



# **Statische und dynamische FE-Stabilitätsuntersuchungen an Siloschalen mit ungleichförmiger Schüttgutfüllung**

K. Schweizerhof, R. Hauptmann, K. Knebel, M. Raabe, T. Rottner  
Universität Karlsruhe, Institut für Mechanik

1998

Institut für Mechanik  
Kaiserstr. 12, Geb. 20.30  
76128 Karlsruhe  
Tel.: +49 (0) 721/ 608-2071  
Fax: +49 (0) 721/ 608-7990  
E-Mail: [ifm@uni-karlsruhe.de](mailto:ifm@uni-karlsruhe.de)  
[www.ifm.uni-karlsruhe.de](http://www.ifm.uni-karlsruhe.de)

# Statische und dynamische FE–Stabilitätsuntersuchungen an Siloschalen mit ungleichförmiger Schüttgutfüllung

K. SCHWEIZERHOF; R. HAUPTMANN; K. KNEBEL; M. RAABE; TH. ROTTNER  
Institut für Mechanik, Universität Karlsruhe

## Zusammenfassung

Schüttgutgefüllte Siloschalen werden durch Innendruck und Axialdruck aus dem eingelagerten Füllgut beansprucht. Durch die Wandreibung bzw. Haften zwischen Schüttgut und Siloinnenwand entstehen in der Siloschale Druckspannungen in Meridianrichtung und infolge des Schüttgutdruckes Zugspannungen in Umfangsrichtung. Bei dünnwandigen Stahlzylinderschalen wird trotz der Zugbeanspruchung in Umfangsrichtung das Stabilitätsversagen infolge der Längsbelastung maßgebend. Für einen Beulnachweis nach den maßgebenden Regelwerken DIN 18800 Teil 4 [4] bzw. ECCS [6] darf bislang der Einfluß der Bettung und die damit verbundene Steigerung der Traglast, obwohl experimentell bestätigt, nicht berücksichtigt werden, da bisher keine verlässlichen Abschätzungen zur quantitativen Erhöhung der axialen Versagenslast von Zylinderschalen durch die stützende Wirkung des Schüttguts vorliegen.

Im Rahmen des Sonderforschungsbereichs Silo (SFB 219) [23], [13], [15], [17], [26] und [14] wurden umfangreiche experimentelle und numerische Untersuchungen direkt miteinander gekoppelt durchgeführt. Es war das erklärte Ziel, mit Hilfe der Simulation ein besseres Verständnis des Tragverhaltens schüttgutgefüllter, stählerner Silo–Kreiszyinderschalen unter Berücksichtigung der geometrischen und strukturellen Imperfektionen zu gewinnen und weitere Kriterien für praktische Berechnungsverfahren zu erhalten. Auf diese Untersuchungen soll mit einer speziellen Fokussierung auf die Nutzung transienter FE–Simulationen eingegangen werden. Es wird gezeigt, daß mit den transienten Untersuchungen verlässliche Aussagen über Nachbeulminima möglich sind, die überraschend gut mit den Bemessungswerten nach den Vorschriften übereinstimmen.

## 1 Einführung

Bei schüttgutgefüllten zylindrischen Siloschalen wäre es manchmal sehr förderlich, wenn das Schüttgut beim Beulfall als stützend angesetzt werden könnte. Das Beulen wird durch die Längsbelastung infolge Haften bzw. infolge Wandreibung des Schüttguts an der Schalenwand hervorgerufen. Hinzu kommen noch die Belastungen durch das Eigengewicht der Schale sowie durch den Aufbau am oberen Schalenende. Versuche mit ruhendem Schüttgut haben gezeigt, daß die Erhöhungen der Beullasten verglichen zu leeren Zylindern beträchtlich sein können.

Im Rahmen des SFB 219 Silos wurden daher umfangreiche Untersuchungen an Stahlsilos durchgeführt, siehe [15], [26], [14], [17] und [13]. Mit Hilfe klar definierter Versuche sollten Grundlagen für Berechnungen mit möglichst wenigen Unsicherheiten geschaffen werden. Dazu wurden die Strukturen – Siloschüsse mit 1000 mm Länge – sehr sorgfältig vermessen bzw. wo notwendig sehr sorgfältig hergestellt und zuerst klar definierten Belastungen – reiner Axiallast und Wasserlast – unterworfen, um dann den Realfall mit der nicht so gut überschaubaren Schüttgutfüllung anzugehen. Auf diese Untersuchungen wird in einem Überblick in Abschnitt 2 eingegangen.

Die üblichen rechnerischen Untersuchungen mit Finite Element Programmen beruhen auf der Annahme statischer Lasten, sofern das Stabilitätsverhalten gesucht ist. Stabilitätsversagen ist dann angezeigt, wenn die Steifigkeitsmatrix singulär wird. Bei statischer Betrachtung können dem Stabilitätspunkt – Verzweigungs– oder Durchschlagpunkt – folgende Last–Deformationspfade mit fallendem und eventuell später wieder ansteigendem Kurvenverlauf berechnet werden. Damit lassen sich eventuell noch höhere Maxima und im weiteren Verlauf auch manchmal das Nachbeulminimum ermitteln. Bei komplexen Strukturen wie axial belasteten Zylindern, die notwendigerweise mit sehr feinen Netzen diskretisiert werden, ist letzteres kaum möglich, da numerisch zu viele Probleme insbesondere Konvergenzschwierigkeiten wegen vieler lokaler Beulprobleme auftreten.

Es stellt sich dabei die Frage nach der Relevanz der auf den ersten Stabilitätspunkt folgenden statischen Untersuchungen, da das Einfallen von Beulen mit endlicher Geschwindigkeit erfolgt und damit zusätzlich zu ursprünglich vorhandenen Imperfektionen weitere Störungen der jeweiligen Gleichgewichtslagen vorliegen. Dies ist insbesondere bei ungleich verteiltem Schüttgut zu erwarten, wie es im Normalfall selbst bei sorgfältigem Einbringen vorliegt. Bei fließendem Schüttgut entstehen im allgemeinen Fall Schlotbildung und Brückenbildung, die zu sehr unterschiedlicher Belastung der Schalenwand führen. Außerdem besteht die Frage, inwieweit FE–Stabilitätsuntersuchungen beim Fall „einseitige Stützung“ in der üblichen Form der Betrachtung von Tangentenmatrizen aussagekräftig sind.

Daher wird alternativ zu den bekannten statischen Untersuchungen auch das dynamische Verhalten untersucht, indem von Anbeginn die Belastung mit vorgegebener Geschwindigkeit aufgebracht wird. Es ist zu erwarten, daß sich eine Glättung des Lösungspfades einstellt und daß sich Nachbeulminima mit geringerem numerischem Aufwand ermitteln lassen. Hierbei ist allerdings zu diskutieren, ob mit diesem Vorgehen nicht wesentliche Informationen über Verzweigungs– und lokale Durchschlagpunkte verlorengehen.

## 2 Versuche an Siloschalen

### 2.1 Versuchsprogramm

Die die Versuchskörper beschreibenden Kennwerte sind in Tabelle 1 aufgeführt. Es wurden zunächst Versuche mit definierten Belastungen, wie reine Axialbelastung sowie Axialbelastung bei gleichzeitig wirkendem hydrostatischen Innendruck durchgeführt. Diese Experimente sollten eine Verifikation des mechanischen Modells, eine Identifikation der Systemparameter sowie eine Kontrolle der verwendeten Rechenprogramme ermöglichen.

In nächsten Schritt wurden Versuche mit axialbelasteten Kreiszyindern bei ruhender Sandfüllung durchgeführt. Die verifizierten mechanischen Modelle und das verwendete Rechenverfahren ermöglichten, aufbauend auf Vergleichen mit den experimentellen Ergebnissen der Schüttgutversuche, den Einfluß einer Schüttgutbettung auf die Höhe der Versagenslast der Schale zu untersuchen. In einem dritten Schritt erfolgten dann Beulversuche mit bewegter Sandfüllung, d.h. zuerst stationärem Schüttgutumlauf und schließlich plötzlicher Entleerung.

Die verwendeten Kreiszyylinder entsprachen in ihrem Durchmesser den Abmessungen kleinerer, in der Praxis verwendeter Silobauwerke. Mit dem Einsatz solcher Großmodelle wird das Auftreten von Maßstabeffekten verhindert.

Es sei bemerkt, daß die geringe Anzahl der Versuche keine statistischen Aussagen hinsichtlich des Schüttguteinflusses auf die Versagenslast der Kreiszyinderschale zuläßt. Dies

Versuchsart	Belastung	$R/t$ Anzahl der Versuche	$\bar{\lambda}$ (DIN 18800 T 4)	$L/R$
Verifikations- versuche	Reiner Axialdruck	650/850/1100 1 / 1 / 1	1,4; 1,6; 1,8	1,6
	Axialdruck und Wasserfüllung	650/850/1100 1 / 1 / 1	1,4; 1,6; 1,8	1,6
Versuche mit Schüttgut- füllung	Axialdruck und ruhendes Schüttgut	650/850/1100 1 / 2 / 4	1,4; 1,6; 1,8	1,6
	Axialdruck und bewegtes Schüttgut (stationär)	650/850/1100 1 / 1 / 1	1,4; 1,6; 1,8	1,6
	Axialdruck und bewegtes Schüttgut (instationär)	650/850/1100 1 / 1 / 1	1,4; 1,6; 1,8	1,6

Tabelle 1: Versuchsprogramm und Kennwerte der Versuchskörper

war auch nicht das Ziel der Versuche, da sie ausschließlich der Verifikation der verwendeten Rechenmodelle dienen sollten, für die die Versuchskörper daher besonders kontrolliert gefertigt und vermessen wurden.

## 2.2 Versuchskörper und Versuchsaufbau

Bei der Planung der Versuchskörperherstellung wurde auf eine möglichst eigenspannungsarme Fertigung geachtet. Die anschließende Vermessung bezüglich der radialen Formabweichungen der fertigen Zylinder erfolgte mittels eines hochgenauen Koordinatenmeßgerätes.

Der Durchmesser der Versuchskörper  $D = 1250$  mm wurde durch die Dimensionen des im Siloprüfstand aufgebauten, bereits von *Knödel* [15] verwendeten Modellsilos vorgegeben. Die Höhe  $H = 1000$  mm der Zylinder wurde so gewählt, daß keine Längeneinflüsse hinsichtlich des Stabilitätsverhaltens auftreten konnten. Um eventuelle, die Verifikation der Versuche störende plastische Effekte beim Stabilitätsversagen zu vermeiden, wurde nur Schalenmaterial mit hoher Streckgrenze verwendet. Der Schalenwerkstoff bestand aus zur Herstellung von Trapezprofilen verwendeten verzinkten Stahlblechen von 0,6 mm bis 1,0 mm Dicke. Nach dem Anbringen der Flansche wurden die Versuchskörper auf einer Karusselldrehmaschine planeben bearbeitet.

