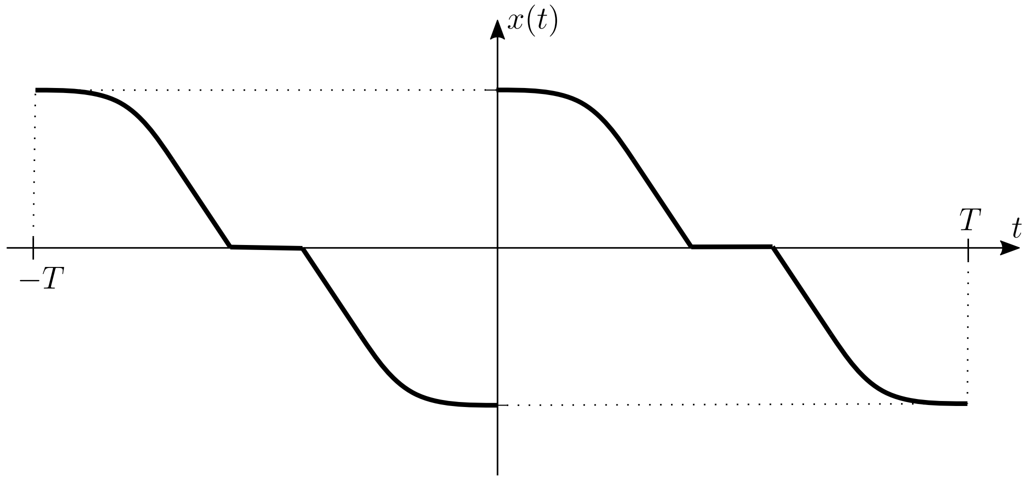
Institut für Mechanik	Prüfung in
Prof. Dr.-Ing. habil. P. Betsch	Baudynamik
Prof. Dr.-Ing. habil. Th. Seelig	01. August 2022

1. Aufgabe: (ca. 10 % der Gesamtpunkte)

a) Sind die Eigenvektoren, die die Eigenschwingungen eines dynamischen Systems charakterisieren, eindeutig festgelegt? Begründen Sie ihre Antwort kurz.

b) Wie ist die Rayleigh-Dissipationsfunktion im Zusammenhang mit schwach gedämpften, freien Schwingungen von Mehr-FHG-Systemen definiert und wie geht sie in die Energiebilanz ein?

c) Gegeben sei die unten dargestellte T-periodische Funktion $x(t)$, d.h. $x(t+T) = x(t)$. Erläutern Sie *ohne Rechnung* welche Fourierkoeffizienten bei einer Fourierreihennäherung verschwinden und welche nicht. *Die Funktion ist für alle reellen Zahlen definiert, aber nur für das Intervall* $[-T, T]$ *abgebildet.*



Musterlösung - Aufgabe 1

a) Nein. Je Eigenvektor eines dynamischen Systems kann ein Wert frei gewählt werden. Die Richtung der Eigenvektoren ist also eindeutig während ihre Norm unbestimmt bleibt.

Die Ursache liegt in der Bedingung zur Bestimmung der Eigenwerte. Das Verschwinden der Determinante der Koeffizientenmatrix deutet einen Rangabfall an.

Alternative Begründung:

Die Gleichung des Eigenwertproblems

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v}$$

kann mit skalaren Werten durchmultipliziert werden, d.h. auch Vielfache von Eigenvektoren ($\lambda \boldsymbol{v}$) sind Eigenvektoren des Systems.

b) Die Rayleigh-Dissipationsfunktion ist definiert als

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\dot{\boldsymbol{q}}$$

wobei $\boldsymbol{D}$ die symmetrische Dämpfungsmatrix ist. Für die zeitliche Änderung der Gesamtenergie gilt

$$\begin{aligned}\dot{E} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(T+V) = \dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{q}) = -\dot{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\dot{\boldsymbol{q}} \\ &= -2\,\mathcal{D}\end{aligned}$$

