Modulprüfung

Festigkeitslehre

17. August 2021

Name: .... Vorname: ....

Matr.-Nr: .... Studiengang: ....

Hinweise:

- Bitte schreiben Sie deutlich lesbar. Zeichnungen müssen sauber und übersichtlich sein. Die Benutzung roter und grüner Farbstifte ist nicht zugelassen.
- Aufgaben werden nur beurteilt, wenn sie auf den ausgegebenen Blättern gelöst sind. Eventuell abgegebene Formelsammlungen werden als nicht vorhanden betrachtet. Trennen Sie die Aufgabenblätter nicht auf.
- Bei den Aufgaben muss eindeutig der Lösungsweg erkennbar sein. Ein Ergebnis ohne Lösungsweg wird nicht bewertet. Sollten für eine Aufgabe mehrere widersprüchliche Lösungen angegeben sein, so wird keine bewertet. Streichen Sie deshalb falsche Rechenschritte oder Zeichnungen durch.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite.

Aufgabe	1	2	3	4	5	Σ
Punkte						
Korrektor						

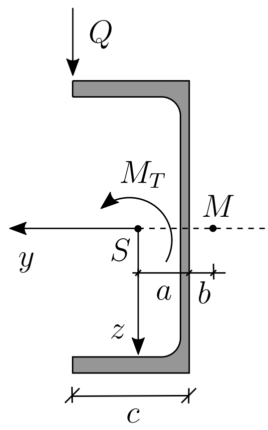
(Eintrag erfolgt durch Institut)

1. Aufgabe: (ca. 12 % der Gesamtpunkte)

Aufgabe 1.1

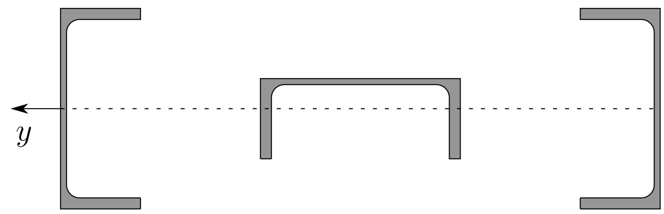
Gegeben ist das dargestellte U-Profil mit Schwerpunkt S und Schubmittelpunkt M. Das Profil wird durch die Querkraft Q und das Torsionsmoment M_T wie dargestellt belastet. Wie groß ist das gesamte Torsionsmoment $M_{T\text{ges}}$, das auf den Querschnitt wirkt? Nutzen Sie das gegebene Koordinatensystem.

Gegeben: $M_T = 2$ kNm, $Q = 100$ kN, $a = 2{,}56$ cm, $b = 2{,}85$ cm, $c = 8$ cm



Aufgabe 1.2

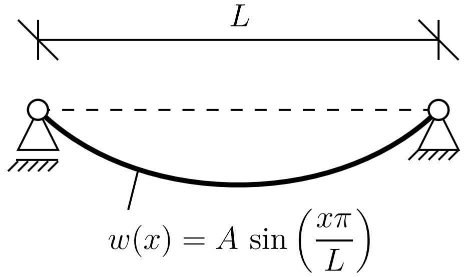
Gegeben sind die folgenden Balkenquerschnitte I bis III. Die Darstellung der Querschnitte ist maßstabsgetreu. Ordnen Sie die Querschnitte nach der Größe ihrer Flächenträgheitsmomente bezüglich der y-Achse.



<u>*Hinweis:*</u> Eine Rechnung ist **nicht** notwendig.

Aufgabe 1.3

Gegeben ist eine sinusförmige Biegelinie $w(x)$ für einen Balken mit konstanter Biegesteifigkeit EI. Kreuzen Sie den dazugehörigen Verlauf der Querkraft an.