Um der Forderung nach genau definierten Randbedingungen bestmöglichst nachzukommen, wurden die Verifikationsversuche unter einer 25 MN-Prüfmaschine durchgeführt. Die Presse bot wegen ihrer massiven Ausführung ideale Bedingungen für die gesamte Versuchsdurchführung und für die Einhaltung der geforderten Randbedingungen. Die Schüttgutversuche mit Sandfüllung wurden in einem eigens dafür vorgesehenen Siloprüfstand durchgeführt.

### Imperfektionen und Imperfektionsmessung

Die fertiggestellten Versuchskörper wiesen durchgehend nur moderate geometrische Imperfektionen auf; dies ist u.a. auf die eigenspannungsreduzierende Fertigung zurückzuführen. Die Messung der Imperfektionen erfolgte hochgenau mit einem Koordinatenmeßgerät mit

einem quadratischen Raster von  $1,8^\circ$  ( $19,63 \text{ mm}$ ) in Umfangsrichtung und  $20 \text{ mm}$  in Meridianrichtung. Damit ergab sich eine Anzahl von 9800 Meßpunkten je Zylinder. Ein typisches Bild für einen Zylinder ist in Bild 1 gegeben.

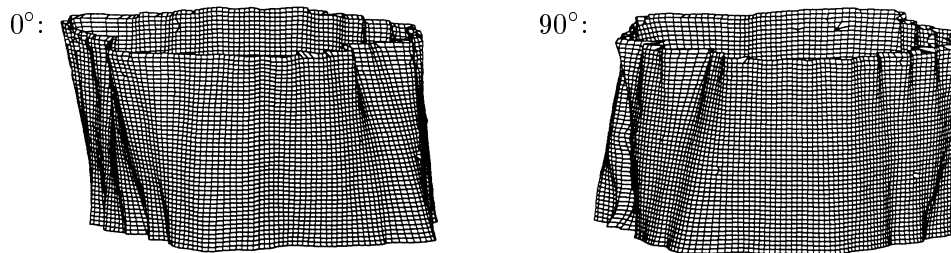


Bild 1: Gemessene Imperfektionen, überhöht dargestellt, Zylinder 850-AL

### Verifikationsversuche

Bild 2 zeigt eine Skizze des Versuchsaufbaus der Verifikationsversuche. Der Prüfkörper war zentrisch zwischen zwei beidseitig planbearbeiteten  $60 \text{ mm}$  dicken Lasteinleitungsplatten aus Stahl S 235 angeordnet. Die Lastaufbringung erfolgte über einen Hydraulikkolben zwischen Lastplatte und dem Pressenhaupt.

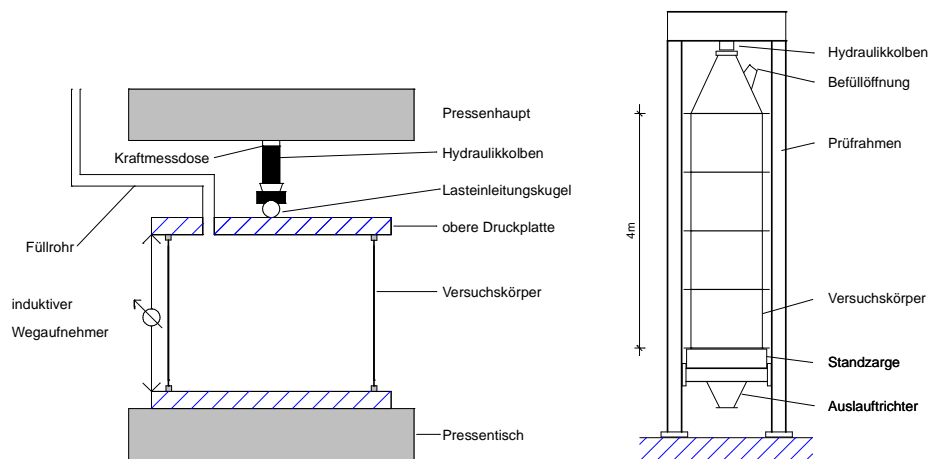


Bild 2: Versuchsaufbau der Verifikationsversuche und der Schüttgutversuche

Bei den mit zusätzlichem hydrostatischen Innendruck durchgeführten Versuchen wurde ein speziell angefertigter, paßgenauer Zylinder aus textilbewehrter Kunststoffolie in den Stahlzylinder eingelegt. Aus diesem führte ein Rohr, über das die gewünschte Druckhöhe eingestellt werden konnte, durch eine in der oberen Lasteinleitungsplatte angeordnete Öffnung.

Das Stabilitätsversagen trat bei allen Versuchskörpern schlagartig ein, begleitet von einem lauten Knall. Ein vorzeitiges lokales Einbeulen war bei keinem der Versuche zu beobachten. Alle Versuchskörper zeigten Versagensmuster in Form von Rautenbeulen.

### Versuche im Siloprüfstand

Das Versuchssilo, siehe Bild 2, wurde zentrisch in einen Prüfrahmen eingebaut, der zur Einleitung der zusätzlich zur Schüttgutbelastung auf die Versuchskörper aufzubringenden Vertikalbeanspruchung diente. Das Silo stand auf einer aufgeständerten Standzarge, in die

der Auslaufkegel eingehängt war. Der zu prüfende Zylinderschuß lag auf dem planbearbeiteten Flansch des Auslaufkegels auf. Über dem Prüfkörper waren drei weitere dickwandigere Zylinderschüsse mit planbearbeiteten Aufstandsflächen montiert. Den Abschluß nach oben bildete ein aufgesetzter Kegel. Über an diesem Kegel angebrachte seitliche Befüllöffnungen wurde das Schüttgut in das Silo eingebracht. Ein Ventil am unteren Ende des Auslaufkegels ermöglichte einen kontrollierten Schüttgutabzug.

Für eine Beschreibung der Meßeinrichtung und -anordnung wird auf [26] verwiesen.

Der als Schüttgut verwendete „*Karlsruher Sand*“ ist ein Quarzsand mit Korngrößen zwischen 0,3 mm und 0,8 mm. Die Wichte  $\gamma$  dieses Schüttgutes schwankt je nach Verdichtungsgrad zwischen 14,0 kN/m<sup>3</sup> und 16,8 kN/m<sup>3</sup>.

Die aus dem Schüttgut über Wandreibung in das Silo eingetragene Axialbelastung konnte wegen der maximal möglichen Füllhöhe von 4 m nicht auf die zum Versagen der Prüfkörper erforderlichen Werte gesteigert werden. Aus diesem Grunde mußte die zusätzliche zum Erreichen des Stabilitätspunktes notwendige Axialbeanspruchung über einen Hydraulikkolben, der sich gegen das obere Querhaupt des Prüfrahmens abstützte, eingetragen werden. Der durch dieses Vorgehen erzeugte Beanspruchungszustand (Axial- / Radialbeanspruchung) weicht etwas von dem in hohen, schüttgutgefüllten Silos ab. Jedoch kann er als gute Annäherung an die in Silos tatsächlich vorherrschende Systembelastung betrachtet werden, da der Schüttgutruhedruck schnell mit der überschütteten Höhe ansteigt, um sich dann nur noch geringfügig zu erhöhen.

Das Versagen der Zylinder kündigte sich zumeist durch ein leises Knistern des Versuchszylinders und einen deutlichen Abfall der durch die Kraftmeßdose abgelesenen Axialbeanspruchung an. Das Versagen trat stets durch das Einfallen mehrerer Rautenbeulen ein. Nach dem ersten Versagen des Zylinders wurde die Axialbelastung wieder erhöht, um eine Resttragfähigkeit des Zylinders zu bestimmen.

## **Zusammenfassung der Versuchsergebnisse**

1. Die durchgeführten experimentellen Untersuchungen zeigen den positiven Effekt von hydrostatischem Innendruck bzw. einer ruhenden Schüttgutfüllung auf die Höhe der Versagenslast der untersuchten Zylinder auf. Die ermittelten Beulwerte liegen im oberen Bereich der aus der Literatur bekannten Versuchswerte. Dies ist auf die spannungsreduzierte Fertigung der Versuchskörper und die sorgfältige Ausbildung der Zylinderenden zurückzuführen.
2. Es zeigt sich die aus anderen Versuchsreihen bekannte Abhängigkeit des Beulwertes vom  $R/t$ - Verhältnis.
3. Trotz planbearbeiteter Zylinderenden bzw. Lasteinleitungsplatten wurden deutliche Ungleichförmigkeiten in der Verteilung der Membranlängsspannungen über dem Schalenumfang ermittelt [26], die auf sehr kleine Unebenheiten der Aufstandsflächen zurückzuführen sind.
4. Die im Experiment lokal vorliegende Innendruckbeanspruchung durch Schüttgut bzw. Bettungssteifigkeit des Schüttguts konnte aus versuchstechnischen Gründen nicht bestimmt werden. Daher mußte ein idealisierender gleichmäßiger Ansatz des Innendrucks bzw. der Bettungssteifigkeit erfolgen.
5. Die Ergebnisse der Versuche mit bewegtem Schüttgut zeigen deutliche Reduktionen der Beulasten im Vergleich zu den Versuchen mit ruhendem Schüttgut.

