Prüfung in

Baudynamik

31. Juli 2023

Name: ..... Vorname: .....

Matr.-Nr: ..... Studiengang: .....

Hinweise:

- Bitte schreiben Sie deutlich lesbar. Zeichnungen müssen sauber und übersichtlich sein. Die Benutzung roter und grüner Farbstifte ist nicht zugelassen.
- Aufgaben werden nur beurteilt, wenn sie auf den ausgegebenen Blättern gelöst sind. Eventuell abgegebene Formelsammlungen werden als nicht vorhanden betrachtet. Trennen Sie die Aufgabenblätter nicht auf.
- Bei den Aufgaben muss eindeutig der Lösungsweg erkennbar sein. Ein Ergebnis ohne Lösungsweg wird nicht bewertet. Sollten für eine Aufgabe mehrere widersprüchliche Lösungen angegeben sein, so wird keine bewertet. Streichen Sie deshalb falsche Rechenschritte oder Zeichnungen durch.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite.

Aufgabe	1	2	3	$\sum$
Punkte				
Korrektur				

(Eintrag erfolgt durch Institut)

1. Aufgabe: (ca. 15 % der Gesamtpunkte)

a) Zeichnen Sie das Amplitudenspektrum einer periodischen und einer nicht-periodischen Schwingung. Erläutern Sie den Unterschied.

b) Skizzieren Sie die Vergrößerungsfunktion für eine Fundamentanregung $V_2(\eta, D)$ für schwache Dämpfung. Zeigen Sie dabei den Einfluss von D auf die Vergrößerungsfunktion auf.

c) Erläutern Sie den Begriff „Schwingungsabschirmung“ und benennen Sie ein Beispiel.

d) Es liegt folgendes Modell eines gedämpften, fremderregten Schwingers vor.

$$m\ddot{x} + d\dot{x} + kx = F_0 \cos(t)$$

Die Lösung besteht aus einem homogenen und einem partikulären Anteil. Erläutern Sie diese Anteile. Begründen Sie, welcher Anteil für baudynamische Aspekte von höherer Relevanz ist.

e) Wie kann die niedrigste Eigenfrequenz eines Systems ohne Aufstellung des Eigenwertproblems der Koeffizientenmatrix des Systems, abgeschätzt werden (Formel und Benennung der Variablen)?

f) Die Dämpfungsmatrix eines frei schwingenden Systems mit zwei Freiheitsgraden hat die Form

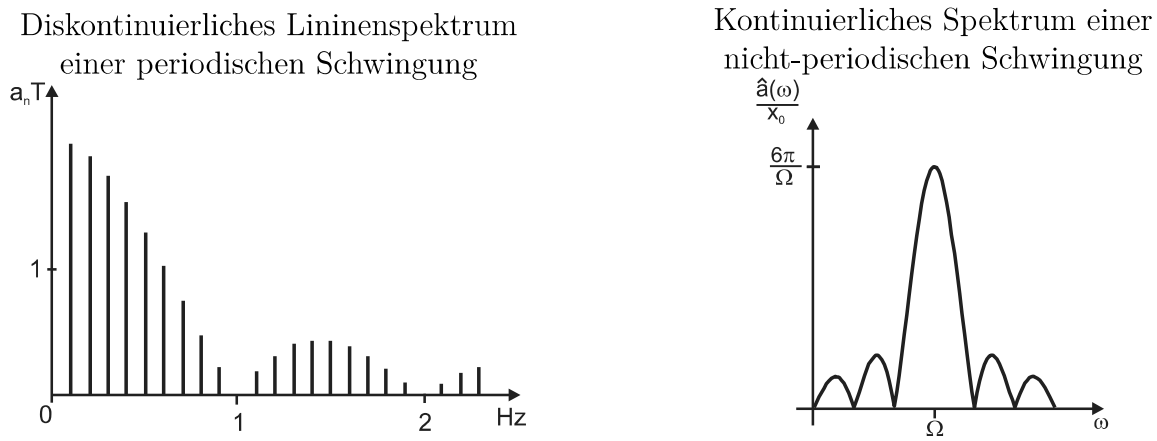
$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} d & 0 \\ -d & d \end{bmatrix}$$

mit $d > 0$. Ist das System vollständig gedämpft? Begründen Sie ihre Antwort kurz.

g) Nennen Sie drei Möglichkeiten der Schwingungsreduzierung bzw. -vermeidung.

