Prüfung in

Baudynamik

26. Juli 2021

Name: .... Vorname: ....

Matr.-Nr: .... Studiengang: ....

Hinweise:

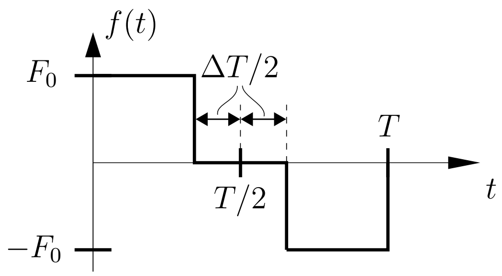
- Bitte schreiben Sie deutlich lesbar. Zeichnungen müssen sauber und übersichtlich sein. Die Benutzung roter und grüner Farbstifte ist nicht zugelassen.
- Aufgaben werden nur beurteilt, wenn sie auf den ausgegebenen Blättern gelöst sind. Eventuell abgegebene Formelsammlungen werden als nicht vorhanden betrachtet. Trennen Sie die Aufgabenblätter nicht auf.
- Bei den Aufgaben muss eindeutig der Lösungsweg erkennbar sein. Ein Ergebnis ohne Lösungsweg wird nicht bewertet. Sollten für eine Aufgabe mehrere widersprüchliche Lösungen angegeben sein, so wird keine bewertet. Streichen Sie deshalb falsche Rechenschritte oder Zeichnungen durch.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite.

Aufgabe	1	2	3	4	Σ
Punkte					
Korrektor					

(Eintrag erfolgt durch Institut)

1. Aufgabe: (ca. 16% der Gesamtpunkte)

a) Gegeben ist die skizzierte T-periodische Erregungsfunktion.



i) Geben Sie den Funktionsverlauf $f(t)$ an.

ii) Stellen Sie die Fourierkoeffizienten auf und begründen Sie, welche Null und welche von Null verschieden sind (keine Berechnung erforderlich).

iii) Wie verändert sich die Güte der Approximation bei gleich bleibender Anzahl an Fourierreihengliedern für größer werdendes $\Delta T < T$?

iv) Welche periodische Stoßart ergibt sich für $\Delta T = 0$?

b) Skizzieren Sie die Vergrößerungsfunktion für Unwuchterregung $V(\eta, D)$ unter der Annahme, dass Dämpfung keine Rolle spielt. Zeichnen Sie drei wichtige Punkte ein und skizzieren Sie den restlichen Verlauf.

Musterlösung - Aufgabe 1

a) i)

$$f(t) = \begin{cases} F_0 & \text{für } 0 \leq t < T/2 - \Delta T/2 \\ 0 & \text{für } T/2 - \Delta T/2 \leq t \leq T/2 + \Delta T/2 \\ -F_0 & \text{für } T/2 + \Delta T/2 < t < T \end{cases}$$

ii) Fourier-Reihe

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\underbrace{C_k}_{a_k} \cos(k\,\omega\,t) + \underbrace{S_k}_{b_k} \sin(k\,\omega\,t) \right]$$

$f(t)$ ist eine ungerade Fkt. $f(t) = -f(-t)\ \forall t \in \mathbb{R}$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T \underbrace{f(t)}_{\text{ungerade}} \quad dt = 0$$

Integral über ungerade Fkt. ist $= 0$ bzw. siehe Flächeninhalt Skizze

$$a_k = C_k = \frac{2}{T} \int_0^T \underbrace{f(t)}_{\text{ungerade}} \underbrace{\cos(k\,\omega\,t)}_{\text{gerade}} dt = 0$$

ungerade mal gerade Fkt. ergibt ungerade Fkt.; Integral über ungerade Fkt. ist $= 0$