### 3 Stabilitätsuntersuchungen mit Finiten Elementen, allgemeine Bemerkungen

Im Rahmen der Untersuchungen wurden moderne nichtlineare Schalenelemente [9], [7] eingesetzt. Diese weisen keine Versteifungseffekte auf und haben sich in zahlreichen weiteren Untersuchungen sowohl an linearen als auch nichtlinearen Aufgabenstellungen bewährt. Im Falle eines nichtlinearen Problems wird das nichtlineare Gleichungssystem, das im Falle von Verschiebungsansätzen wie folgt lautet,

$$\mathbf{G}(\mathbf{u}, \lambda) = \mathbf{R}(\mathbf{u}) - \lambda \mathbf{P} = 0 \quad (1)$$

für eine inkrementell iterative Lösung z.B. mit einem Newton-Verfahren linearisiert. Für den  $m$ -ten Lastschritt und die  $n$ -te Iteration lautet das zugehörige lineare Gleichungssystem

$$\mathbf{K}_T(\mathbf{u}^n) \cdot \Delta \mathbf{u} = \mathbf{R}(\mathbf{u}^n) - \lambda^m \mathbf{P}.$$

Hierbei sind  $\mathbf{R}$  der Vektor der inneren Kräfte,  $\mathbf{P}$  der Lastvektor,  $\lambda$  der Lastfaktor und  $\mathbf{K}_T$  die Tangentensteifigkeitsmatrix. Der Zuwachs der Verschiebungen in der  $n$ -ten Iteration ist dann  $\Delta \mathbf{u}$ . Der Vektor der Verschiebungen im  $n + 1$ -sten Iterationsschritt lautet dann

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + \Delta \mathbf{u}.$$

Die sogenannte „Numerische“ Stabilitätsanalyse nutzt die Eigenschaft, daß die Tangentensteifigkeitsmatrix im Fall einer Verzweigung bzw. eines Durchschlagens singularär wird, aus. Für eine ausführliche Erläuterung sei auf Brendel/Ramm [2] sowie auf die umfassende Diskussion in [16],[19] verwiesen. Im Fall einer statischen Betrachtung kann die Tangentensteifigkeitsmatrix als eine quadratische Funktion eines quasi Normalzustandes  $\mathbf{u}^0$  multipliziert mit dem aktuellen Lastwert  $\lambda$  dargestellt werden. Damit ergibt sich für den Fall einer singularären Steifigkeitsmatrix ein quadratisches Eigenwertproblem siehe [18]. Die Lösung ist allerdings sehr aufwendig, daher wird üblicherweise auf den aktuellen Gleichgewichtszustand normiert, was letztlich auf ein lineares Eigenwertproblem führt, siehe [2]:

$$\mathbf{K}_T \Delta \mathbf{u} = [\mathbf{K}_L + \lambda(\mathbf{K}_{\sigma L} + \mathbf{K}_{uL} + \mathbf{K}_{\sigma NL} + \mathbf{K}_{uNL})] \Delta \mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

Dessen Implementierung in Finite Element Programme ist relativ einfach und in vielen Fällen – insbesondere dann, wenn der Last–Verschiebungspfad fast linear verläuft – kann damit eine sehr gute Aussage über die Stabilitätslast getroffen werden. Bei stärker nichtlinearen Problemen empfiehlt sich die sogenannte begleitende lineare Eigenwertanalyse, bei der begleitend zur nichtlinearen Berechnung am jeweiligen Lastniveau mit dem aktuellen Verschiebungszustand lineare Eigenwertprobleme gelöst werden.  $\lambda$  ist dann ein Multiplikationsfaktor für die aktuelle Last, d.h. bei  $\lambda = 1$  ist dann der Stabilitätspunkt erreicht. Damit sind oft gute Vorhersagen über die Stabilitätslast möglich.

Verzichtet man auf die Vorhersageeigenschaft und nutzt nur die Untersuchung der aktuellen Steifigkeitsmatrix auf Singularität, ergibt sich neben der üblichen Beobachtung des Vorzeichens der Determinante ein sehr einfaches und effizientes Verfahren, da nur der erste Eigenwert der Tangentensteifigkeitsmatrix zu bestimmen ist. Wriggers/Wagner/Miehe [29], siehe auch [30], nutzen dies für die direkte Bestimmung von Stabilitätspunkten, indem das Standard eigenwertproblem  $\mathbf{K}_T(\mathbf{u})\phi = \mathbf{0}$  als zusätzliche Bedingung zur Lösung der nichtlinearen Gleichungen hinzugefügt wird. Eine Klassifikation der Singularität läßt sich dann wie folgt vornehmen:  $\phi^T \mathbf{P} \neq 0$  zeigt einen Durchschlagspunkt an,  $\phi^T \mathbf{P} = 0$  zeigt einen Verzweigungspunkt an. Für eine umfangreiche Diskussion dieses Vorgehens – im Schrifttum unter

dem Namen „Erweiterte Systeme“ bekannt, Anwendungen und kleinere Erweiterungen sei auf [29], [28] und [10] verwiesen.

Es sei bemerkt, daß sich damit bei vielen Problemen sehr effizient und ohne die Bestimmung eines Last-Verformungspfades Stabilitätslasten berechnen lassen. Allerdings wird bei der Methode nicht gesichert, daß der erste singuläre Punkt oder der singuläre Punkt mit der niedrigsten Beullast gefunden wird. Damit ist der eigentliche Vorteil der erweiterten Systeme bei komplexeren Aufgabenstellungen nicht vorhanden. Für den Einsatz in der Berechnungspraxis gehört es daher nur zum Bereich unterstützender Methoden und ist nur für Parameteruntersuchungen als sicheres Recheninstrument zu betrachten.

Reale Systeme wie imperfekte Kreiszyylinder unter Axialbelastung zeichnen sich oft dadurch aus, daß die Verzweigungspunkte entfallen und die Lastverformungspfade sich quasi als Kurven für eine Abfolge von Durchschlagproblemen ergeben, d.h. viele Bereiche mit abfallenden Last-Verformungskurven enthalten. Ein solcher Abfall ist aber physikalisch nur bei einer Verschiebungssteuerung einer Belastung möglich. Nimmt gleichzeitig auch noch die maßgebende Verschiebung ab, dann ist dies nur ein Kurvenbereich mit theoretischem Wert, wenn die Verschiebung nicht zurückgefahren werden kann.

In allen Fällen mit abfallenden (instabilen) Kurvenästen ist es offen, inwieweit die jeweiligen Vorbeuläste Stabilität garantieren, so daß diese auch für Entwurfszwecke nutzbar sind. Dies ist die oft gestellte Frage nach der Sensitivität der Last-Verformungspfade gegenüber Störungen, seien dies Lasten, geometrische Randbedingungen oder Imperfektionen. Bei Betrachtung des äußerst umfangreichen Schrifttums läßt sich feststellen, daß mit sinnvollem Aufwand nur eine Einzelfalluntersuchung gegenüber einer bestimmten, definierten Störung durchgeführt werden kann. Allgemeine Sensitivitätsuntersuchungen gegenüber beliebigen Störungen erscheinen derzeit nicht durchführbar, wengleich dies die Untersuchungen von [27], [25] und [24] angeben. Eine genauere Betrachtung zeigt aber, daß die bestimmten Sensitivitäten nicht gesichert ermittelt werden können. Ähnlich sind die Untersuchungen von [3] bezüglich der wesentlichen Imperfektionen bei stabilitätsgefährdeten Schalen sehr erfolgreich für die betrachteten Fälle. Allerdings ist auch hier schon wegen der Begrenztheit der Diskretisierung und der Zahl der berechneten Eigenwerte und -formen nicht gesichert, daß wirklich die wesentliche Imperfektion ermittelt wurde.

Außerdem ist die Wirklichkeit des Beulens nicht ein statisches Durchfahren eines Last-Verformungspfades sondern ein zeitlich sehr schnell ablaufender Vorgang, so daß kinetische Effekte durchaus eine Rolle spielen. D.h. die nichtlinearen Gleichungen (1) sind dann um Trägheits- und Dämpfungsterme zu ergänzen. Damit lauten die linearisierten Gleichungen für ein sogenanntes implizites Zeitintegrationsverfahren:

$$\mathbf{M}\Delta\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}_T\Delta\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}_T\Delta\mathbf{u} = \mathbf{P} - \mathbf{F}_I$$

Mit  $\mathbf{M}$  als Massenmatrix,  $\mathbf{C}_T$  als Dämpfungsmatrix,  $\Delta\dot{\mathbf{u}}$  als Vektor der Geschwindigkeiten,  $\Delta\ddot{\mathbf{u}}$  als Beschleunigungsvektor und  $\mathbf{F}_I$  als Vektor der verallgemeinerten inneren Kräfte für das jeweilige Zeitintegrationsverfahren. Wird mit  $\Delta\mathbf{y} = \dot{\mathbf{u}}$  und  $\Delta\dot{\mathbf{y}} = \ddot{\mathbf{u}}$  eine Transformation in den Phasenraum vorgenommen, so lassen sich Bedingungen für Stabilität im jeweiligen Zeitschritt/Lastzustand angeben (siehe z.B. [16]).

$$\begin{bmatrix} \Delta\mathbf{y} \\ \Delta\dot{\mathbf{y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}_T & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}_T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{u} \\ \Delta\dot{\mathbf{u}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{P} - \mathbf{F}_I) \end{bmatrix}$$

Notwendige Bedingungen für Stabilität sind:

$$\text{Sp}(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}_T) \geq 0 \quad \text{und} \quad \det \mathbf{K}_T \geq 0,$$



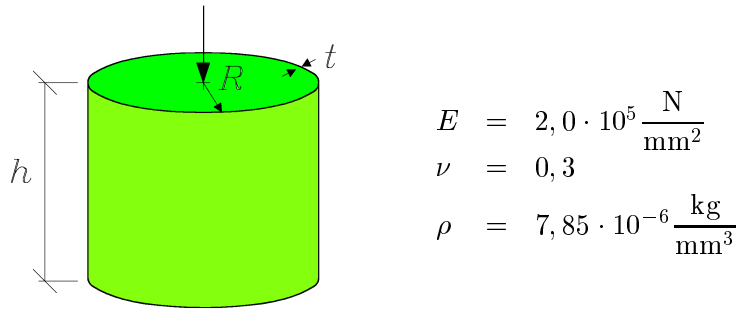


Bild 3: Rechenmodell und Materialdaten

für asymptotische Stabilität:

$$\text{Sp}(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}_T) \geq 0 \quad \text{und} \quad \det \mathbf{K}_T > 0.$$

Allerdings sei auch hier bemerkt, daß damit keine Sensitivitäten für den allgemeinen Fall angegeben werden können, sondern nur Einzelfallbetrachtungen mit eindeutig vorgegebenem System und Belastung möglich sind. Damit ist die Nutzung dieser Gleichungen für allgemeine Entwurfszwecke kaum möglich.

Zusammenfassend läßt sich feststellen, daß mit Nutzung der heutigen Berechnungsinstrumente und der algorithmischen Hilfsmittel zwar sinnvolle Hinweise auf Schwächen von Strukturen hinsichtlich des Stabilitätsversagens gegeben können, daß gesicherte Aussagen zur Stabilität aber nur im Einzelfall möglich sind. Die Untersuchungen in den folgenden Abschnitten wurden unter diesem Gesichtspunkt durchgeführt.