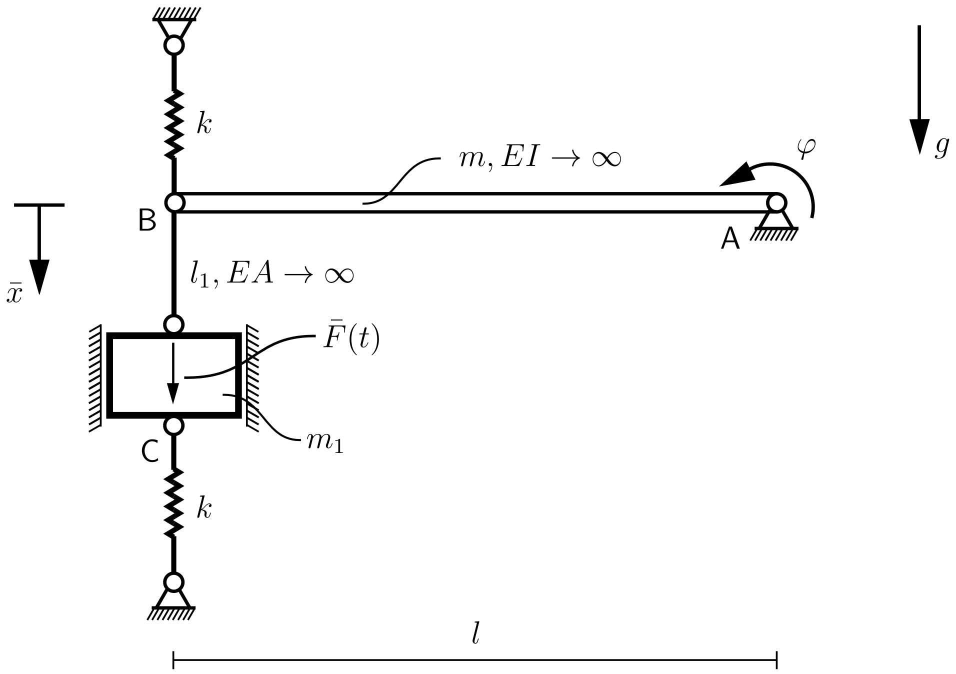
c) Die Funktion $x(t)$ ist eine ungerade Funktion. Daraus folgt, dass die Koeffizienten vor Kosinusanteilen verschwinden. Aus Anschauung oder durch ähnliche Argumentation verschwindet auch der Mittelwert.

$$\begin{aligned}C_k &= 0 \\ a_0 &= 0\end{aligned}$$

Koeffizienten vor Sinus-Termen verschwinden im Allgemeinen nicht:

$$S_k \neq 0$$

2. Aufgabe: (ca. 40 % der Gesamtpunkte)



Der in Punkt A drehbar gelagerte, starre Balken der Länge l sei über einen starren, masselosen, vertikalen Stab der Länge l_1 in Punkt B mit der Punktmasse m_1 verbunden. In den Punkten B und C sind zwei Federn der Federsteifigkeit k angeschlossen. Auf die Punktmasse m_1 wirkt zudem die zeitabhängige Belastung

$$\bar{F}(t) = F(t)\left(\frac{m}{3} + m_1\right) = (8\bar{x}_0\cos(5\Omega t) + 6\bar{x}_0\sin(5\Omega t))\left(\frac{m}{3} + m_1\right)$$

Gegeben:
$m = 30\,\text{kg}$, $m_1 = 20\,\text{kg}$, $k = 150.000\pi^2\,\frac{\text{N}}{\text{m}}$, $g = 9,81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, $l > 1\text{m}$, l_1

Bearbeiten Sie folgende Teilaufgaben:

a) Wie viele Freiheitsgrade hat das System?

b) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung(en) des Systems für kleine Auslenkungen $\bar{x}$ mit Hilfe der synthetischen Methode.

c) Bestimmen Sie die statische Ruhelage des Systems für $\bar{F}(t) = 0$. Ist die Annahme kleiner Auslenkungen unter den gegebenen Parametern (m, m_1, k, l) gerechtfertigt? Begründen Sie Ihre Antwort.