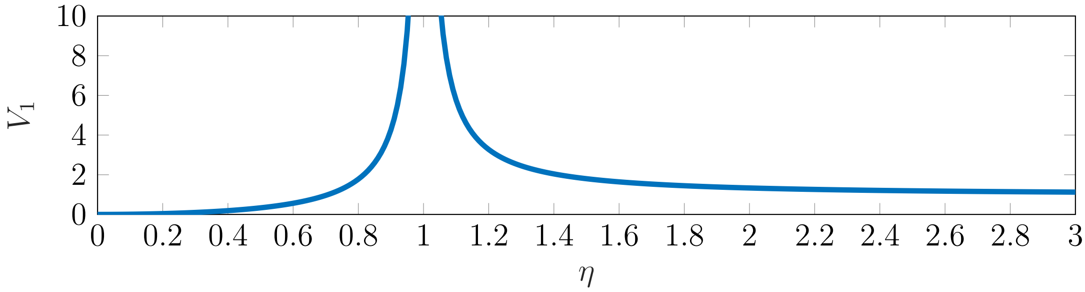
$$b_k = S_k = \frac{2}{T} \int_0^T \underbrace{f(t)}_{\text{ungerade}} \underbrace{\sin(k\,\omega\,t)}_{\text{ungerade}} dt \neq 0$$

ungerade mal ungerade Fkt. ergibt gerade Fkt.; Integral über gerade Fkt. ist $\neq 0$

iii) Die Konvergenz wird schlechter.

iv) Wechselstoß.

b)



$$(0, 0), (1, \infty), (\infty, 1)$$

2. Aufgabe: (ca. 18% der Gesamtpunkte)

Gegeben sei ein Einstockwerkrahmen mit Tilgeraufbau. Die dazugehörigen Bewegungsgleichungen des 2-Freiheitsgradsystems ergeben sich wie folgt:

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{q} = \boldsymbol{F}$$

$$\text{mit} \quad \boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} F_0 \cos(\Omega t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} x \\ x_T \end{bmatrix}$$

Gegeben: m, k, F_0

Zeichnen Sie den Amplitudenfrequenzgang des Stockwerkrahmens $|a_1(\Omega)|$ unter Angabe von Null- und Resonanzstellen. Gehen Sie dafür wie folgt vor:

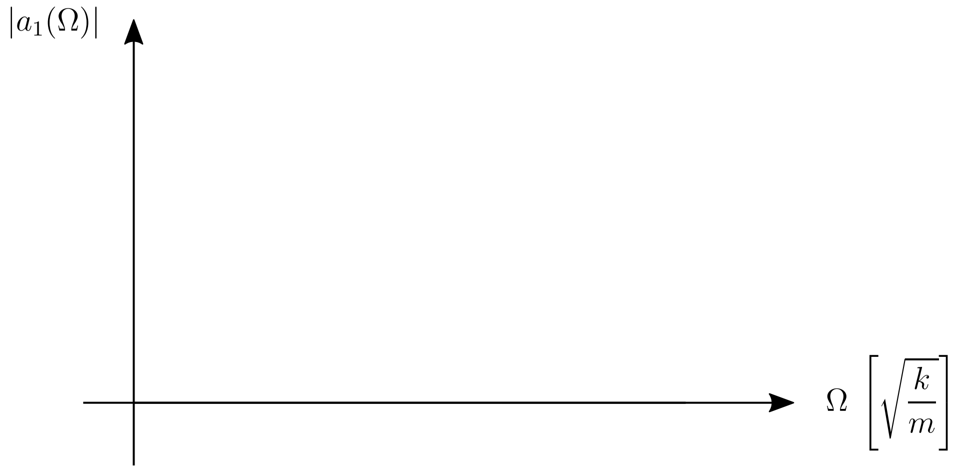
a) Bestimmen Sie die **beiden** Resonanzstellen von $a_1(\Omega)$.

b) Bestimmen Sie rechnerisch die Nullstelle (Stichwort: Tilgung) von $a_1(\Omega)$.

c) Begründen Sie in Stichworten / kurzen Sätzen, wie sich $|a_1(\Omega)|$ für $\Omega = 0$ und den Grenzwert $\Omega \to \infty$ verhält.

d) Tragen Sie unter Zuhilfenahme ihrer Ergebnisse von a) bis c) die Amplitude $|a_1(\Omega)|$ in Abhängigkeit der Erregerfrequenz Ω in den dafür vorgegebenen Vordruck ein.