## 4 Statische Stabilitätsuntersuchungen an Siloschalen

Begleitend zu den in Abschnitt 2 beschriebenen Versuchen wurden zahlreiche numerische Untersuchungen mit Finiten Elementen durchgeführt, die in den Dissertationen von Ummenhofer [26] und Knebel [14] ausführlich dokumentiert sind. Ziel dieser vorwiegend statischen Stabilitätsuntersuchungen war, eine erste Vorhersage für die experimentelle Versagenslast zu gewinnen. Parallel wurden Untersuchungen mit dem kommerziellen Programm ANSYS [1] und dem institutseigenen FE-Paket FEAP-MeKa [22] vorgenommen, die mit sehr unterschiedlichen Randbedingungen, Diskretisierungen und unterschiedlichen Finiten Elementen erfolgten. Damit waren auch einige Unsicherheiten in der Erfassung der Wirklichkeit abgedeckt. Im Folgenden wird aus Gründen der Platzlimitierung nur auf die numerischen Untersuchungen mit FEAP-MeKa eingegangen.

Die Berechnungen erfolgten mit dem in Bild 3 dargestellten Rechenmodell, den dort angegebenen Materialdaten sowie der in Tabelle 2 angegebenen Geometrie.

Zylinder	1100-AL	1100-B1	850-AL	850-B2	650-AL	650-B1
	1100-AW	1100-IP	850-AW		650-AW	
Radius $R$	625	625	625	625	625	625
Höhe $h$	966	1000	966	1000	966	1000
Dicke $t$	0.56	0.56	0.67	0.67	0.95	0.95

Tabelle 2: Geometrie der untersuchten Zylinder

Zylinder	Randbedingung			
	a	b	c	d
1100-AW (leer)	192	193	137	187
1100-AW	232	241	185	226
$F_{exp}=178$ kN; $\frac{F_{num}}{F_{exp}}$	1.30	1.35	1.04	1.27
Verhältnis $\frac{F_{exp.}}{F_{num,leer}}$	0.93	0.92	1.30	0.95
850-AW (leer)	273	273	241	246
850-AW	322	340	310	344
$F_{exp}=287$ kN; $\frac{F_{num}}{F_{exp}}$	1.12	1.18	1.08	1.20
Verhältnis $\frac{F_{exp.}}{F_{num,leer}}$	1.05	1.05	1.19	1.17
650-AW (leer)	472	471	434	435
650-AW	623	655	609	633
$F_{exp}=520$ kN; $\frac{F_{num}}{F_{exp}}$	1.20	1.26	1.17	1.22
Verhältnis $\frac{F_{exp.}}{F_{num,leer}}$	1.10	1.10	1.20	1.20

Randbedingungen:

oberer Rand

a) gelenkig, wölbbehindert

b) eingespannt, wölbbehindert

c) gelenkig, wölbfrei

d) eingespannt, wölbfrei

unterer Rand

gelenkig, wölbbehindert

Tabelle 3: Vergleich der experimentellen und numerischen Ergebnisse

Für die Diskretisierung wurden 9200 vierknotige Schalenelemente basierend auf einer sogenannten Reissner-Formulierung, siehe [7], [9] mit der bekannten Schubinterpolation nach Bathe/Dvorkin [5] eingesetzt. Für die imperfekte Geometrie wurden die exakten Meßdaten verwendet. Die Axialbelastung erfolgt über eine Einzellast am oberen Rand in Zylinderlängsrichtung; am oberen Rand wird durch Kopplung der Freiheitsgrade in Längsrichtung eine starre Platte im Rechenmodell erzeugt. Ansonsten werden die Freiheitsgrade des oberen Randes radial unverschieblich aber verdrehbar angenommen. Der untere Rand ist völlig unverschieblich, gelenkig gelagert. Für die Diskussion von Variationen wird auf [14], [26] verwiesen.

Die statischen Berechnungen erfolgten mit Hilfe begleitender Eigenwertuntersuchungen sowie mit Hilfe erweiterter Systeme. Die Belastung der Zylinder mit Wasserinnendruck und mit Schüttgutfüllung erfolgte in der numerischen Berechnung so, daß zuerst der Wasserdruck bzw. der Druck infolge Schüttgutfüllung aufgebracht wurde. Dann wurde die Axialbelastung schrittweise aufgebracht und die Stabilitätslast ermittelt.

Für die oben angegebenen Geometrien und Randbedingungen sind die Ergebnisse der numerischen Untersuchungen für reine Axialbelastung sowie Wasser- und Axialbelastung in Tabelle 3 den experimentellen Ergebnissen gegenübergestellt. Es zeigen sich die bekannten Abweichungen zwischen Experiment und Berechnung, die hier auf die gemessenen minimalen Randaufstandsimperfectionen, sowie leicht anderen Randbedingungen wie geringfügiger Einspannung und Längsverschieblichkeit mit Kontakt zurückzuführen sind.

Weitergehende numerische Berechnungen der Last-Verformungspfade über den ersten Stabilitätspunkt hinaus zeigen den in Bild 4 für den Zylinder 1100-AL dargestellten Verlauf. Ähnliche Verläufe ergeben sich für andere Zylindergeometrien. Typisch ist für alle Kurven – besonders ausgeprägt für die dünnwandigeren Zylinder, daß sich ein komplexer Verlauf der Nachbeuläste ergibt. Die Berechnungen sind nur mit sehr kleinen Lastschritten durchführbar, sie konvergieren oft nur sehr schlecht; echte Nachbeullasten d.h. vollständi-

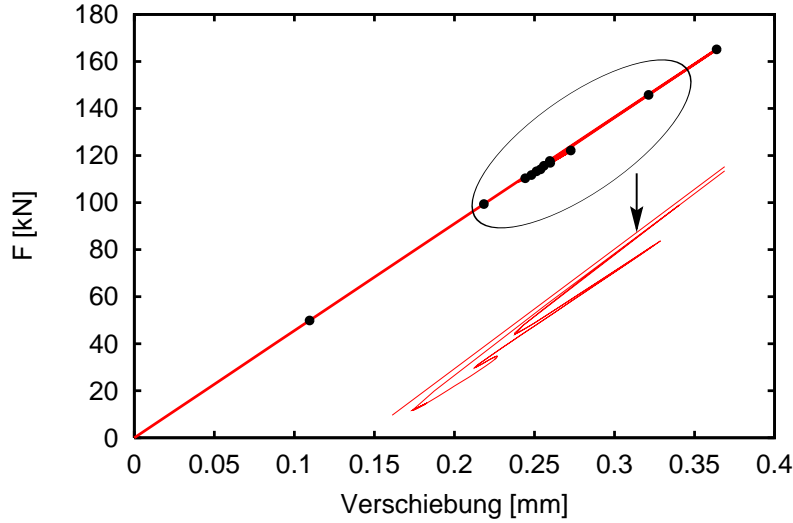


Bild 4: Zylinder 1100-AL: Last-Verschiebungsdiagramm aus statischer Berechnung

ge Kurvenverläufe bis zur Endverschiebung des Versuchs lassen sich mit überschaubarem Aufwand nicht bestimmen. Auch eine Visualisierung der Verschiebungszustände in den verschiedenen Punkten der Nachbeuläste läßt keinen Hinweis auf das weitere Beulverhalten zu. D.h. es sind praktisch keine Aussagen über Nachbeullasten mit Hilfe statischer Untersuchungen möglich.

## 5 Stabilitätsuntersuchungen mit transienter Belastung

Die Unzulänglichkeiten der statischen Stabilitätsuntersuchungen insbesondere die numerischen Probleme führten zur Frage, ob nicht die reale Abbildung des Belastungsprozesses über eine transiente Berechnung zu Aussagen über die Nachbeullasten führen könnte. Hierzu wird die Belastung durch den Wasserdruck und das Schüttgut wie vor statisch und nur die Axialbelastung über eine starre Lastplatte mit einem vorgegebenen Geschwindigkeitsprofil siehe Bild 5 zeitveränderlich aufgebracht. Dabei werden die Trägheitsterme selbstverständlich aktiviert.

Wird z.B. das Newmark-Verfahren [12] ohne Dämpfung verwendet, so ergibt sich im Zeitschritt  $t + \Delta t$  die folgende Gleichung für den Verschiebungszuwachs in der  $k$ -ten Iteration:

$$(\mathbf{K} + \frac{4}{\Delta t^2} \mathbf{M}) \cdot \Delta \mathbf{u}^k = \mathbf{R} - \mathbf{F}^{k-1} - \mathbf{M} \left[ \frac{4}{\Delta t^2} ({}^{t+\Delta t} \mathbf{u}^{k-1} - {}^t \mathbf{u}) - \frac{4}{\Delta t} {}^t \dot{\mathbf{u}} - {}^t \ddot{\mathbf{u}} \right]$$

Mit  $t$  als Zeitschritt, für den die Größen Verschiebung, Geschwindigkeit und Beschleunigung bekannt sind, und mit  $\Delta t$  für die Zeitschrittgröße. Es sei bemerkt, daß die effektive Steifigkeitsmatrix  $\tilde{\mathbf{K}}$

$$\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{K} + \frac{4}{\Delta t^2} \mathbf{M}$$

infolge des Massenterms fast immer positiv definit ist. Für kleinere Zeitschrittweiten ist sie immer positiv definit, da dann der Massenterm dominiert.

Für die Information über die Stabilität eines Verschiebungszustandes ist die effektive Steifigkeitsmatrix oder deren Determinante nicht verwendbar, d.h. die Beurteilung der Stabilität ist ohne zusätzliche Maßnahmen wie z.B. die gesonderte Untersuchung der Eigenwerte der Tangentensteifigkeitsmatrix nicht möglich. Um Störungen bzw. deren Einfluß auf das

Verhalten zu berücksichtigen, müßte außerdem im Sinne einer Ljapunowschen Stabilitätsbetrachtung immer eine vollständige Berechnung von Beginn der Störung an bis zum Ende der Betrachtungszeit erfolgen. Für eine ausführliche Diskussion sei auf [19] und [11] verwiesen.

Außerdem wären auch noch aus algorithmischen Gründen Variationen der Zeitschrittweiten vorzunehmen, um nicht als Folge zu großer Schrittweiten über Verzweigungspunkte oder lokale Durchschlagpunkte „hinwegzurechnen“.

Als Vorteil einer transienten Berechnung des zwar originär langsamen quasistatischen Problems mit der Belastung durch eine sehr steife Lastplatte, d.h. fast starren Körper, ist auch noch die direkte Berücksichtigung des Kontakts bzw. der Möglichkeit des LöSENS des Kontakts zwischen Platte und Zylinder am oberen und unteren Rand zu nennen. Stabilität unter Einbeziehung von Kontaktrandbedingungen kann bekanntermaßen nicht mit Hilfe der Betrachtung der Tangentensteifigkeitsmatrizen erfaßt werden, da gerade beim LöSEN bzw. Kontaktieren Tangentenmatrizen nicht existieren. Dies ist insbesondere bei axialbelasteten Zylinderschalen, bei denen beim Beulen auch in Längsrichtung kleinste Verschiebungsmöglichkeiten (Wölbbehinderung oder nicht !) eine deutliche Reduktion der Beullast bewirken, von hoher Wichtigkeit. Bei der ständig vorwärtsschreitenden Zeitintegration wird durch die Kontaktproblematik zwar die Konvergenzgeschwindigkeit bei stark wechselndem Kontakt herabgesetzt, aber dennoch konvergiert die nichtlineare Lösung infolge der Dominanz der Massenmatrix relativ gut.