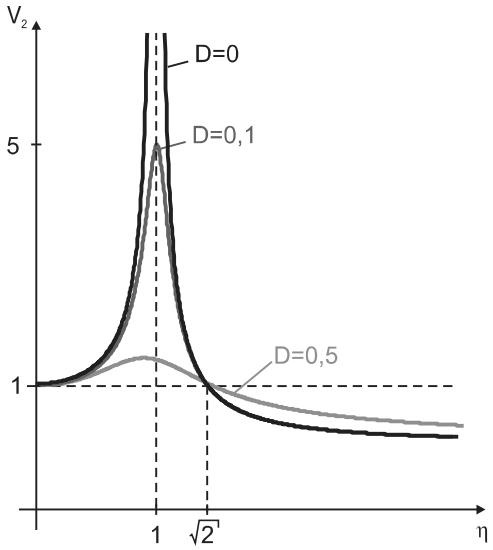
Musterlösung - Aufgabe 1

a)



Beispielhafte Abbildungen für Amplitudenspektren einer periodischen (links) und nicht-periodischen (rechts) Schwingung aus Skriptum „Grundlagen der Baudynamik“

b)



Vergrößerungsfunktion einer Fundamentanregung

c) Unter Abschirmung versteht man die Aufgabe, die Fortpflanzung von Schwingungen von einem Bauteil auf ein anderes zu verhindern oder zumindest so klein wie möglich zu halten. Dabei ergebenen sich zwei Aufgabentypen, zum einen die Abschirmung von Maschinen vom Restbauwerk zum anderen die Abschirmung eines Bauwerks vom bewegten Boden.

d) Der homogene Anteil dämpft sich nach der Einschwingphase raus und es verbleibt der stationäre Anteil.

- homogener Anteil: Eigenschwingung
- partikulärer Anteil: Stationäre Lösung

e) Durch den Rayleighquotienten mit

$$\boldsymbol{R} = \frac{\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}\boldsymbol{\varphi}}{\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\boldsymbol{\varphi}} \geq \boldsymbol{\omega}_1^2$$

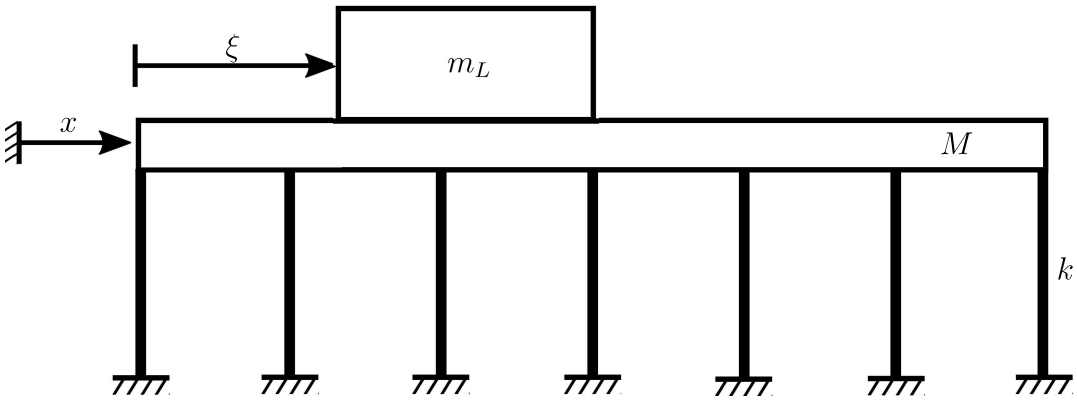
mit $\boldsymbol{\varphi}$ als Schätzwert für den ersten Eigenvektor.