d) Führen Sie eine Koordinatentransformation $\bar{x} \to x$ in die Koordinate x um die statische Ruhelage durch und berechnen Sie die Eigenkreisfrequenz(en) des Systems.

e) Ermitteln Sie die Periodendauer T_0 sowie die Eigenfrequenz f_0 des Systems.

f) Bestimmen Sie die Koeffizienten der Fourierreihe der gegebenen äußeren Belastung $F(t)$ für die Periodendauer $\tilde{T} = \frac{2\pi}{\Omega}$. Stellen Sie anschließend das einseitige Amplitudenspektrum im Bereich $[0,\ 10\Omega]$ in Abhängigkeit der Kreisfrequenz Ω grafisch dar.

Bitte gehen Sie im Folgenden von der Bewegungsgleichung unter Vernachlässigung der äußeren Belastung aus:

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$$

g) Transformieren Sie die Bewegungsgleichung in die Eigenzeit τ und normieren Sie die Differentialgleichung.

h) Bestimmen Sie die Lösung $x(\tau)$ der Bewegungsgleichung in Eigenzeit für die Anfangsbedingungen $x(\tau = 0) = -\frac{(\frac{m}{2}+m_1)g}{2k}$ und $x'(\tau = 0) = 0$. Welche spezielle Bewegung wird durch diese Anfangsbedingungen beschrieben? Begründen Sie Ihre Antwort unter Zuhilfenahme der Ergebnisse aus Aufgabenteil c).

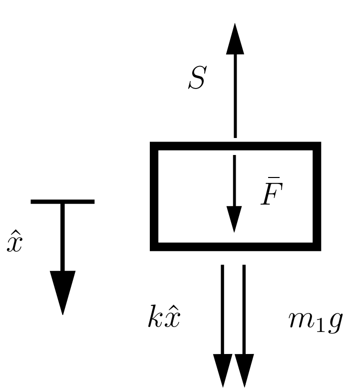
Musterlösung - Aufgabe 2

a) Anzahl Freiheitsgrade

$$\hat{x}(t) = l\sin(\varphi(t)) - l_1 = \hat{x}(\varphi(t)) \rightarrow 1\text{Freiheitsgrad}$$

b) Bewegungsgleichung (d'Alembert)

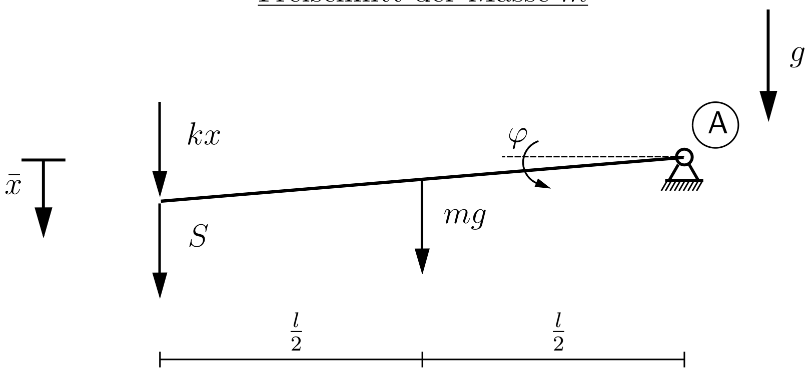
Freischnitt der Masse m_1



Schwerpunktsatz

$$m_1\ddot{\hat{x}} = -S - k\hat{x} + m_1 g + \bar{F}$$
$$\Leftrightarrow S = -m_1\ddot{\hat{x}} - k\hat{x} + m_1 g + \bar{F}$$

Freischnitt der Masse m



Kinematik, $\varphi(\bar{x}(t))$

$$\bar{x}(t) = l\varphi(t)$$
$$\dot{\bar{x}}_0(t) = l\dot{\varphi}(t)$$
$$\ddot{\bar{x}}_0(t) = l\ddot{\varphi}(t)$$