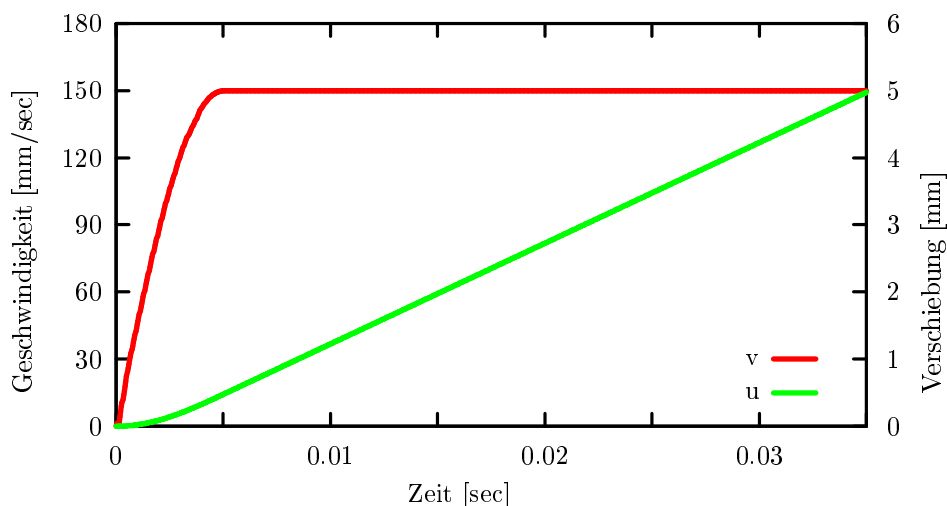


Bild 5: Lastplatte, Geschwindigkeitsprofil für die transiente Belastung

Erste Testberechnungen [14] mit der Betrachtung einer dynamischen Beanspruchung in Längsrichtung mit dem in Bild 5 angegebenen Geschwindigkeitsprofil, zeigten einen weiteren, ursprünglich etwas überraschenden Effekt, nämlich daß die Nachbeullasten relativ unabhängig von der Geschwindigkeit der Lastaufbringung waren und im Nachbeulbereich einen weitgehend konstanten Wert annahmen. Außerdem zeigte sich bei weiteren Untersuchungen, daß die Nachbeullasten der imperfekten leeren Zylinder ausgezeichnet mit den nach DIN 18800 Teil 4 [4] berechneten Beullasten korrelierten. Die mit der numerischen Simulation berechneten Beullasten lagen alle knapp oberhalb der Beullasten nach DIN.

Die systematische Untersuchung wurde für alle angegebenen Zylinder sowohl leer als auch mit Wasserfüllung sowie mit Schüttgutfüllung unter Berücksichtigung des Interaktionsmodells durchgeführt. Hierzu wurde sowohl mit expliziter Zeitintegration und sehr kleinen Zeitschritten mit LS-DYNA [8] als auch mit impliziter Zeitintegration und unterschiedlicher Zeitschrittweite mit FEAP-MeKa [22] gearbeitet. Die explizite Zeitintegration hat den Vor-

teil, daß keine Gleichungslösung erforderlich ist und die hochfrequenten Wellen beim Beulen sehr gut aufgelöst werden.

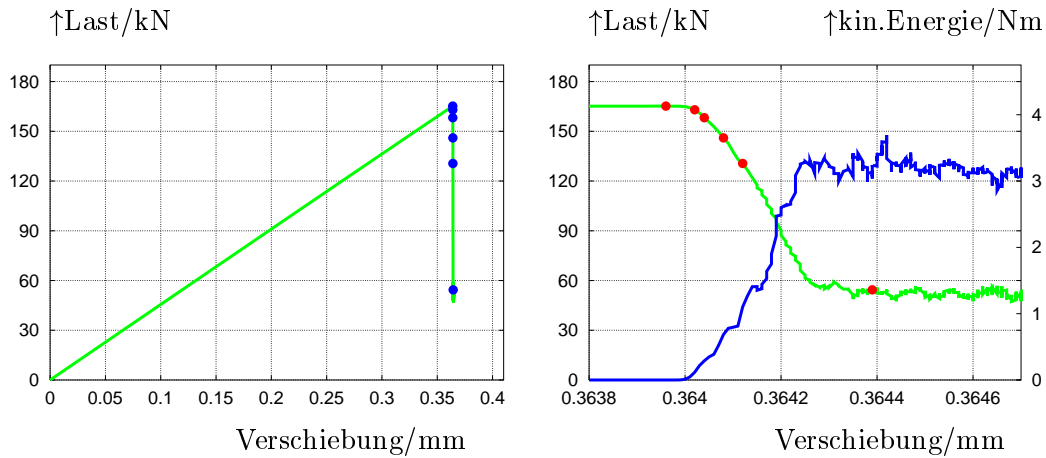


Bild 6: Zylinder AL-1100: Last-Verschiebungsdiagramm für  $v = 0,01$  mm/s

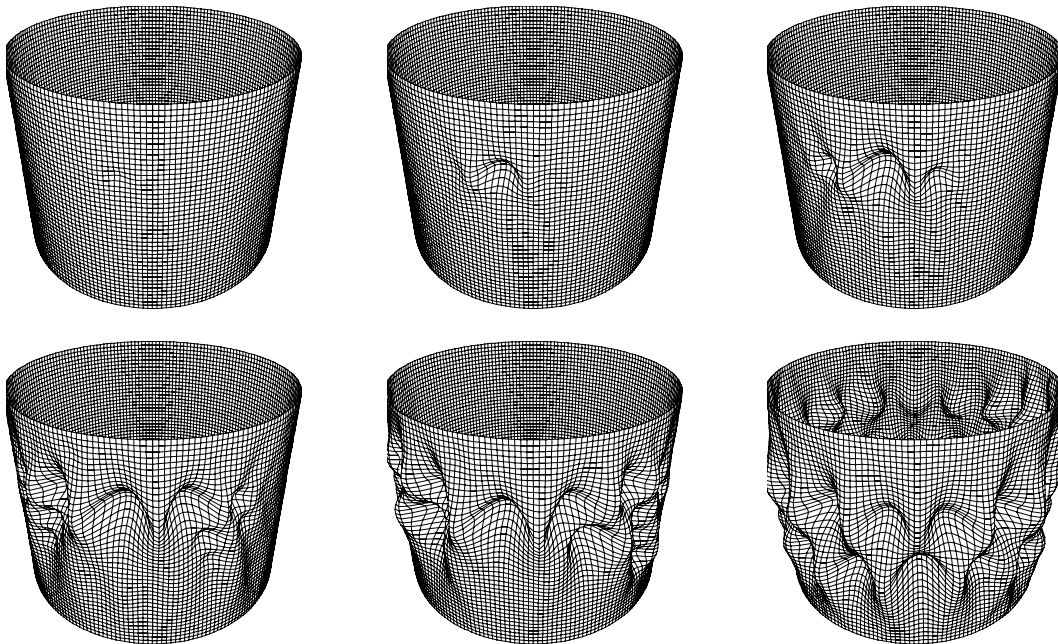
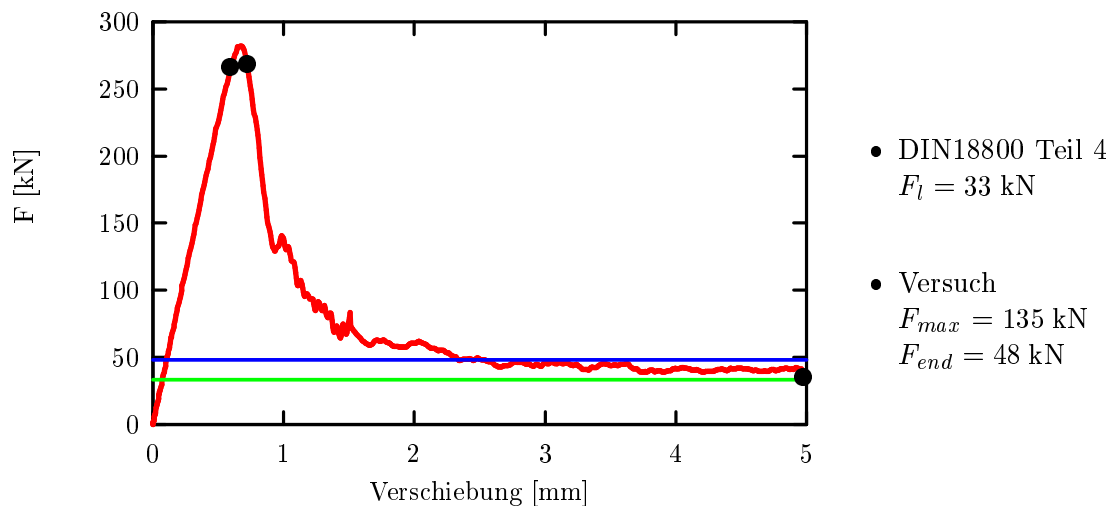


Bild 7: Zylinder 1100-AL: Deformation bei  $v = 0,01$  mm/s, 20-fach überhöht dargestellt.

Um den Einfluß der Belastungsgeschwindigkeit auf den Beulprozeß zu zeigen, wurde sowohl mit sehr kleiner Geschwindigkeit der Lastplatte  $v_p = 0,01$  mm/sec, mit  $v_p = 1$  mm/sec implizit sowie mit  $v_p = 150$  mm/sec = 0,54 km/h explizit gerechnet. Der Last-Verschiebungsverlauf, dargestellt in Bild 6, für die kleinste Geschwindigkeit, gibt einen guten Einblick in den Beulprozess, der sehr plötzlich in einem Verschiebungsbereich von 0,0003 mm abläuft. Dabei wird ein kleiner Teil der potentiellen Energie in kinetische Energie umgewandelt, was sich in sehr kurzweiligen Schwingungen bemerkbar macht. Das Gesamtbeulen, siehe Bild 7, geht von einer einer lokalen größeren Beule aus, die in ein globales Beulmuster übergeht, das im mittleren Zylinderbereich dem aus Experimenten bekannten Rautenmuster entspricht. Die Punkte in den Kurven in Bild 6 geben Informationen über den zugehörigen Last-/Verschiebungszustand.