☐ $Q(x) = \dfrac{A\,EI\,\pi^3}{L^3} \sin\left(\dfrac{x\pi}{L}\right)$

☐ $Q(x) = \dfrac{A\,L^3}{EI\,\pi^3} \cos\left(\dfrac{x\pi}{L}\right)$

☐ $Q(x) = \dfrac{A\,EI\,\pi^3}{L^3} \cos\left(\dfrac{x\pi}{L}\right)$

Musterlösung - Aufgabe 1
Aufgabe 1.1.

$$M_{T,ges} = M_T + Q \cdot (c + b) = 1285kNm$$

Aufgabe 1.2.
I=III>II

Aufgabe 1.3.

$$\boxtimes \quad Q(x) = \frac{AEI\pi^3}{L^3} \cos \frac{x\pi}{L}$$

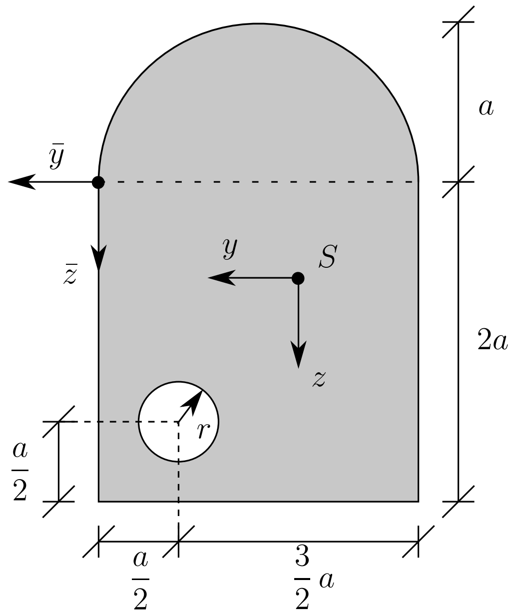
Zusammenhang Biegelinie - Querkraft: $M = \omega'' EI \quad ; \quad M'(x) = Q(x)$

$$\Rightarrow M' = Q = -\omega''' EI$$

$$\begin{aligned} w(x) &= A \cdot \sin \frac{x\pi}{L} \\ w'(x) &= A \cdot \cos \frac{x\pi}{L} \cdot \frac{\pi}{L} \\ w''(x) &= -A \cdot \sin \frac{x\pi}{L} \cdot \frac{\pi^2}{L^2} \\ w'''(x) &= -A \cdot \cos \frac{x\pi}{L} \cdot \frac{\pi^3}{L^3} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow M' = \underline{Q = \frac{A\pi^3}{L^3} \cos \frac{x\pi}{L} \cdot EI}$$

2. Aufgabe: (ca. 20 % der Gesamtpunkte)



Gegeben sei der oben dargestellte Balkenquerschnitt. Berechnen Sie:

a) die Lage des Flächenschwerpunktes S bezüglich des gegebenen $(\bar{y}, \bar{z})$-Koordinatensystems.

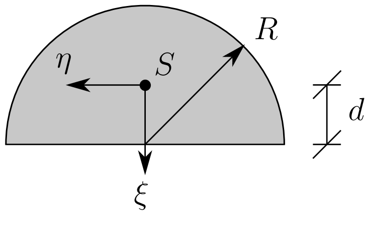
b) die Flächenträgheitsmomente I_y, I_z, I_{yz} bezüglich des (y, z)-Koordinatensystems, dessen Ursprung mit dem Flächenschwerpunkt zusammenfällt. Nutzen Sie dabei die gerundeten Schwerpunktskoordinaten $\bar{y}_s = -5\,\text{cm}$ und $\bar{z}_s = 3\,\text{cm}$.

c) die Hauptträgheitsmomente I_1 und I_2 sowie die Hauptachsenrichtungen. Nutzen Sie hierfür die gerundeten Trägheitsmomente $I_y = 2230\,\text{cm}^4$, $I_z = 1046\,\text{cm}^4$ und $I_{yz} = 55\,\text{cm}^4$.