Massenträgheitsmoment des Balkens

$$\Theta_A = \frac{ml^2}{3}$$

Drallsatz

$$\Theta_A\ddot{\varphi} = -k\bar{x}l\cos(\varphi) + Sl\cos(\varphi) + mg\frac{l}{2}\cos(\varphi)$$
$$\Leftrightarrow \frac{ml^2}{3}\frac{\bar{x}}{l} = -k\bar{x}l\cos(\varphi) + (-m_1\ddot{\bar{x}} - k\bar{x} + m_1 g + \bar{F})l\cos(\varphi) + mg\frac{l}{2}\cos(\varphi)$$
$$\Leftrightarrow \frac{m}{3}\bar{x} \approx -2k\bar{x} - m_1\ddot{\bar{x}} + m_1 g + mg\frac{1}{2} + \bar{F}$$

$$\Leftrightarrow (\frac{m}{3} + m_1)\ddot{\bar{x}} + 2k\bar{x} = (\frac{m}{2} + m_1)g + \bar{F}(t)$$

c) Statische Ruhelage

$$\ddot{\bar{x}} = 0 \rightarrow \bar{x}_S = \frac{(\frac{m}{2} + m_1)g}{2k} = 1,16 \cdot 10^{-4}$$
$$\Rightarrow |\hat{x}_S| << 1 \rightarrow \text{Die Annahme kleiner Auslenkungen ist gerechtfertigt}$$

d) Koordinatentransformation

Kinematik

$$\bar{x} = x + \frac{(\frac{m}{2} + m_1)g}{2k}$$
$$\dot{\bar{x}} = \dot{x}$$
$$\ddot{\bar{x}} = \ddot{x}$$

Einsetzen

$$
\begin{aligned}
& (\frac{m}{3} + m_1)\ddot{x} + 2kx + (\frac{m}{2} + m_1)g = (\frac{m}{2} + m_1)g + \bar{F}(t) \\
\Leftrightarrow \quad & \ddot{x} + \frac{2k}{\frac{m}{3} + m_1}\varphi = F(t) \\
\Leftrightarrow \quad & \ddot{x} + \omega_0^2 x = F(t)
\end{aligned}
$$

Eigenkreisfrequenz

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{\frac{m}{3} + m_1}} = 100\pi[\mathrm{Hz}]$$

e) Periodendauer und Eigenfrequenz

Periodendauer

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{100\pi} = \frac{1}{50}[\mathrm{s}]$$

Frequenz

$$f = \frac{1}{T} = 50[\mathrm{Hz}]$$

f) Fouriertransformation der äußeren Belastung

Es gilt

$$F(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [c_n \cos(n\Omega t) + s_n \sin(n\Omega t)]$$

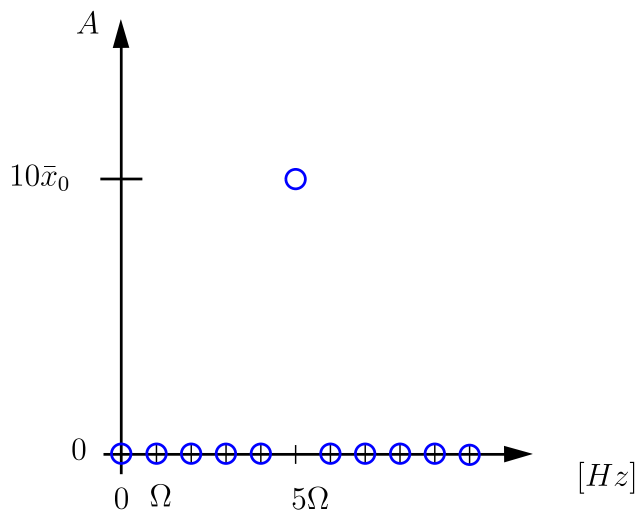
mit

$$
\begin{aligned}
c_0 &= \frac{1}{\tilde{T}} \int_0^{\tilde{T}} (8\bar{x}_0 \cos(5\Omega t) + 6\bar{x}_0 \sin(5\Omega t))\,\mathrm{d}t = 0 \\
c_n &= \frac{2}{\tilde{T}} \int_0^{\tilde{T}} (8\bar{x}_0 \cos(5\Omega t) + 6\bar{x}_0 \sin(5\Omega t)) \cos(n\Omega t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 8\bar{x}_0 & \text{für } n = 5 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\
s_n &= \frac{2}{\tilde{T}} \int_0^{\tilde{T}} (8\bar{x}_0 \cos(5\Omega t) + 6\bar{x}_0 \sin(5\Omega t)) \sin(n\Omega t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 6\bar{x}_0 & \text{für } n = 5 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Für das einseitige Amplitudenspektrum folgt mit $A_n = \sqrt{c_n^2 + s_n^2}$