Hinweis: *Es kann davon ausgegangen werden, dass sich die Null- und Resonanzstellen nicht gegenseitig beeinflussen.*



Musterlösung - Aufgabe 2

a) Resonanzstellen $\hat{=}$ Eigenfrequenzen des Systems

$$N = \det(\boldsymbol{K} - \Omega_i^2\, \boldsymbol{M}) = (2k - 2m\Omega_i^2)\,(k - m\Omega_i^2) - k^2$$
$$\overset{!}{=} 2m^2\,(\Omega_i^2)^2 - 4mk\,(\Omega_i^2) + k^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \Omega_{1/2}^2 = \frac{4mk \mp \sqrt{16m^2k^2 - 4\,2m^2k^2}}{2\,2m^2} = \left(1 \mp \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{k}{m}$$
$$\Leftrightarrow \quad \Omega_{1/2} = \sqrt{1 \mp \frac{1}{\sqrt{2}}}\sqrt{\frac{k}{m}}$$
$$\rightarrow \quad \Omega_1 \approx 0,541\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \rightarrow \quad \Omega_2 \approx 1,307\sqrt{\frac{k}{m}}$$

b) Nullstellen

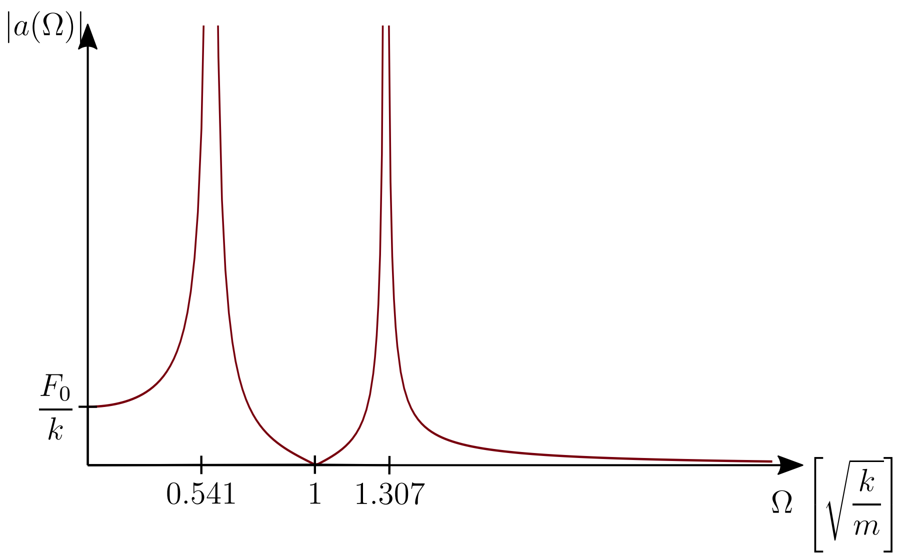
$$a_1 = \frac{Z_1}{N} \qquad \textit{mit Hinweis: Nullstellen von } N \neq \textit{Nullstellen von } Z$$
$$\Rightarrow \quad Z_1 \overset{!}{=} 0 \quad : \quad Z_1 = \begin{vmatrix} F_0 & -k \\ 0 & k - m\Omega^2 \end{vmatrix} = F_0\,(k - m\Omega^2) \overset{!}{=} 0$$
$$\rightarrow \quad \Omega = 1\sqrt{\frac{k}{m}}$$

c) Verhalten bei $\Omega \to 0, \infty$ mit $a_1(\Omega) = \dfrac{F_0\,(k - m\Omega^2)}{2m^2\Omega^4 - 4mk\Omega^2 + k^2} = \dfrac{F_0\,(k - m\Omega^2)}{2m^2\,(\Omega^2 - \Omega_1^2)\,(\Omega^2 - \Omega_2^2)}$