- $\mathbf{K}$ - Steifigkeitsmatrix,
- $\mathbf{M}$ - Massenmatrix,
- $\boldsymbol{\omega_1}$ - niedrigste analytische Eigenfrequenz

f) $\det(\mathbf{D}) = d^2 > 0 \rightarrow \mathbf{D}$ ist positiv definit bzw. hat den vollen Rang. Somit liegt vollständige Dämpfung vor.

g) - Erhöhung der Dämpfung bzw. Hinzufügen von Dämpfelementen
- Über- bzw. unterkritische Abstimmung des Bauteils/Gebäude
- Hinzufügen eines Tilgers

2. Aufgabe: (ca. 35 % der Gesamtpunkte)



Eine Lokomotive wird auf einer Brücke plötzlich stark abgebremst. Um die horizontale Belastung des Brückentragwerks infolge des Abbremsvorgangs abschätzen zu können, soll das dargestellte mechanische Ersatzmodell betrachtet werden.
Die Brücke wird als starrer Körper (Masse M) modelliert, wobei in horizontaler Richtung die Gesamtersatzfedersteifikeit k angenommen wird. Hierbei misst die Koordinate x die Auslenkung aus der statischen Ruhelage bezüglich eines Inertialsystems. Die Bewegung der Lokomotive (Masse m_L) relativ zur Brücke wird mit Hilfe der Koordinate ξ erfasst. Der Bremsvorgang soll mit konstanter Verzögerung im Zeitintervall $[0, T_B]$ bis zum Stillstand erfolgen, wobei die Lokomotive zu Beginn des Abbremsens die Geschwindigkeit $v(t = 0) = v_0$ hat. Außerdem gilt $\xi(t = 0) = 0$ und $\dot{x}(t = 0) = 0$.
Gegeben: M, m_L, k, v_0, $v(t = 0) = v_0$, T_B, $\xi(t = 0) = 0$, $\dot{x}(t = 0) = 0$

a) Leiten Sie die Bewegungsgleichung her, die den Abbremsvorgang beschreibt.

b) Um welche Art der Erregung handelt es sich?

c) Wie lautet die vollständige Lösung der vorliegenden DGL für $t \geq 0$?

d) Skizzieren Sie den Lösungsverlauf im Intervall $t \in [0, 2\,T_B]$ qualitativ.

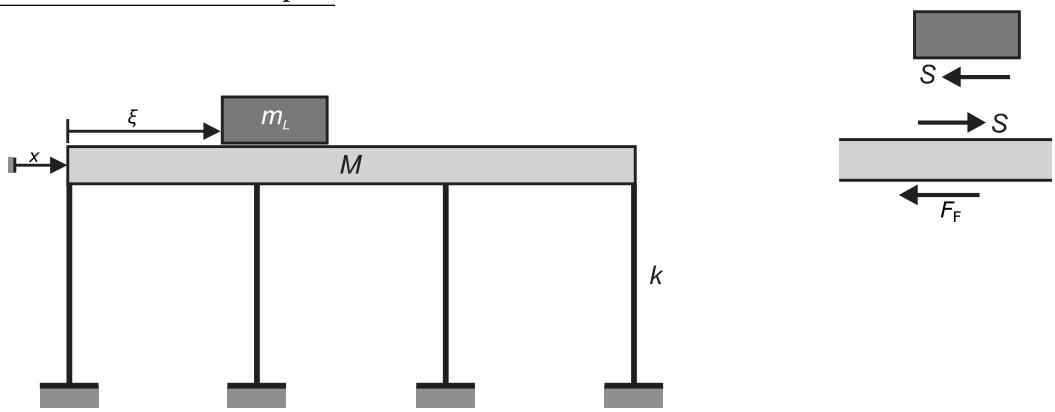
Musterlösung - Aufgabe 2

a) Abbremsvorgang mit konstanter Verzögerung: $a_0 = \ddot{\xi}$
$\Rightarrow$ linearer Geschwindigkeitsverlauf: $v(t) = a_0\, t + c$

