekannte	Rechenzeit cgj-Verfahren	Rechenzeit Mehrgitter
7	7760	42 sec	71 sec
8	28950	417 sec	314 sec
9	110728	7574 sec	1467 sec

Zweites Beispiel

→ Undeformiertes und deformiertes Netz der Diskretisierung auf Level 7



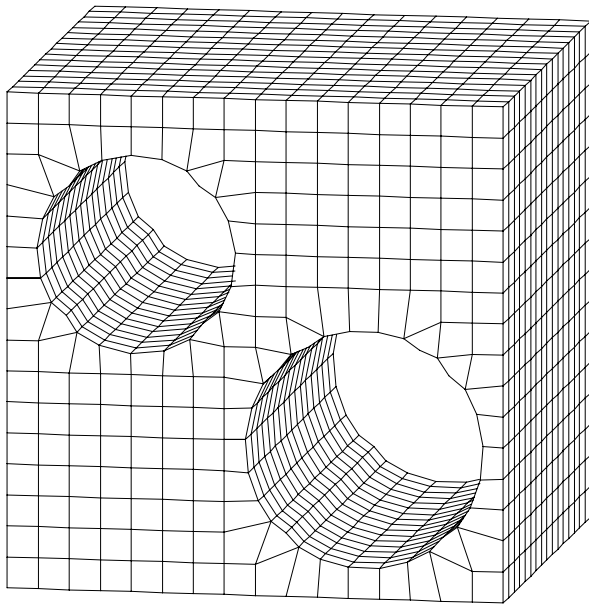
undeformierte Konfiguration



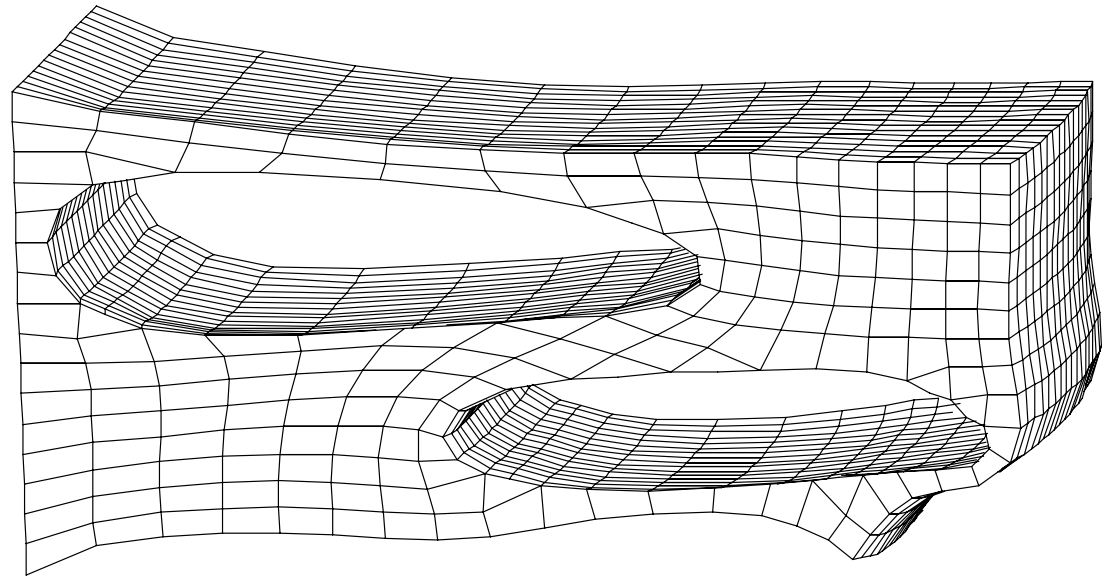
deformierte Konfiguration

Drittes Beispiel: 3D-Struktur unter Zug

- Material: Neo-Hooke $\Psi(I_C, J) = \frac{1}{2}\mu(I_C - 3) - \mu \ln J + \frac{1}{2}\lambda(J - 1)^2$, $\lambda, \mu = 1$
- 11067 Unbekannte
- Abbruchkriterium: $\|\Delta v\|_\infty \leq 10^{-4}$
- Mehrgitter V-Zyklus, je 1 Zyklus Gauss-Seidel-Verfahren als Vor- und Nachglättung
- Rechenzeit 1. Lastschritt (4 Newton-Iter.): 160 sec (Vgl.: cgj-Verfahren 152 sec)