$\Omega = 0 \quad : \quad \cos(\Omega = 0) = 1\,, |a_1(0)| = \dfrac{F_0}{k}$

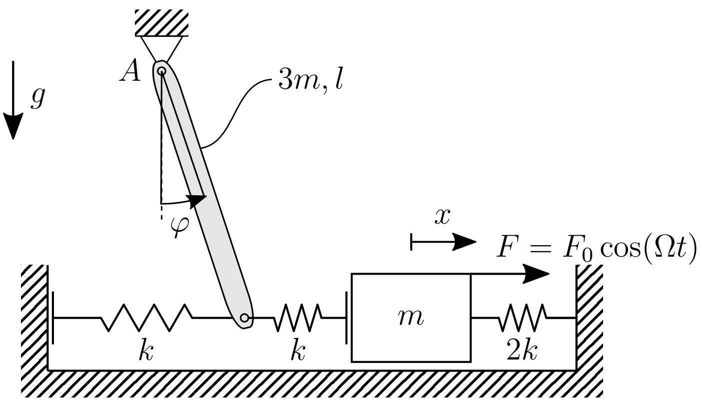
$\Omega \to \infty \quad : \quad \Omega$ sehr groß $\hat{=}$ keine Wechselwirkung mit Eigenfrequenz des dynamischen Systems $\rightarrow \lim\limits_{\Omega\to\infty} |a_1(\Omega)| = 0$

d) Verlauf



3. Aufgabe: (ca. 47% der Gesamtpunkte)

Gegeben sei folgendes dynamisches System bestehend aus einem in A gelenkig gelagerten massebehafteten Stab (Masse $M_{\text{Stab}} = 3m$, Länge $L_{\text{Stab}} = l$) sowie einer reibungsfrei gleitenden Masse m. Stab und Masse sind gelenkig über Federn der Steifigkeit k bzw. $2k$ verbunden. Diese können sich konstruktionsbedingt nur **waagerecht** dehnen bzw. stauchen. Am System greift die harmonische Last $F = F_0 \cos(\Omega t)$ an. Die Erdanziehung ist zu berücksichtigen! Das Massenträgheitsmoment des Stabes bzgl. des Punktes A ist gegeben als $J_{\text{Stab}}^{\text{A}}$.



Gegeben: $m,\ M_{\text{Stab}} = 3m,\ L_{\text{Stab}} = l,\ g,\ k,\ J_{\text{Stab}}^{\text{A}},\ F = F_0 \cos(\Omega t)$

a) Bestimmen Sie mit Hilfe der Methode nach Lagrange (2. Art) die **linearisierten** Bewegungsgleichungen für die Freiheitsgrade x und φ.

Im Folgenden soll mit dem vereinfachten System von Bewegungsgleichungen

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & ml^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3k & -kl \\ -kl & 3kl^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \cos(\Omega t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

weitergerechnet werden.

b) Führen Sie eine Modalanalyse durch.

c) Bestimmen Sie mit Hilfe von b) die partikuläre Lösung des Systems.

Hinweise:

- *Lösungen mit anderen Methoden als der Methode nach Lagrange werden nicht gewertet.*
- *Als Normierungsvorschrift kann $M_0 L_0^2 = ml^2$ angenommen werden.*

Musterlösung - Aufgabe 3

a) Lagrange und Linearisierung

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{1}{2}k\left[(\sin(\varphi)l)^2 + (x-\sin(\varphi)l)^2 + 2x^2\right] + 3mg\cdot\frac{1}{2}l\,(1-\cos(\varphi)) \\
T &= \frac{1}{2}J^{\mathrm{A}}_{\mathrm{Stab}}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial x} &= k\,(x\;-\;\sin(\varphi)\;+\;2\,x) \\
\frac{\partial V}{\partial \varphi} &= k\left[l^2\sin(\varphi)\cos(\varphi) + (x-\sin(\varphi)l)(-\cos(\varphi)l)\right] + \frac{3}{2}mgl\sin(\varphi) \\
&= 2kl^2\sin(\varphi)\cos(\varphi) - kl\cos(\varphi) + \frac{3}{2}mgl\sin(\varphi) \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) &= m\ddot{x} \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) &= J^{\mathrm{A}}_{\mathrm{Stab}}\ddot{\varphi}
\end{aligned}
$$