$$A_n = \begin{cases} 10\bar{x}_0 & \text{für } n = 5 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und somit



g) Eigenzeit

Transformationsvorschrift

$$\tau = \omega_0 t \Rightarrow x(t) = x(\frac{\tau}{\omega_0})$$
$$\dot{x}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x(\frac{\tau}{\omega_0}) = \frac{\partial \tau}{\partial t} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} x(\frac{\tau}{\omega_0}) = \omega_0 x'(\tau)$$
$$\ddot{\varphi}(t) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} x(\frac{\tau}{\omega_0}) = ... = \omega_0^2 x''(\tau)$$

Einsetzen

$$\omega_0^2 x''(\tau) + \omega_0^2 x(\tau) = 0$$
$$\Leftrightarrow \qquad x''(\tau) + x(\tau) = 0$$

h) Lösung in Abhängigkeit der gegebenen Anfangsbedingungen

Ansatz

$$x(\tau) = a\cos(\tau) + b\sin(\tau)$$
$$x'(\tau) = -a\sin(\tau) + b\cos(\tau)$$

Anfangsbedingungen

$$x(\tau = 0) = a = -\frac{(\frac{m}{2} + m_1)g}{2k}$$
$$x'(\tau = 0) = b = 0$$

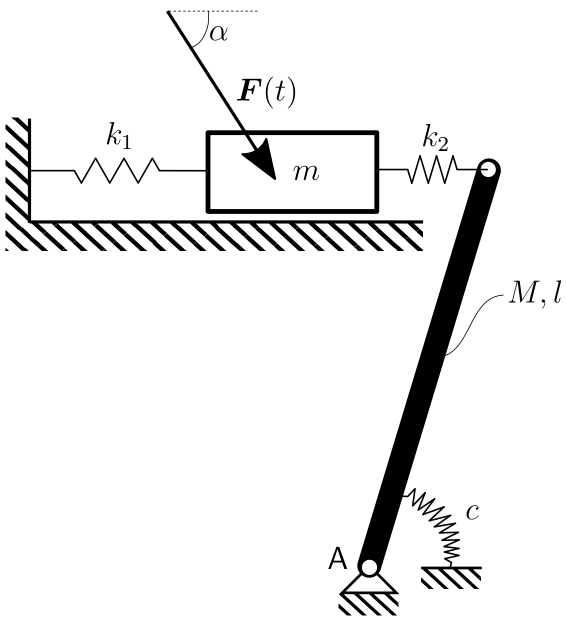
Lösung

$$\varphi(\tau) = -\frac{(\frac{m}{2} + m_1)g}{2k}\cos(\tau)$$

Die Anfangsbedingungen entsprechen dem Schwingungsverhalten für $\bar{x} = 0$ und ohne Anfangsgeschwindigkeit.

3. Aufgabe: (ca. 50 % der Gesamtpunkte)

Das unten dargestellte dynamische System besteht aus einem Balken der Länge l und Gesamtmasse M sowie einer Masse m, welche ausschließlich horizontal reibungsfrei gleiten kann. Der Balken ist im Punkt A drehbar gelagert. Desweiteren befindet sich dort eine Drehfeder mit Drehfedersteifigkeit c. Die Masse m ist links mit einer Translationsfeder k_1 verbunden und rechts über eine weitere Translationsfeder k_2 mit dem oberen Ende des Balkens frei verdrehbar verbunden. Auf die Masse wirkt unter einem gegebenen Winkel α eine zeitabhängige Errergerkraft mit Betrag $F(t) = F_0 \cos(\Omega\, t)$.