Gegeben: $a = 5\,\text{cm}$, $r = \dfrac{a}{4}$

Hinweise:

- Geben Sie alle Endergebnisse als Zahlenwert mit Einheit (cm bzw. cm^4) an.
- Runden Sie alle Endergebnisse auf zwei Nachkommastellen.
- Halbkreis:

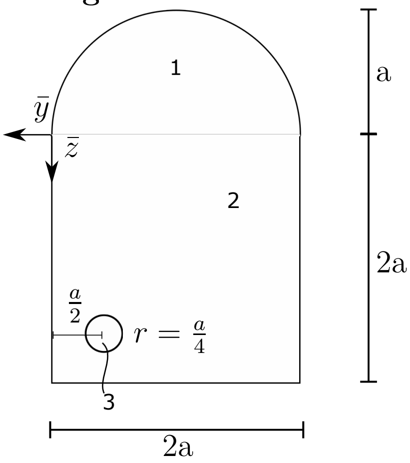


$$I_\eta = \frac{R^4}{72\pi}(9\pi^2 - 64) \qquad I_{\xi\eta} = 0$$

$$I_\xi = \frac{\pi R^4}{8} \qquad d = \frac{4R}{3\pi}$$

Musterlösung - Aufgabe 2

a) Schwerpunkt:



i	A_i	$\bar{y}_i$	$\bar{z}_i$
1	$\frac{1}{2}a^2\pi$	$-a$	$-\frac{4a}{3r}$
2	$(2a)^2$	$-a$	a
3	$-(\frac{a}{4})^2$	$-\frac{a}{2}$	$\frac{3}{2}a$

$$y_s = \frac{\sum A_i \bar{y}_i}{\sum A_i} = \frac{(\frac{1}{2}a^2\pi)(-a) + (2a)^2(-a) - ((\frac{a}{4})^2\pi)(-\frac{a}{2})}{\frac{1}{2}a^2\pi + (2a)^2 a - (\frac{a}{4})^2\pi} \approx -5,09cm$$

$$z_s = \frac{\sum A_i \bar{z}_i}{\sum A_i} = \frac{(\frac{1}{2}a^2\pi)(-\frac{4a}{3\pi}) + (2a)^2(-a) - ((\frac{a}{4})^2\pi\frac{3}{2}a)}{\frac{1}{2}a^2\pi + (2a)^2 a - (\frac{a}{4})^2\pi} \approx 2,83cm$$

b) hier $\bar{y}_i = -5cm$, $\bar{z}_i = 3cm$, A_i aus a)

i	I_{yi}	z_{si}	$A_i z_{si}^2$
1	$\frac{a^4}{72\pi}(9\pi^2 - 64) \approx 68,5981cm^4$	$-\frac{4a}{3\pi} - \bar{z}_s = -5,1221cm$	$\frac{1}{2}a^2\pi(-\frac{4a}{3\pi} - \bar{z}_s)^2 \approx 1030,2680cm^4$
2	$\frac{(2a)^4}{12} \approx 833,3333cm^4$	$(a - \bar{z}_s) = 2cm$	$(2a)^2(a - \bar{z}_s)^2 = 400cm^4$
3	$-\frac{\pi(\frac{a}{4})^4}{4} \approx -1,9175cm^4$	$\frac{3}{2}a - \bar{z}_s = 4,5cm$	$-(\frac{a}{4})^4\pi(\frac{3}{2}a - \bar{z}_s)^2 \approx -99,402cm^4$

$$I_y = \sum I_{yi} + \sum A_i z_{si}^2$$
$$\Rightarrow I_y \approx 2230,88cm^4$$

i	I_{zi}	y_{si}	$A_i ysi^2$
1	$\frac{\pi a^4}{8} \approx 245,437cm^4$	$-a - \bar{y}_s = 0cm$	$0cm^4$
2	$\frac{(2a)^4}{12} \approx 833,3333cm^4$	$-a - \bar{y}_s = 0cm$	$0cm^4$
3	$-\frac{\pi(\frac{a}{4})^4}{4} \approx -1,975cm^4$	$-\frac{a}{2} - \bar{y}_s = 2,5cm$	$-\pi(\frac{a}{2})^2(\frac{a}{2} - \bar{y}_s)^2 \approx -30,6797cm^4$