Linearisieren mit $\sin(\varphi) = \varphi$ und $\cos(\varphi) = 1$ liefert:

$$
\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J^{\mathrm{A}}_{\mathrm{Stab}} \end{bmatrix}\ddot{\boldsymbol{q}} + \begin{bmatrix} 3k & -kl \\ -kl & 2kl^2 + \frac{3}{2}mgl \end{bmatrix}\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} F_0\cos(\Omega t) \\ 0 \end{bmatrix}
$$

b) Modalanalyse

⋆ Eigenwerte

$$
\begin{aligned}
\det(\boldsymbol{K} - \omega_i^2\boldsymbol{M}) &= (3k - m\omega_i^2)(3kl^2 - ml^2\omega_i^2) - k^2l^2 \\
&= m^2l^2\omega_i^4 - 6mkl^2\omega_i^2 + 8k^2l^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \omega_{1/2}^2 &= \frac{6mkl^2 \mp \sqrt{36m^2k^2l^4 - 4m^2l^2 8k^2l^2}}{2m^2l^2} \\
&= (3 \mp 1)\,\frac{k}{m}
\end{aligned}
$$

⋆ Eigenvektoren

$$
\kappa_{1/2} = -\frac{-m_{11}\omega_{1/2}^2 + k_{11}}{-m_{12}\omega_{1/2}^2 + k_{12}} = -\frac{(-3 \pm 1 + 3)k}{(-1)kl} = \pm\frac{1}{l}
$$

$$
\Rightarrow \quad \boldsymbol{\varphi_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/l \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\varphi_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1/l \end{bmatrix}
$$

⋆ Normierung

$$\boldsymbol{\Phi_1} \;=\; c \cdot \boldsymbol{\varphi_1} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\Phi_1^T}\, \boldsymbol{M}\, \boldsymbol{\Phi_1} \;\stackrel{!}{=}\; M_0 l_0^2 \;=\; ml^2$$

$$\Rightarrow \quad c^2 \begin{bmatrix} 1 & 1/l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & ml^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1/l \end{bmatrix} \;=\; ml^2$$

$$\Rightarrow \quad c^2\, 2m \;=\; ml^2 \quad \Rightarrow \quad c \;=\; \frac{l}{\sqrt{2}}$$

$$\text{analog:} \quad \boldsymbol{\Phi_2} \;=\; d \cdot \boldsymbol{\varphi_2} \quad \Rightarrow \quad d \;=\; c \;=\; \frac{l}{\sqrt{2}}$$

⋆ Transformation Lastvektor

$$\tilde{F}_i \;=\; \frac{1}{M_0 l_0^2}\, \boldsymbol{\Phi_i^T}\, \boldsymbol{F} \;=\; \frac{F_0}{ml\sqrt{2}}\, \cos(\Omega t)$$

⋆ modale DGL

$$\ddot{x}_i \;+\; \omega_i^2\, x_i \;=\; \tilde{F}_i\,, \quad i \;=\; 1, 2$$

c) Systemantwort

⋆ Systemantwort modal
Ansatz rechte Seite: $x_{pi} \;=\; A_i\, \cos(\Omega t)$ mit $\ddot{x} \;=\; -A_i\, \Omega^2\, \cos(\Omega t)$
Einsetzen liefert:

$$A_i\,(-\Omega^2 \;+\; \omega_i^2) \;=\; \frac{F_0}{ml\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad A_i \;=\; \frac{F_0}{ml\sqrt{2}\,(-\Omega^2 \;+\; \omega_i^2)}$$

$$\Rightarrow \quad x_{pi} \;=\; \frac{F_0}{ml\sqrt{2}\,(-\Omega^2 \;+\; \omega^2)}\, \cos(\Omega t)$$