Gegeben: k_1, k_2, c, m, M, l, F_0, Ω, α

Bearbeiten Sie folgende Teilaufgaben.

a) Benennen Sie die Freiheitsgrade des Systems und zeichnen Sie diese in die obere Abbildung ein. Wie lautet der Koordinatenvektor $\boldsymbol{q}$?

b) Bestimmen Sie die gesamte kinetische Energie und die gesamte potentielle Energie des Systems.

c) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen des Systems unter der Annahme kleiner Auslenkungen mithilfe der kinetischen und potentiellen Energie (entsprechend der Lagrangeschen Gleichungen 2. Art). *Andere Lösungswege werden nicht gewertet.*

d) Welche Aussagen lassen sich über die Bewegungsgleichungen machen für die folgenden zwei Sonderfälle:

d1) $k_2 = 0$

d2) $k_2 \to \infty$

Im Folgenden soll davon ausgegangen werden, dass $k_1 = k, k_2 = 3k, c = k\,l^2, M = 3\,m, \alpha = 45°$ gilt. Es soll mit den folgenden Bewegungsgleichungen weitergerechnet werden:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m\,l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4\,k & -3\,k\,l \\ -3\,k\,l & 4\,k\,l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} F_0 \cos(\Omega\,t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

e) Bestimmen Sie die Eigenkreisfrequenzen des Systems und die zugehörigen Eigenformen. Skizzieren Sie die Eigenformen graphisch.

f) Normieren Sie die Eigenvektoren mithilfe einer Normierungsvorschrift und bestimmen Sie die daraus entstehende Modalmatrix $\mathbf{\Phi}$. Leiten Sie die entkoppelten modalen Bewegungsgleichungen her.

Hinweis zu h) Wählen Sie für die Normierung m als Bezugsmasse und 1 als Bezugslänge, so dass $M_0 L_0^2 = m$ gilt. Ein Nachweis, dass die modale Steifigkeitsmatrix und Massenmatrix Diagonalform haben, muss nicht erbracht werden.

g) Bestimmen Sie die modalen Partikulärlösungen $x_i^{\mathrm{p}}(t)$. Wie nennt sich dieser Ansatz?

Musterlösung - Aufgabe 3

a) Translation der Masse m, z.B. nach rechts positiv: x.
Verdrehwinkel des Balkens M, z.B. positiv im Uhrzeigersinn: φ

Ortsvektor:

$$\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} x \\ \varphi \end{bmatrix}$$

b) Kinetische Energie:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J_A\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{6}Ml^2\dot{\varphi}^2 \tag{1}$$

Potentielle Energie

$$V = \frac{1}{2}k_1x^2 + \frac{1}{2}k_2(l\sin(\varphi) - x)^2 + \frac{1}{2}c\varphi^2$$

c) Lagrange-Gleichungen 2. Art

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{q}} = \boldsymbol{Q}^*$$

Vektor der generalisierten Nicht-Potentialkräfte:

$$\boldsymbol{Q}^* = \begin{bmatrix} F_0\cos(\Omega t)\cos(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix}$$

c1) Variante 1: Einsetzen und Ausrechnen

Einsetzen und Ableiten liefert:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + (k_1 + k_2)x - k_2l\sin(\varphi) &= F_0\cos(\Omega t)\cos(\alpha) \\ \frac{1}{3}Ml^2\ddot{\varphi} + c\varphi + k_2l^2\sin(\varphi)\cos(\varphi) - k_2lx\cos(\varphi) &= 0 \end{aligned}$$

Kleinwinkelnäherung: $||\varphi|| << 1$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \sin(\varphi) &\approx \varphi \\ \cos(\varphi) &\approx 1 \end{aligned}$$

Und die Bewegungsgleichungen in Matrix-Vektor-Form

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}Ml^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2l \\ -k_2l & c + k_2l^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ \varphi \end{bmatrix} = F_0\cos(\Omega t)\cos(\alpha)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

c1) Variante 2: Alternative Lösung über Massen- und Steifigkeitsmatrix

Allgemeine Form der kinetischen Energie

$$T(\dot{\boldsymbol{q}}) = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}} \cdot \boldsymbol{M}\dot{\boldsymbol{q}}$$