Bei einer Steigerung der Geschwindigkeit um den Faktor 100 zeigt sich keine Steigerung der Beullast und der Nachbeullast; der Beulprozess wird jedoch auf 0,03 mm gestreckt. Die dabei entstehende kinetische Energie ist zwar um 30% größer als bei der kleinen Geschwindigkeit aber dennoch sehr klein verglichen mit der potentiellen Energie. Auch der visuelle Beulverlauf ist, soweit aus den Verformungsbildern entnehmbar, identisch und hier daher nicht dargestellt.

Die hohe Geschwindigkeit mit einer weiteren Steigerung um den Faktor 150 führt letztlich zu einer deutlichen Anhebung der Beullast um mehr als 50%, siehe Bild 8; das Beulen tritt auch bei einer erheblich größeren Verschiebung auf. Bemerkenswert ist, daß keine nennenswerte Steigerung der Nachbeullast gegenüber den kleinen Geschwindigkeiten zu beobachten ist. Zur Durchführung der Berechnung und der Darstellung ist zu bemerken, daß ohne Dämpfung gerechnet wurde und für die Darstellung im Nachbeulbereich ein Filter für die hochfrequenten Anteile eingesetzt wurde. Die Enddeformation nach 5 mm Verschiebung in Bild 8 zeigt ein klares Rautenbild mit deutlicherer Prägung als bei den zu einer sehr viel kleineren Längsverschiebung gehörenden Beulen der impliziten Berechnungen.



15 fache



6 fache



–

Vergößerung der Verschiebungen

Bild 8: Zylinder 1100-AL nur Axiallast: Last-Verschiebungsdiagramm und Deformationsbilder bei  $v = 150 \text{ mm/s}$

Nach diesen Erfahrungen wurden alle weiteren Berechnungen mit der hohen Geschwindigkeit durchgeführt. Die sehr gute Übereinstimmung der „dynamischen“ Nachbeullasten mit den Beullasten der DIN 18800 zeigte sich auch für einen leeren, dünnwandigen Zylinder 1100-IP mit einer künstlichen lokalen Imperfektion. Die dafür berechnete Nachbeullast ist

auch fast identisch mit den Nachbeullasten der beiden anderen dünnwandigen Zylinder mit gemessenen Imperfektionen.

Auch für die Fälle mit gleichförmigen hydrostatischem Innendruck sowie Wasserdruck ergab sich eine sehr gute Übereinstimmung der Nachbeullast mit den Werten nach DIN, die nur für konstanten hydrostatischen Innendruck angegeben sind, siehe Bild 9. Das Beulen geht infolge des Innendrucks, der Zugspannungen hervorruft und die lokalen Imperfektionen in Umfangsrichtung quasi glättet, von den beiden Rändern aus und ist durch größere Beulen im niedrigeren Innendruckbereich gekennzeichnet.

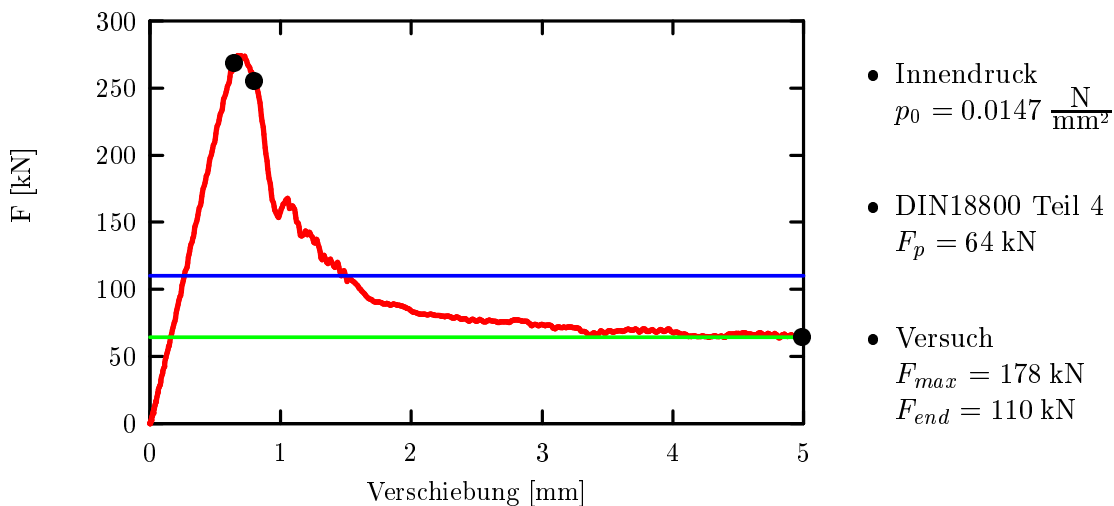
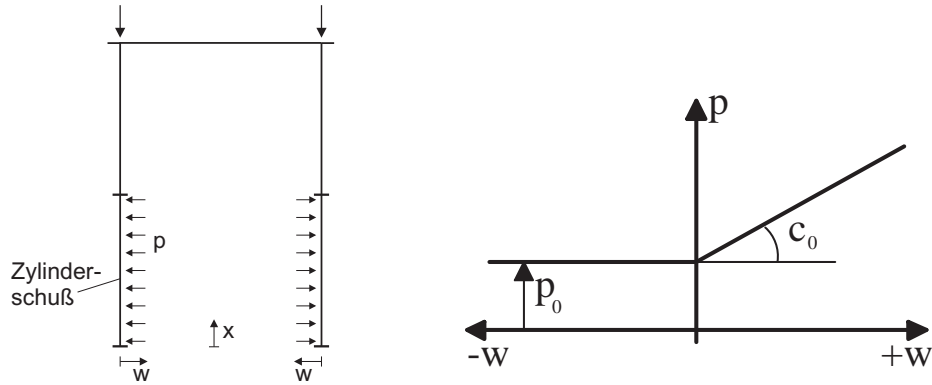


Bild 9: Zylinder 1100–AW, konstanter Innendruck und Axiallast: Last–Verschiebungsdiagramm und Deformationsbilder

## 6 Gleichförmige und ungleichförmige Schüttgutbelastung

Das Verhalten von Schüttgut und Schale ist durch die Interaktion zwischen den beiden Partnern geprägt. Um dies korrekt zu erfassen, wäre es wegen der räumlich stark veränderlichen Packung im Prinzip erforderlich, das stark nichtlineare Verhalten des Schüttguts mit einer räumlichen Finite Element Diskretisierung zu erfassen. Die genaue Beobachtung zeigt aber, daß die Wanddeformationen während des Beulvorgangs sehr klein sind. Damit läßt sich die Interaktion über ein einfaches Spannungs–Verschiebungsgesetz abbilden, das die in Bild 10 angegebene Form annimmt. Die unterschiedlichen Schüttgutmaterialien und deren unterschiedliche Packung machen sich dann nur mit unterschiedlichen Steifigkeiten  $c_0$ , der



**Innendruck:**  $p = p_0(x) + C(w)w$

Bild 10: Interaktionsmodell Schüttgut-Silowandverschiebung für die FE-Simulation

sogenannten Bettung bemerkbar, die im Prinzip räumlich veränderlich sind. Für Verschiebungen nach außen wird angenommen, daß der Innendruck in der Ausgangslage erhalten bleibt. Dies hat sich in verschiedenen Untersuchungen zur genaueren Erfassung der Interaktion [20], [21] bestätigt.

Es sei allerdings bemerkt, daß schon einfacher Sand für unterschiedliche Packdichten abhängig von der Füllung und von der Art der Entleerung Steifigkeitswerte von  $c_{min} = 0,002 \text{ N/mm}^3$  bis  $c_{max} = 0,13 \text{ N/mm}^3$  aufweisen kann. Um diesen Einfluß gesondert zu untersuchen, wurden statische Stabilitätsanalysen, d.h. nichtlineare Berechnungen bis zum ersten Stabilitätspunkt mit Variationen der wesentlichen Interaktionsparameter sowohl mit gleichmäßiger als auch mit ungleichmäßiger Verteilung durchgeführt. Wie zuvor wurde der Innendruck zuerst aufgebracht, dann wurde bei konstantem Innendruck die Axialbelastung erhöht. Bei gleichmäßiger Verteilung zeigte sich erwarteterweise, siehe Bild 11, daß bei niedrigem Innendruckwert  $p_0$  eine geringe Erhöhung der Steifigkeit zu einem anfänglich sehr starken Anheben der Beullast führt, daß bei einem höheren Innendruck sich die Steifigkeitsänderungen nicht so gravierend aber dennoch merkbar auswirken. Die Beullasten liegen aber auch bei steifem Schüttgut und höherem Innendruck nur in der Höhe der klassischen Beullast. Für eine ausführliche Diskussion der Auswirkungen sei auf die Arbeit von Knebel [14] verwiesen, in der auch die unterschiedlichen Wanddickenverhältnisse und die unterschiedlichen Imperfektionen betrachtet und gewertet werden. Die im Versuch beobachteten Beullasten liegen im erwarteten Mittelfeld der Druck- bzw. Steifigkeitsverhältnisse; eine Übereinstimmung zwischen Versuch und Berechnung ist aber wegen der unbekannt

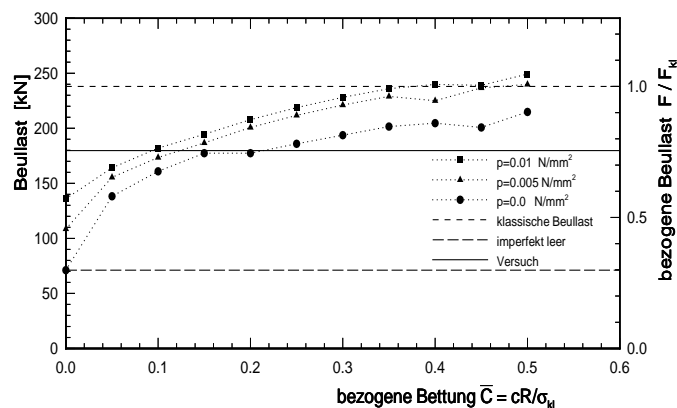


Bild 11: Ergebnisse stat. Stabilitätsuntersuchung bei Variation von Innendruck und Bettung