Somit gilt:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(0) &= c = v_0 \\ \dot{\xi}(T_B) &= 0 = a_0\, T_B + v_0 \\ \Rightarrow a_0 &= -\frac{v_0}{T_B} = \ddot{\xi} \end{aligned} \tag{1}$$

<u>Freischnitt beider Teilkörper:</u>



<u>Impulsbilanz:</u>
Lokomotive:

$$\begin{aligned} \sum F_x &= m_L\,(\ddot{x} + \ddot{\xi}) \\ -S &= m_L\,(\ddot{x} + \ddot{\xi}) \qquad \text{mit (1)} \\ \Rightarrow -S &= m_L\,(\ddot{x} + -\frac{v_0}{T_B}) \end{aligned} \tag{2}$$

Brücke:

$$\begin{aligned} \sum F_x &= M\,\ddot{x} \\ S - F_\mathrm{F} &= M\,\ddot{x} \\ \Rightarrow S &= M\,\ddot{x} + k\,x \text{ mit } F_\mathrm{F} = k\,x \end{aligned} \tag{3}$$

Aus (2) + (3) ergibt sich:

$$\begin{aligned} -S + S &= m_L\,(\ddot{x} + -\frac{v_0}{T_B}) + M\,\ddot{x} + k\,x \\ (M + m_L)\,\ddot{x} + k\,x &= m_L\,\frac{v_0}{T_B} \end{aligned}$$

bzw.

$$\ddot{x} + \omega_0^2\, x = \frac{m_L}{M+m_L}\,\frac{v_0}{T_B}$$
$$\text{mit } \omega_0^2 = \frac{k}{M+m_L}$$

Bewegungsgleichung:

$$\ddot{x} + \omega_0^2\, x = \begin{cases} \frac{m_L}{M+m_L}\,\frac{v_0}{T_B} & \text{für } t \in [0, T_B] \quad \text{(Bremsvorgang)} \\ 0 & \text{für } t > T_B \quad \text{(freie Schwingung nach Stillstand der Lokomotive)} \end{cases}$$

b) Bei der Erregung handelt es sich um einen $\Rightarrow$ Rechteckstoß:

c) Die Lösung muss in zwei Zeitbereichen betrachtet werden:
<u>Bereich I:</u> $t \in [0, T_B]$:

Gesamtlösung:

$$x_0(t) = x_{0\,h}(t) + x_{0\,p}(t)$$

Ansätze für homogene und partikuläre Lösung:

$$x_{0\,h}(t) = A_0\, \cos(\omega_0 t) + B_0\, \sin(\omega_0 t)$$
$$x_{0\,p}(t) = c_0 = \text{const. (Ansatz vom Typ der rechten Seite)}$$

Ansatz für $x_{0\,p} = c_0$ einsetzen:

$$\underbrace{\ddot{c}_0}_{=0,\text{ da const.}} + \omega_0^2\, c_0 = \frac{m_L}{M+m_L}\,\frac{v_0}{T_B}$$
$$c_0 = \frac{m_L}{k}\,\frac{v_0}{T_B} \quad \text{mit } \omega_0^2 = \frac{k}{M+m_L}$$

$$\Rightarrow x_0(t) = c_0 + A_0\, \cos(\omega_0 t) + B_0\, \sin(\omega_0 t)$$

Anfangsbedingungen ($x(t=0) = 0$ & $x(\dot{t=0}) = 0$) einsetzen:

$$x_0(0) = 0 = c_0 + A_0 \qquad \Rightarrow A_0 = -\frac{m_L}{k}\,\frac{v_0}{T_B}$$
$$\dot{x}_0(0) = 0 = -B_0\omega_0 \qquad \Rightarrow B_0 = 0$$
$$\Rightarrow x_{0\,h}(t) = \frac{m_L}{k}\,\frac{v_0}{T_B}\, \cos(\omega_0 t)$$