Aus Vergleich mit (1) kann man die Massenmatrix ablesen als

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}Ml^2 \end{bmatrix}$$

Allgemeine Form der potentiellen Energie

$$V(\boldsymbol{q}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{K}\boldsymbol{q}$$

Vergleich mit der linearisierten potentiellen Energie

$$V = \frac{1}{2}k_1x^2 + \frac{1}{2}k_2(l\varphi - x)^2 + \frac{1}{2}c\varphi^2 = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)x^2 - \frac{1}{2}\,2\,k_2l\varphi x + \frac{1}{2}(c + k_2l^2)\varphi^2$$

ergibt

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2l \\ -k_2l & c + k_2l^2 \end{bmatrix}$$

Die Ableitungen liefern

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}\right) = \boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{q}} \quad \text{und} \quad \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{q}} = -\boldsymbol{K}\boldsymbol{q}$$

sodass die Bewegungsgleichungen

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{q} = \boldsymbol{Q}^*$$

lauten, beziehungsweise ausgeschrieben

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}Ml^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2l \\ -k_2l & c + k_2l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \varphi \end{bmatrix} = F_0\cos(\Omega t)\cos(\alpha) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

d)

d1) Bewegungsgleichungen in x und φ sind entkoppelt , d.h. Masse und Balken schwingen unabhängig von einander

$$m\ddot{x} + k_1x = F_0\cos(\Omega t)\cos(\alpha)$$
$$\frac{1}{3}Ml^2\ddot{\varphi} + c\varphi = 0$$

d2) Es gilt damit eine starre Bindung zwischen Masse und Balken mit der Nebenbedingung $x = l\sin(\varphi)$. Das System hat nur noch 1 FHG. Die Bewegungsgleichungen reduzieren sich zu einer, z.B.

$$(\frac{1}{3}Ml^2 + ml^2)\ddot{\varphi} + (k_1l^2 + c)\varphi = F_0l\cos(\Omega t)\cos(\alpha)$$

e) Eigenkreisfrequenzen bestimmen:

$$\det(\boldsymbol{K} - \omega^2\boldsymbol{M}) = \det\left(\begin{bmatrix} 4k - \omega^2 \cdot m & -3kl \\ -3kl & 4kl^2 - \omega^2 \cdot ml^2 \end{bmatrix}\right) = 0$$

charakteristische Gleichung

$$(\omega^2)^2 - 8\frac{k}{m}\omega^2 + 7\frac{k^2}{m^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = \frac{8 \pm 6}{2}\frac{k}{m}$$
$$\omega_1^2 = 1(k/m)\ ,\ \omega_2^2 = 7(k/m)$$