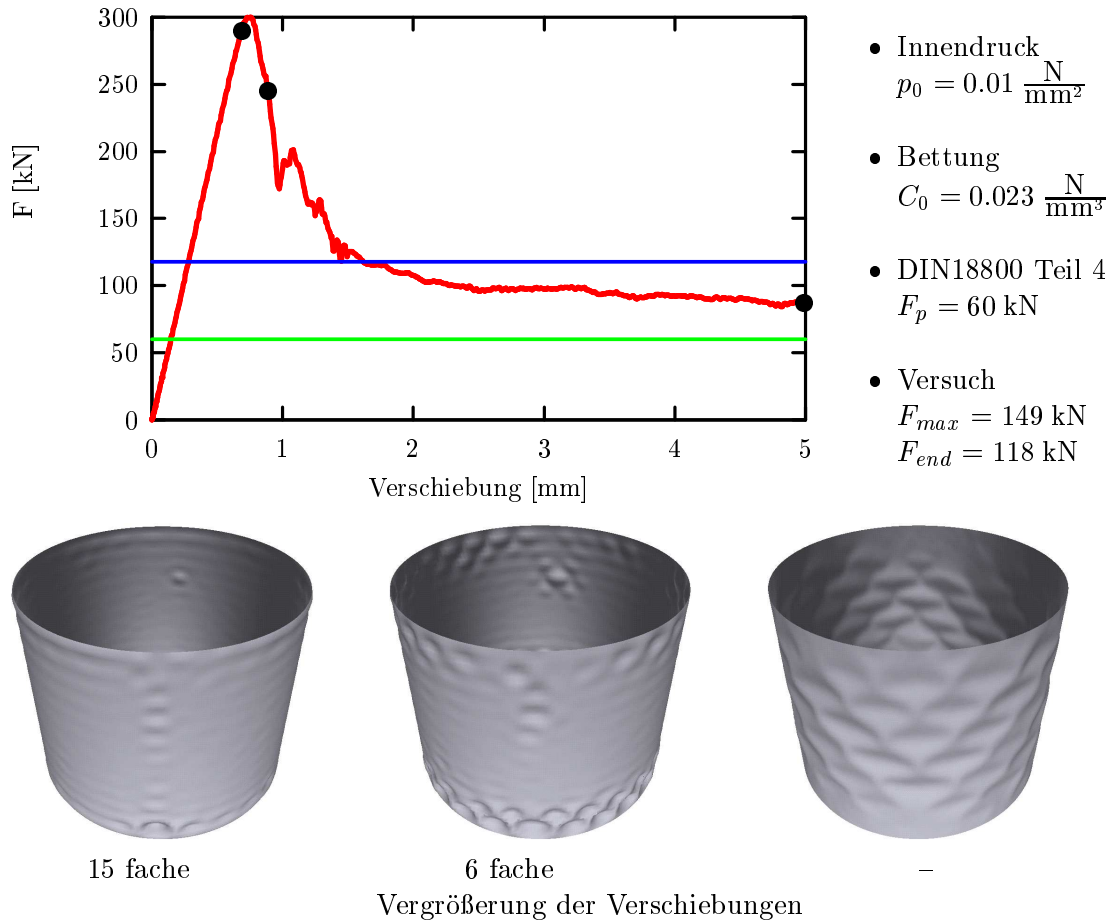


Bild 12: Zylinder 1100–B1, gleichförmige Schüttgutbelastung und Axialdruck: Last–Verschiebungsdiagramm und Deformationsbilder

Packdichte der Schüttgutfüllung und den unbekanntenen Druckwerten im Versuch nicht zu erreichen, auch wenn mit plausiblen Werten gerechnet werden kann.

Sinnvoller für praktische Zwecke d.h. eine Nutzung für den Entwurf erscheint die Überprüfung der Rechenmodelle und die Variation der unbekanntenen Parameter für das Schüttgut mit den genau gemessenen Geometriewerten. Damit lassen sich dann generelle qualitative Kenntnisse gewinnen, insbesondere wenn man sich auf die Betrachtung der Nachbeulwerte transienter Berechnungen beschränkt. Für gleichförmig in Umfangsrichtung und Längsrichtung verteilte Schüttgutparameter ergeben sich neben den in [14] dargestellten Ergebnissen transienter Untersuchungen wieder Nachbeulwerte, die sich in die Ergebnisse für die Zylinder unter ausschließlicher Axialbelastung bzw. Axialbelastung mit Innendruck gut einordnen lassen. Erwarteterweise erhöht sich die Beullast infolge der Steifigkeit des Schüttguts, aber der Nachbeulwert bleibt auch in diesem Fall für einen längeren Verschiebungsweg konstant, siehe Bild 12. Wird der Nachbeulwert mit dem Wert nach DIN 18800 Teil 4 für Axiallast und Innendruck verglichen, so zeigt sich, daß letzterer deutlich unter dem berechneten Wert aus der FE–Simulation bleibt. Eine Variation des gemessenen Imperfektionsbildes in eine beliebige lokale Imperfektion bringt zwar einen deutlich veränderten Verlauf im eigentlichen Beulbereich, aber der letztlich erreichte Nachbeulwert ist wieder fast identisch mit dem für denselben Zylinder mit anderen Imperfektionen berechneten Wert. Der Einfluß der Bettung durch das Schüttgut macht sich auch in der Beulentwicklung im Zylindermantel bemerkbar, siehe Bild 12. Es ergeben sich bei den gemessenen Imperfektionen des Zylinders 1100–B1

zuerst kleine lokale Beulen im Mittelbereich der Schale und am Rande, dann vertiefen sich die Beulen vom Rande her, bis sich schließlich zum Ende des Belastungsvorgangs ein rauhenförmiges Beulmuster einstellt. Deutlich wird, daß das Beulmuster sehr viel hochwelliger ist als ohne Schüttgutfüllung bzw. nur mit Innendruck.

Die Untersuchungen in [14] haben gezeigt, daß sich die Rechenmodelle sehr gut für Abschätzungen des stützenden Einflusses des Schüttguts im Falle ungleichmäßiger Schüttgutfüllung eignen, wie sie infolge Schlot- oder Brückenbildung in realen Silos oft auftritt, siehe Bild 13.

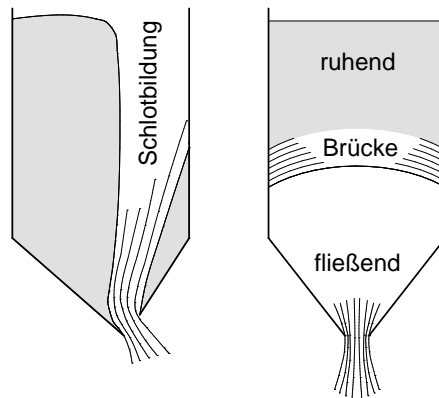


Bild 13: Folge unregelmäßiger Fließzustände

Am Beispiel des dünnwandigen Zylinders 1100-B1 wurden unregelmäßige Belastungszustände untersucht. Hierzu wurde die unregelmäßige Verteilung mittels eines ungleichförmigen Druckbildes modelliert, siehe Bild 14, alternativ wurde zusätzlich eine Bettung im Druckbereich angesetzt, sofern sich eine Verschiebung der Wand nach innen ergab. Die Studien zeigten für die Untersuchungen bei Schlotbildung erwarteterweise, daß die Breite der Störzone mit den Beulwellen und der Höhe der Beullast korreliert ist, siehe z.B. Bild 14. Hier führte eine Störzonenbreite von  $30^\circ$  zu niedrigeren Beullasten wie eine Breite von  $90^\circ$ . Die Beullasten liegen infolge der Imperfektion sogar teilweise unterhalb der Werte für den leeren Zylinder. Für weitere statische Untersuchungen insbesondere auch bei Brückenbildung sei auf die Ergebnisse in [14] verwiesen.

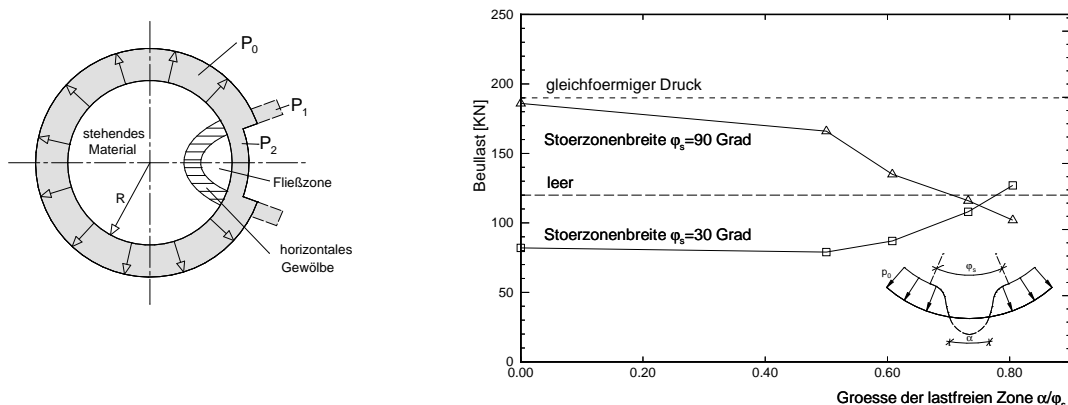
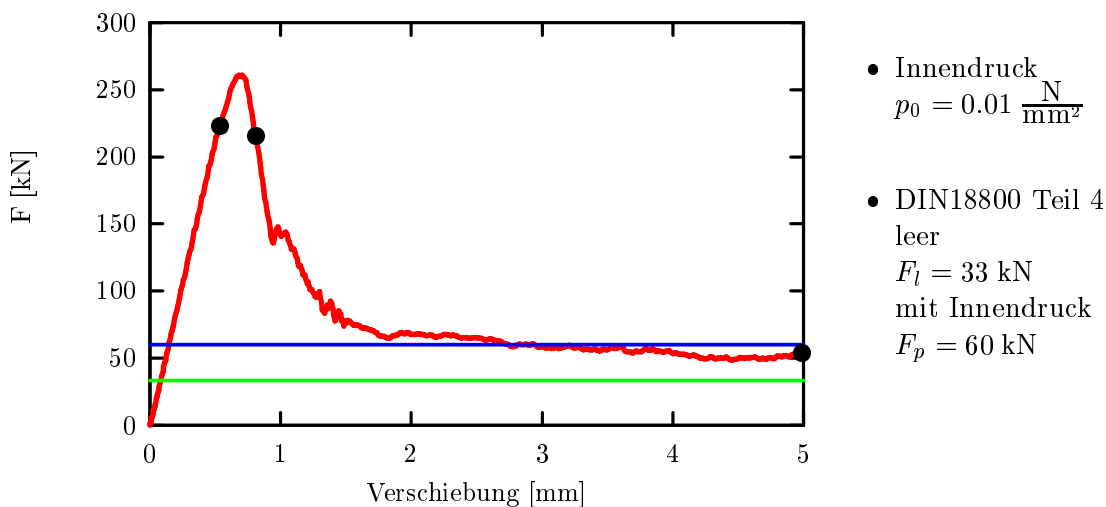