Lösung für Bereich I:

$$\Rightarrow x_0(t) = (1 - \cos(\omega_0 t))\frac{m_L}{k}\,\frac{v_0}{T_B}$$

<u>Bereich II:</u> $t > T_B$:

Gesamtlösung:

$$x_1(t) = x_{h\,1}(t) + x_{p\,1}(t)$$

Ansätze:

$$\begin{aligned} x_{h\,1}(t) &= A_1\,\cos(\omega_0 t) + B_1\,\sin(\omega_0 t) \\ x_{p\,1}(t) &= 0,\ \text{Typ d. rechten Seite} \end{aligned}$$

Koordinatentransformation:

$$\begin{aligned} t = \tau + T_B &\Rightarrow \tau = t - T_B \\ &\Rightarrow x_1(t) = \hat{x}_1(\tau) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{x}_1(\tau) &= \hat{A}_1\,\cos(\omega_0\tau) + \hat{B}_1\,\sin(\omega_0\tau) \\ \dot{\hat{x}}_1(\tau) &= -\hat{A}_1\omega_0\,\sin(\omega_0\tau) + \hat{B}_1\omega_0\,\sin(\omega_0\tau) \end{aligned}$$

Übergangsbedingungen zwischen Bereich I & II:

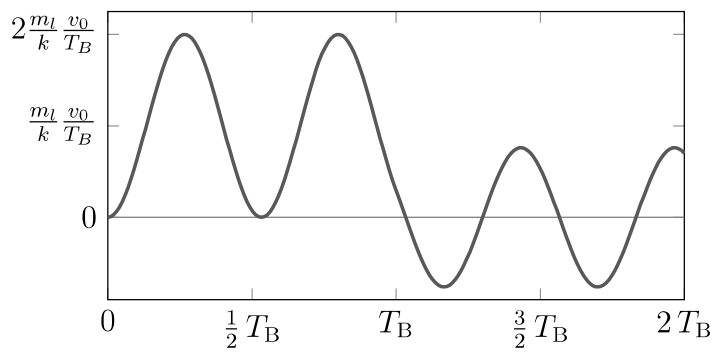
$$x_0(T_B) = \hat{x}_1(\tau = 0) \Rightarrow (1 - \cos(\omega_0 T_B))\frac{m_L}{k}\,\frac{v_0}{T_B} = \hat{A}_1$$

$$\begin{aligned} &\dot{x}_0(T_B) = \dot{\hat{x}}_1(\tau = 0) \Rightarrow \frac{m_L}{k}\,\frac{v_0}{T_B}\omega_0\,\sin(\omega_0 T_B) = \hat{B}_1\omega_0 \\ &\Rightarrow \hat{B}_1 = \frac{m_L}{k}\,\frac{v_0}{T_B}\,\sin(\omega_0 T_B) \end{aligned}$$

Lösung für Bereich II:

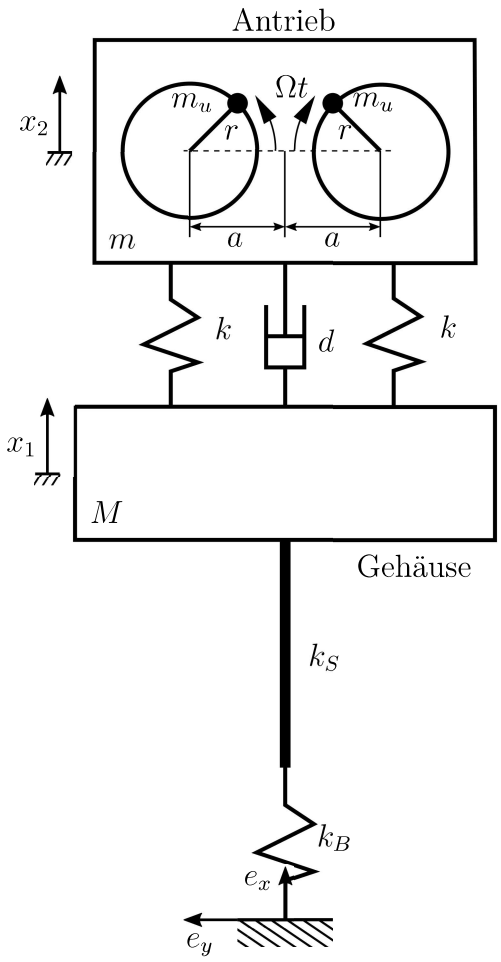
$$\Rightarrow x_1 = \left(1 - \cos(\omega_0 T_B))\frac{m_L}{k}\,\frac{v_0}{T_B}\right)\cos(\omega_0(t - T_B)) + \frac{m_L}{k}\,\frac{v_0}{T_B}\,\sin(\omega_0 T_B)\,\sin(\omega_0(t - T_B))$$

d) <u>Skizze:</u>



3. Aufgabe: (ca. 50% der Gesamtpunkte)

Es soll ein Vibrationsbär betrachtet werden, der mittels Schwingungen ein Rammgut in den Boden treibt. Im Antrieb laufen zwei Unwuchten (Massen jeweils m_u, Unwuchtradien r) mit konstanter Winkelgeschwindigkeit Ω gegenläufig um. Der Antrieb (Masse m ohne Unwuchtmassen m_u) ist mit Hilfe zweier Federn (jeweils Steifigkeit k) sowie eines Dämpfers (Dämpfungskonstante d) mit dem Gehäuse (Masse M ohne Antrieb) verbunden. Das Gehäuse des Vibrationsbärs ist mit dem in den Boden zu verbringenden Rammgut fest verbunden. Als Rammgut wird eine Spundwand betrachtet, welche als fest mit dem Boden (Gesamtsteifigkeit k_B) verbunden angenommen werden soll. Die Spundwand wird als elastischer Stab mit E-Modul E, Querschnittsfläche A und Länge l betrachtet. Die Koordinaten x_1 und x_2 beschreiben die Auslenkung des Antriebs und des Gehäuses aus der Ruhelage. Die Erdanziehung wird vernachlässigt. Das System sei schwach gedämpft $0 < D < 1$.



a) Geben Sie die Ersatzfedersteifigkeit der Spundwand $k_S = k_S(E, A, l)$ an.
Gegeben: E, A, l.

Im Folgenden soll mit $k_S = 5k$ weitergerechnet werden.
Gegeben: $m, M = m$, $m_u = m$, r, k, $k_B = k$, $k_S = 5k$, d, Ω, a.

b) Wie viele Freiheitsgrade hat das System?

c) Geben Sie den Orts- und Geschwindigkeitsvektor der linken Unwuchtmasse an. Nutzen Sie dabei das gegebene Koordinatensystem.

d) Geben Sie die kinetische und potentielle Energie sowie die Rayleigh-Dissipationsfunktion des Systems an.

e) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung des Systems für kleine Auslenkungen aus der Ruhelage und stellen Sie diese in der Form

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{F}$$

dar.

f) Bestimmen Sie die Eigenkreisfrequenzen und Modalvektoren des ungedämpften Systems.

g) Ist das System durchdringend gedämpft? Begründen Sie Ihre Antwort.

Im Weiteren soll das ungedämpfte System betrachtet werden ($d = 0$). Es soll davon ausgegangen werden, dass die zugehörigen Bewegungsgleichungen wie folgt

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 3m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{17}{6}k & -2k \\ -2k & 2k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2m\Omega^2 r \end{bmatrix} \cos(\Omega t)$$

lauten.

h) Bestimmen Sie die Schwingungsamplitude der erzwungenen Schwingungen für den stationären Fall.