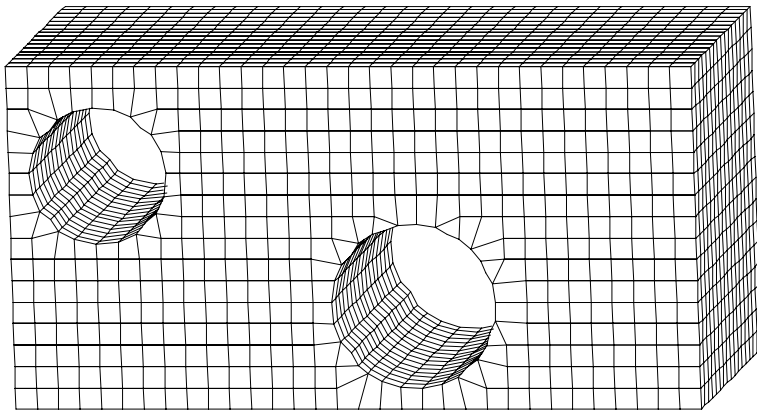
undeformierte Konfiguration



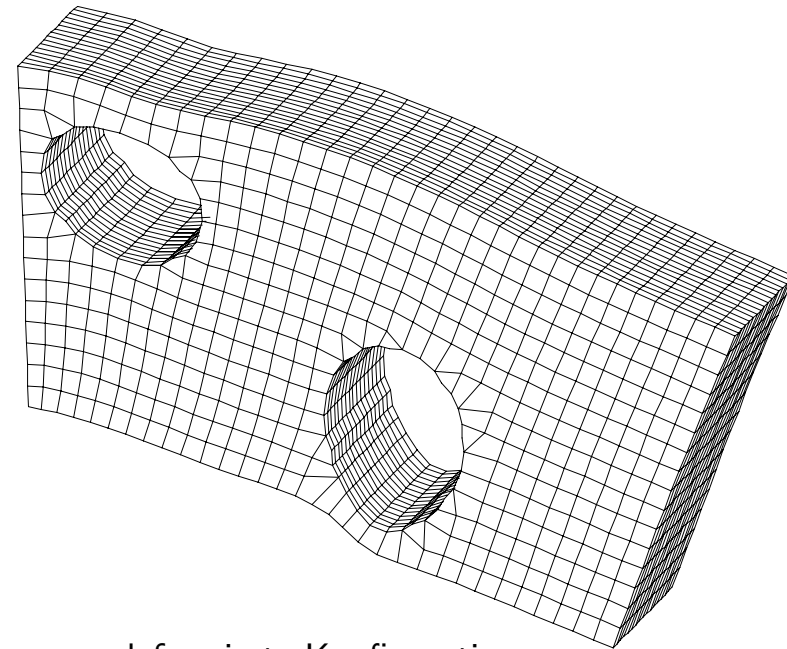
deformierte Konfiguration

Viertes Beispiel: 3D-Struktur unter Biegung

- Material: Neo-Hooke $\Psi(I_C, J) = \frac{1}{2}\mu(I_C - 3) - \mu \ln J + \frac{1}{2}\lambda(J - 1)^2$, $\lambda, \mu = 1$
- 24939 Unbekannte
- Abbruchkriterium: $\|\Delta v\|_\infty \leq 10^{-4}$
- Mehrgitter V-Zyklus, je 1 Zyklus Gauss-Seidel-Verfahren als Vor- und Nachglättung
- Rechenzeit 1. Lastschritt (4 Newton-Iter.): 379 sec (Vgl.: cgj-Verfahren 454 sec)



undeformierte Konfiguration



deformierte Konfiguration

Zusammenfassung

Composite-Finite-Element Multigrid

- Verallgemeinerung des geometrischen Multigrid
- Manipulation der Grobgitterbasis
- Berücksichtigung der Neumann-Randbedingungen auch auf den gröberen Levels
- Homogenisierung des E-Tensors nicht notwendig
- Effizienter Löser für Probleme mit vielen Unbekannten und komplizierten Rändern
- auch für komplett aperiodische Zellstrukturen einsetzbar