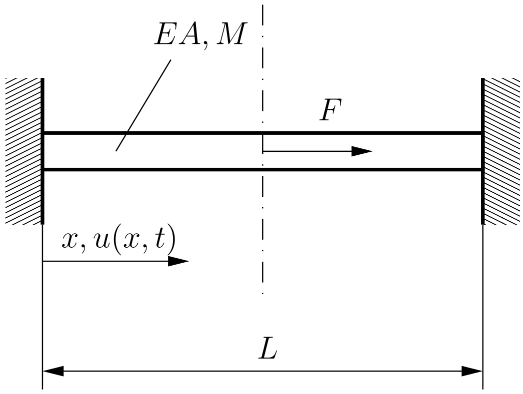
$$\text{alternativ:} \quad x_{pi} \;=\; \frac{F_0}{ml\sqrt{2}\omega_i^2}\, \frac{1}{1 \;-\; \eta_i^2}\, \cos(\Omega t)$$

⋆ Rücktransformation

$$\boldsymbol{q_n} \;=\; \boldsymbol{\Phi_1}\, x_{p1} \;+\; \boldsymbol{\Phi_2}\, x_{p2}$$

$$\;=\; \frac{F_0}{ml\sqrt{2}} \left[\begin{bmatrix} 1 \\ 1/l \end{bmatrix} \frac{1}{2}\, \frac{1}{1 \;-\; \eta_1^2} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1/l \end{bmatrix} \frac{1}{4}\, \frac{1}{1 \;-\; \eta_2^2} \right] \cos(\Omega t)$$

4. Aufgabe: (ca. 19% der Gesamtpunkte)



Der abgebildete Dehnstab (Gesamtmasse M, Länge L, Dehnsteifigkeit EA) ist an beiden Enden fest eingespannt und wird in der Mitte mit der konstanten Kraft F belastet. Die Erdbeschleunigung kann vernachlässigt werden.
Gegeben: M, L, E, A, F

a) Stellen Sie mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode mit einer Unterteilung des Stabs in **zwei** finite Elemente und unter Berücksichtigung der Randbedingungen ein reduziertes System von Bewegungsgleichungen für die Verschiebung $u(x = L/2, t)$ auf.

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des in a) erhaltenen Systems unter Bestimmung der

   i) homogenen Lösung und

   ii) der partikulären Lösung.

Hinweis: Für ein finites Dehnstabelement der Länge l und der längenbezogenen Masse m (Einheit [kg/m]*) soll hier gelten:*

$$\boldsymbol{K}^e = \frac{EA}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{M}^e = \frac{ml}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Musterlösung - Aufgabe 4

a) DGL via Superposition (aus Gesamtenergie) von 2 Elementen mit $M = 2ml,\ L = 2l$

$$l = \frac{L}{2}\,,\ ml = \frac{M}{2}$$

$$\boldsymbol{K}_\mathrm{G} = \frac{EA}{L/2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1+1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\,,\ \boldsymbol{M}_\mathrm{G} = \frac{1}{6}\left(\frac{M}{2}\right)\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2+2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

gesamtes System:

$$\boldsymbol{M}_\mathrm{G}\,\ddot{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{K}_\mathrm{G}\,\boldsymbol{u} = \boldsymbol{F}_\mathrm{G}$$

Randbedinungen $u_1 = \ddot{u}_1 = 0$, $u_3 = \ddot{u}_3 = 0$ liefern reduziertes System:

$$\underbrace{\frac{M}{3}}_{m}\,\ddot{u}_2 + \underbrace{\frac{4\,EA}{L}}_{k}\,u_2 = F$$

$$\ddot{u}_2 + \omega_0^2\,u_2 = \frac{F}{m}$$

b) Lösung

$$u_a = u_h + u_p$$

i)

$$u_h(t) = C\,\cos(\omega_0\,t + \alpha) \quad \text{bzw.} \quad u_h(t) = A\,\sin(\omega_0\,t) + B\,\cos(\omega_0\,t)$$

$$\text{mit } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

ii) Ansatz $u_p = a = konst.$

$$\Rightarrow \omega_0^2\,a = \frac{F}{m}$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{F}{k}$$

Prüfung in
Baudynamik
am 26. Juli 2021

Lösungsvorlage

Name: .... Vorname: ....

Matr.-Nr: .... Studiengang: ....