Musterlösung - Aufgabe 3

a) $k_s = \frac{EA}{l}$

b) Zwei Freiheitsgrade ($\mathbf{q} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$)

c) <u>Orts-& Geschwindigkeitsvektor für die Unwuchtmasse:</u>

$$\mathbf{x}_u = \begin{bmatrix} x_2 + \sin(\Omega t) r \\ \cos(\Omega t) r \end{bmatrix} \quad \dot{\mathbf{x}}_u = \begin{bmatrix} \dot{x}_2 + r\Omega\cos(\Omega t) \\ -r\Omega\sin(\Omega t) \end{bmatrix}$$

d) <u>Kinetische Energie:</u>

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}M\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 + 2\cdot\frac{1}{2}m_u|\dot{\mathbf{x}}_u|^2 \\
T &= \frac{1}{2}M\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 + m_u[(\dot{x}_2 + r\Omega\cos(\Omega t))^2 + r^2\Omega^2\sin^2(\Omega t)] \\
T &= \frac{1}{2}M\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 + m_u[\dot{x}_2^2 + 2r\Omega\dot{x}_2\cos(\Omega t) + r^2\Omega^2\left(\sin^2(\Omega t) + \cos^2(\Omega t)\right)] \\
T &= \frac{1}{2}M\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 + m[\dot{x}_2^2 + 2r\Omega\dot{x}_2\cos(\Omega t) + r^2\Omega^2] \\
T &= \frac{1}{2}M\dot{x}_1^2 + m[\frac{3}{2}\dot{x}_2^2 + 2r\Omega\dot{x}_2\cos(\Omega t) + r^2\Omega^2]
\end{aligned}$$

<u>Potentielle Energie:</u>

$$\begin{aligned}
V &= 2\cdot\frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2}k_{ges}x_1^2 \\
k_{ges}: \quad \frac{1}{k_{ges}} &= \frac{1}{k_S} + \frac{1}{k_B} = \frac{k_B + k_S}{k_B k_S} \\
\Rightarrow k_{ges} &= \frac{k_B k_S}{k_B + k_S} = \frac{5k^2}{6k} = \frac{5}{6}k
\end{aligned}$$

<u>Rayleigh-Dissipationsfunktion:</u>

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)^2 d$$

d) <u>Lagrange-Funktion:</u>

$$L = T - V$$

<u>Lagrange-Gleichungen 2. Art:</u>

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_i}$$

mit

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$\underline{q_1 = x_1:}$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial L}{\partial q_1} &= -\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_1} \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} &= m\dot{x}_1 \;\Rightarrow\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = m\ddot{x}_1 \\
\frac{\partial L}{\partial q_1} &= 2k(x_2 - x_1) - x_1 k_{ges} \\
\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_1} &= -(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)d
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow m\ddot{x}_1 - d(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + \frac{5}{6}kx_1 - 2k(x_2 - x_1) = 0$$

$\underline{q_2 = x_2:}$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial L}{\partial q_2} &= -\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_2} \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} &= 3m\dot{x}_2 + 2r\Omega m\cos(\Omega t) \\
\Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} &= 3m\ddot{x}_2 - 2r\Omega^2 m\sin(\Omega t) \\
\frac{\partial L}{\partial q_2} &= -2k(x_2 - x_1) \\
\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_2} &= (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)d
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow 3m\ddot{x}_2 + d(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + 2k(x_2 - x_1) = 2r\Omega^2 m\sin(\Omega t)$$