Eigenkreisfrequenzen

$$\omega_1 = 1\sqrt{k/m}\ ,\ \omega_2 = \sqrt{7}\sqrt{k/m}$$

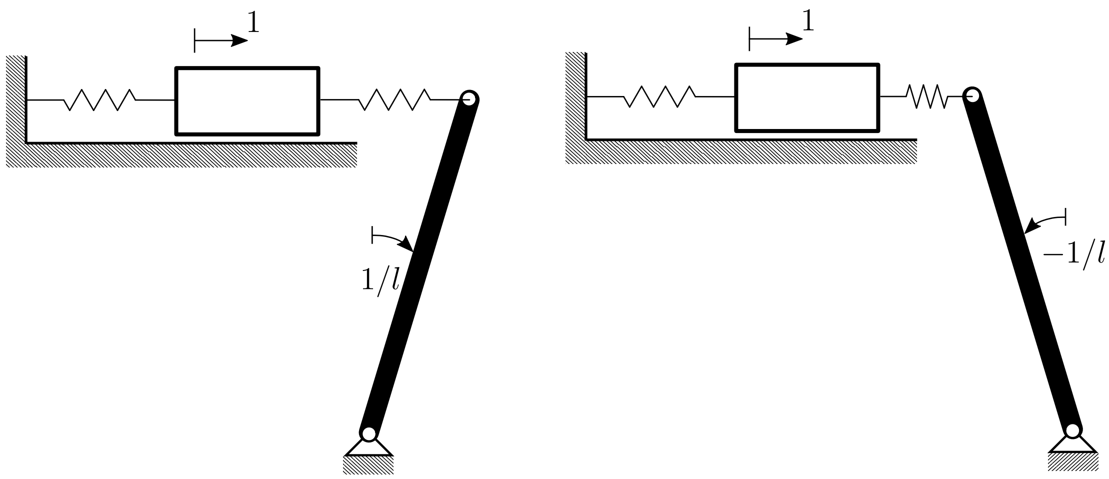
zugehörige Eigenvektoren

$$\boldsymbol{Q}_\mathrm{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ \kappa_\mathrm{i} \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \kappa_\mathrm{i} = -\frac{-m_{11}\omega_\mathrm{i}^2 + k_{11}}{-m_{12}\omega_\mathrm{i}^2 + k_{12}}$$

hier damit:

$$\kappa_1 = 1/l \quad , \quad \kappa_2 = -1/l \quad \Rightarrow \boldsymbol{Q}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/l \end{bmatrix}\ ,\ \boldsymbol{Q}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1/l \end{bmatrix}$$

Skizze der Eigenformen (links: Grundschwingung, rechts: 1. Oberschwingung):



f) Normierung der Eigenvektoren

$$\boldsymbol{\phi}_1 = c\boldsymbol{Q}_1\ ,\ \boldsymbol{\phi}_2 = d\boldsymbol{Q}_2$$

Einsetzen in Normierungsvorschrift:

$$\boldsymbol{\phi}_\mathrm{i}^\mathrm{T}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\phi}_\mathrm{i} = m_0 l_0^2 = m \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{\sqrt{2}}\ ,\ d = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Damit folgt die Modalmatrix:

$$\boldsymbol{\Phi} = [\boldsymbol{\phi}_1\ \boldsymbol{\phi}_2] = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1/l & -1/l \end{bmatrix}$$

Für die Transformation der Steifigkeitsmatrix gilt

$$\boldsymbol{\phi}_\mathrm{i}^\mathrm{T}\boldsymbol{K}\boldsymbol{\phi}_\mathrm{i} = m_0 l_0^2\omega_\mathrm{i}^2 = m\omega_\mathrm{i}^2$$

Außerdem gilt für $i \neq j$

$$\boldsymbol{\phi}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{M} \boldsymbol{\phi}_{\mathrm{j}} = 0$$
$$\boldsymbol{\phi}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{K} \boldsymbol{\phi}_{\mathrm{j}} = 0$$

Mit der Transformation $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{\Phi x}$ und vormultiplizieren der Bewegungsgleichung mit $\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}$ entkoppeln sich die Bewegungsgleichungen zu

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{M \Phi x} + \boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{K \Phi x} = \boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{F} \quad & \Rightarrow m\ddot{x}_{\mathrm{i}} + m\omega_{\mathrm{i}}^2 x_{\mathrm{i}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{2} F_0 \cos(\Omega t) \\ & \Rightarrow \ddot{x}_{\mathrm{i}} + \omega_{\mathrm{i}}^2 x_{\mathrm{i}} = \frac{F_0}{2m} \cos(\Omega t)\end{aligned}$$

mit $i \in 1, 2$.

g) Die Bewegungsgleichungen entsprechen einer harmonischen, ungedämpften Schwingung mit Krafterregung, sodass der Ansatz lautet:

$$\begin{aligned} x_i(t) &= x_i^h(t) + x_i^p(t) \\ x_{\mathrm{i}} &= A_{\mathrm{i}} \cos(\omega_{\mathrm{i}} t) + B_{\mathrm{i}} \sin(\omega_{\mathrm{i}} t) \\ x_i^p(t) &= \bar{x}_i \cos(\Omega t) \end{aligned}$$

Dies ist der Ansatz der rechten Seite für die partikuläre Lösung. Einsetzen liefert

$$\bar{x}_i = \frac{1}{\omega_i^2 - \Omega^2} \frac{F_0}{2m}$$