Bild 14: Variation der Schlotausbildung

Die transienten Untersuchungen bei festen Werten für die Innendruckverteilung ergab wieder das bei den vorigen Berechnungen beobachtete Bild. Die Nachbeullast fällt auf einen weitgehend konstanten Wert ab, der deutlich über dem Beulwert nach DIN 18800 für einen

leeren Zylinder liegt, siehe Bild 15. Wird der Druck nur in einem sehr kleinen Bereich der Störzone zu Null gesetzt, so entspricht der Nachbeulwert sogar dem DIN Wert mit gleichförmigem Innendruck. Wird alternativ zusätzlich eine Bettung d.h. eine Steifigkeit  $c_0$  in den Druckbereichen angenommen, so liegt der Nachbeulwert deutlich oberhalb des Beulwertes nach DIN mit Innendruck. D.h. die Annahme eines völlig leeren Zylinders bei Schlotbildung scheint etwas zu konservativ und könnte eventuell durch das Modell einer mit gleichförmigem Innendruck gestützten Schale ersetzt werden. Damit ließe sich auch der Lastfall Schlotbildung bei einer sinnvollen Eingrenzung mit einfachen Mitteln berücksichtigen. Die Entwicklung des Beulbildes geht wie in Bild 15 dargestellt von der lokalen Störung aus, zeigt einen leichten Randeinfluß und breitet sich dann über die ganze Schale aus. Das letzte Beulbild zeigt dann wieder das übliche Rautenmuster, das bei den ausschließlich druckgestützten Schalen niedrigwelliger ist als im Fall zusätzlicher Bettung mit  $c_0$ .



15 fache



6 fache



–

Vergrößerung der Verschiebungen

Bild 15: Zylinder 1100–B1, Schlotbildung  $\varphi = 90^\circ$ ,  $\alpha = 0.8 \times \varphi$  und Axialdruck: Last-Verschiebungsdiagramm und Deformationsbilder

## 7 Zusammenfassung und Ausblick

Die Stabilitätsuntersuchung von schüttgutgefüllten Siloschalen ist stark von der Unsicherheit in den lastbestimmenden und zum Teil auch stützenden Parametern geprägt. Obgleich im Prinzip sehr genaue statische numerische Stabilitätsuntersuchungen mit Finiten Elementen möglich sind, muß aber auch deutlich auf die Grenzen der Möglichkeiten hingewiesen

werden. So lassen sich mit statischen Stabilitätsanalysen nur im Sonderfall für komplexe Schalen vollständige Last-Verschiebungspfade bis hin in den Nachbeulpfad d.h. auch bis hin zu sogenannten Nachbeulminima ermitteln. Die Simulation stößt bei den hier betrachteten axial belasteten Schalen im Regelfall auf außerordentliche numerische Schwierigkeiten, die die Verfahren für praktische Zwecke als nicht empfehlenswert ausweisen. Aussagen über Stabilitätslasten, d.h. maximal aufbringbare Axialbelastungen erscheinen als nicht sehr gesichert, auch wenn mit Hilfe von Parameteruntersuchungen zumindest qualitativ und zum Teil auch quantitativ Einflüsse gut ermittelbar sind.

Als Alternative scheinen für Entwurfszwecke Untersuchungen mit dynamischer Belastung, wie sie mit zeitlich leicht veränderlicher Aufbringung der Axialbelastung hier für Siloschalen mit sehr unterschiedlicher Schüttgutverteilung gezeigt wurden, geeignet. Die damit ermittelten Nachbeullasten geben in vielen Fällen imperfekter Siloschalen gute Hinweise auf tragbare Belastungen, die auch quantitativ abgesichert sind, wie die Vergleiche mit der entsprechenden Norm zeigen. Dies gilt für den gesamten Bereich der im Rahmen der Untersuchungen betrachteten dünnwandigen und mäßig dickwandigen Siloschalen. Beachtenswert ist, daß bei der transienten Berechnung die numerischen Schwierigkeiten nicht mehr vorliegen. Auch bei sehr langsamer Aufbringung läßt sich selbst bei Berücksichtigung von Kontaktbedingungen problemlos Konvergenz erzielen, sofern nicht zu große Lastschritte gewählt werden. Interessant war die Beobachtung, daß sich in den betrachteten Fällen nach einem aufgebrachtten Verschiebungsweg immer ein fast konstanter Nachbeulwert weitgehend unabhängig von der Belastungsgeschwindigkeit einstellte. Bisher durchgeführte Variationen in den Imperfektionsbildern bestätigten diese Beobachtung. Weiterführende Untersuchungen sind derzeit im Gange und sollen zur Beurteilung ähnlich belasteter Strukturen eingesetzt werden.

## 8 Schrifttum

- [1] ANSYS: **Users Manual for Revision 5.3**, Swanson Analysis System Inc., Houston, 1995.
- [2] B. Brendel, E. Ramm: **Linear and Nonlinear Stability Analysis**, *Int. Conference Eng. Application of the F.E. Method*, Oslo, 1979.
- [3] M. Deml, W. Wunderlich: **Direct evaluation of the 'worst' imperfection shape in shell buckling**, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 149, 201-222, 1997.
- [4] DIN 18800 Teil 4: **Stahlbauten, Stabilitätsfälle, Schalenbeulen**, Normenausschuß Bauwesen, Deutsches Institut für Normung e.V., Beuth Verlag GmbH, Berlin, November 1990.
- [5] E.N. Dvorkin, K.J. Bathe: **A continuum mechanics based four node shell element for general nonlinear analysis**, *Eng. Comp.*, 1, 77-88, 1984.
- [6] ECCS: **Buckling of Steel Shells**, *European Recommendations, Fourth Edition, No. 56*, European Convention for Structural Steelwork, 1988.
- [7] H. Gebhardt: **Finite Element Konzepte für schubelastische Schalen**, *Dissertation, Universität Karlsruhe*, 1990.
- [8] J.O. Hallquist: **LS-DYNA Users Manual**, *LSTC report 1007 Rev. 2 Livermore Software Technology Corporation, Livermore, California 1994*.
- [9] R. Hauptmann: **Strukturangepaßte geometrisch nichtlineare Finite Elemente für Flächentragwerke**, *Dissertation, Universität Karlsruhe*, 1997.
- [10] P. Helnwein: **Zur initialen Abschätzbarkeit von Stabilitätsgrenzen auf nichtlinearen Last-Verschiebungspfaden elastischer Strukturen mittels der Methode der Finiten Elemente**, *Dissertation, Technische Universität Wien*, 1996.

- [11] M.W. Hilburger; A.M. Waas; J.H. Starnes Jr.: **Modeling the Dynamic Response and Establishing Post-buckling/Post Snap-Thru Equilibrium via a Transient Analysis**, *Transactions of the ASME*, 64, 590–595, 1997.
- [12] T.J.R. Hughes: **The Finite Element Method**, *Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1987*.
- [13] K. Knebel, U. Peil, U. Schulz, K. Schweizerhof, T. Ummenhofer: **Stabilität von stählernen Silozylinderschalen bei Belastung mit ruhendem und bewegtem Schüttgut**, *SFB 219 Silo Abschlußbericht an die DFG, Universität Karlsruhe, 1997*.
- [14] K. Knebel: **Stabilität von Stahlzylindern mit unilateralen Randbedingungen bei statischer und dynamischer Beanspruchung**, *Dissertation, Universität Karlsruhe, 1997*.
- [15] P. Knödel: **Stabilitätsuntersuchungen an kreiszylindrischen stählernen Siloschüssen**, *Dissertation, Universität Karlsruhe, 1995*.
- [16] W. Krätzig: **Eine einheitliche statische und dynamische Stabilitätstheorie für Pfadverfolgungsalgorithmen in der numerischen Festkörpermechanik**, *Z. angew. Math. Mech* 6:7, 203–213, 1989.
- [17] T. Licht: **Spannungen in dünnwandigen Stahlsilos infolge von Schüttgutbelastung**, *Dissertation, Universität Karlsruhe, 1996*.
- [18] P. Nawrotzki, W. Krätzig, U. Montag: **A unified computational stability concept for conservative and non-conservative shell responses**, *Computers & Structures* 64:1–4, 221–238, 1997.
- [19] E. Riks; C.C. Rankin; F.A. Brogan: **On the solution of mode jumping phenomena in thin-walled shell structures**, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* 136, 59–92, 1996.
- [20] G. Rombach: **Schüttgutbeanspruchungen von Silozellen – Exzentrische Entleerung**, *Dissertation, Universität Karlsruhe, 1991*.
- [21] C. Ruckenbrod: **Dynamische Phänomene bei der Entleerung von Silozellen**, *Universität Karlsruhe 1995*.
- [22] K. Schweizerhof und Mitarbeiter: **FEAP–MeKa**, *Institut für Mechanik, Universität Karlsruhe, 1988–98*. Aufgebaut auf: R.L. Taylor: *A Finite Element Analysis Program, University of California, Berkeley, USA, 1991*.
- [23] Sonderforschungsbereich SFB 219: **Silobauwerke und ihre spezifischen Beanspruchungen. Abschlußbericht an die DFG**, *Universität Karlsruhe, 1997*.
- [24] I. Spohr: **Störenergie-Konzept für den elasto-plastischen Beulsicherheitsnachweis beliebig belasteter Schalen**, *Institut für Statik, Technische Universität Braunschweig, 1998*.
- [25] G. Tranel: **Stabilitätsnachweis beliebiger Schalen mit dem Konzept der Störenergie**, *Dissertation, Technische Universität Braunschweig, 1994*.
- [26] Th. Ummenhofer: **Stabilitätsverhalten imperfekter zylindrischer Stahlsiloschalen – experimentelle und numerische Untersuchungen**, *Dissertation, Universität Karlsruhe, 1996*.
- [27] W. Wagenhuber: **Imperfektionssensitivität und rechnerischer Nachweis der Beulsicherheit dünner Schalen**, *Dissertation, Technische Universität Braunschweig, 1989*.
- [28] W. Wagner: **Zur Behandlung von Stabilitätsproblemen der Elastostatik mit der Methode der Finiten Elemente**, *Forschungs- und Seminarberichte aus dem Bereich Mechanik der Universität Hannover, Bericht F 91/1, 1991*.
- [29] P. Wriggers, W. Wagner, C. Miehe: **A quadratically convergent procedure for the calculation of stability points in finite element analysis**, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 70, 329–347, 1988.
- [30] P. Wriggers, J.C. Simo: **A general procedure for the direct computation of turning and bifurcation points**, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 30, 155–176, 1990.