Das Gleichungsystem ergibt sich damit zu:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 3m \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix}}_{\ddot{\mathbf{q}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} d & -d \\ -d & d \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{q}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{17}{6}k & -2k \\ -2k & 2k \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{q}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 2r\Omega^2 m\sin(\Omega t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{F}}$$

e) <u>Eigenwertproblem ($d = 0$):</u>

$$\begin{aligned}
0 &= \det\left(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}\right) \\
&= \det\begin{bmatrix} \frac{17}{6}k - \omega^2 m & -2k \\ -2k & 2k - 3\omega^2 m \end{bmatrix} \\
&= \left(\frac{17}{6}k - \omega^2 m\right)\left(2k - 3\omega^2 m\right) - 4k^2 \\
&= \frac{34}{6}k^2 - \omega^2\left(2km + \frac{3\cdot 17}{6}km\right) + 3\omega^4 m^2 - 4k^2 \\
&= \frac{17}{3}k^2 - \omega^2\left(2km + \frac{17}{2}km\right) + 3\omega^4 m^2 - 4k^2 \\
&= \omega^4 - \omega^2\left(\frac{7}{2}\frac{k}{m^4}\right) + \frac{5}{9}\frac{k^2}{m^2}
\end{aligned}$$

Eigenwerte (mittels pq-Formel):

$$\Rightarrow \quad \omega_1^2 = \frac{1}{6}\frac{k}{m} \qquad \omega_2^2 = \frac{10}{3}\frac{k}{m}$$

Eigenvektoren:

$$\mathbf{v}_i = \begin{bmatrix} 1 \\ \kappa_i \end{bmatrix} \qquad \text{mit} \qquad \kappa_i = -\frac{k_{11} - \omega_i^2 m_{11}}{k_{12} - \omega_i^2 m_{12}}$$

$$\kappa_1 = \frac{4}{3} \qquad \kappa_2 = -\frac{1}{4}$$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{4}{3} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

g) Überprüfung der Definitheit:

$$\det(\mathbf{D}) = 0$$

$\Rightarrow$ **D** is positiv (kann aus Herleitung über Rayleigh-Dissipationsfunktion gesagt werden - nicht gefragt) semi-definit. Suche Vektor **v**, sodass gilt:

$$\mathbf{D}\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

z.B. $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Überprüfung der Kolliniearität zu Eigenvektoren:

$$\mathbf{v} \neq c\mathbf{v}_i \qquad \text{mit} \qquad c \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ System ist durchdringend gedämpft.

h) Ansatz vom Typ der rechten Seite:

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{a}\cos(\Omega t)$$

Die Beschleunigung ergeben sich aus der 2-fachen zeitlichen Ableitung zu:

$$\ddot{\mathbf{q}}(t) = -\Omega^2 \mathbf{a}\cos(\Omega t)$$

Einsetzen in Gleichungsystem liefert:

$$\left(\mathbf{K} - \Omega^2\mathbf{M}\right)\mathbf{a}\cos(\Omega t) = \mathbf{F}\cos(\Omega t)$$

Aus einem Koeffizientenvergleich folgt:

$$\left(\mathbf{K} - \Omega^2\mathbf{M}\right)\mathbf{a} = \mathbf{F}$$

Das Gleichungsystem kann mit Hilfe der Cramer'schen Regel gelöst werden:

$$a_1 = \frac{Z_1}{N} \qquad a_2 = \frac{Z_2}{N}$$

mit

$$
\begin{aligned}
N &= \det\left(\mathbf{K} - \Omega^2\mathbf{M}\right) \\
N &= \det\begin{bmatrix} \frac{17}{6}k - \Omega^2 m & -2k \\ -2k & 2k - 3\Omega^2 m \end{bmatrix} \\
N &= \left(\frac{17}{6}k - \Omega^2 m\right)\left(2k - 3\Omega^2 m\right) - 4k^2 \\
N &= \frac{5}{3}k^2 - \frac{21}{2}km\Omega^2 + 3m^2\Omega^4
\end{aligned}
$$

$$
Z_1 = \begin{vmatrix} 0 & -2k \\ 2r\Omega^2 m & 2k - 3\Omega^2 m \end{vmatrix} = -4kmr\Omega^2
$$

$$
Z_2 = \begin{vmatrix} \frac{17}{6}k - \Omega^2 m & 0 \\ -2k & 2r\Omega^2 m \end{vmatrix} = \frac{17}{3}mkr\Omega^2 - 2m^2 r\Omega^2
$$