$$I_z = \sum I_{zi} + \sum A_i y_{si}^2$$
$$\Rightarrow I_z \approx 1046,17cm^4$$

i	I_{zyi}	$A_i z_{si} y_{si}$
1	$0cm^4$	$0cm^4$
2	$0cm^4$	$0cm^4$
3	$0cm^4$	$-\pi(\frac{a}{2})^2(-\frac{a}{2} - \bar{y}_s)(\frac{3}{2}a - \bar{z}_s) \approx -55,2233cm^4$

$$I_{yz} = \sum I_{yzi} - \sum A_i y_{si} z_{si}$$

$$\Rightarrow I_y z \approx 55,22cm^4$$

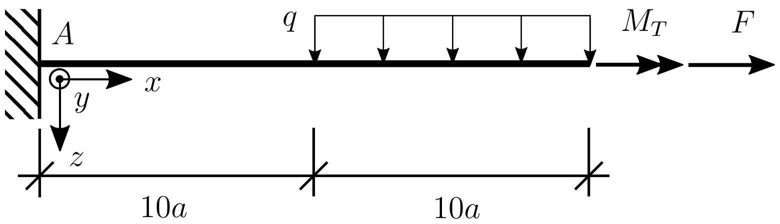
c) gegeben: $I_y = 2230cm^4$; $I_z = 1046cm^4$; $I_{yz} = 55cm^4$

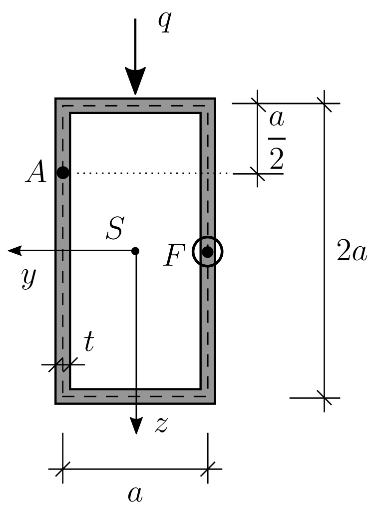
$$I_{\frac{1}{2}} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{(\tfrac{I_y - I_z}{2})^2 + I_{yz}^2} \approx \begin{cases} I_1 = 2232,55cm^4 \\ I_2 = 1043,45cm^4 \end{cases}$$

$$\varphi^* = \frac{1}{2}\arctan(\frac{2yz}{I_y - I_z}) \approx 2,65°$$

$$\begin{aligned} I_\eta &= \frac{1}{2}(I_y + I_z) + \frac{1}{2}(I_y - I_z)\cos(2\varphi^*) + I_{yz}\sin(2\varphi^*) \approx I_y \\ \varphi_1 &= \varphi^* \approx 2,65° \\ \varphi_2 &= \varphi_1 + 90° \approx 92,65° \end{aligned}$$

3. Aufgabe: (ca. 24 % der Gesamtpunkte)





Der dargestellte Kragarm der Länge $20a$ hat den rechts dargestellten rechteckigen Hohlquerschnitt mit Wandstärke t und Schubmodul G. Das System wird durch ein Torsionsmoment M_T, eine Einzellast F und eine Streckenlast q wie dargestellt belastet.

a) Skizzieren Sie unter Angabe der maßgebenden Ordinaten alle Schnittgrößenverläufe, die im System auftreten bezüglich des gegebenen Koordinatensystems.

b) Berechnen Sie alle Spannungen, die im Punkt A (Koordinaten $x = 0, y = a/2, z = -a/2$) auftreten, und stellen Sie den Spannungszustand an einem geeigneten infinitesimalen Flächenelement in der x, z-Ebene dar.

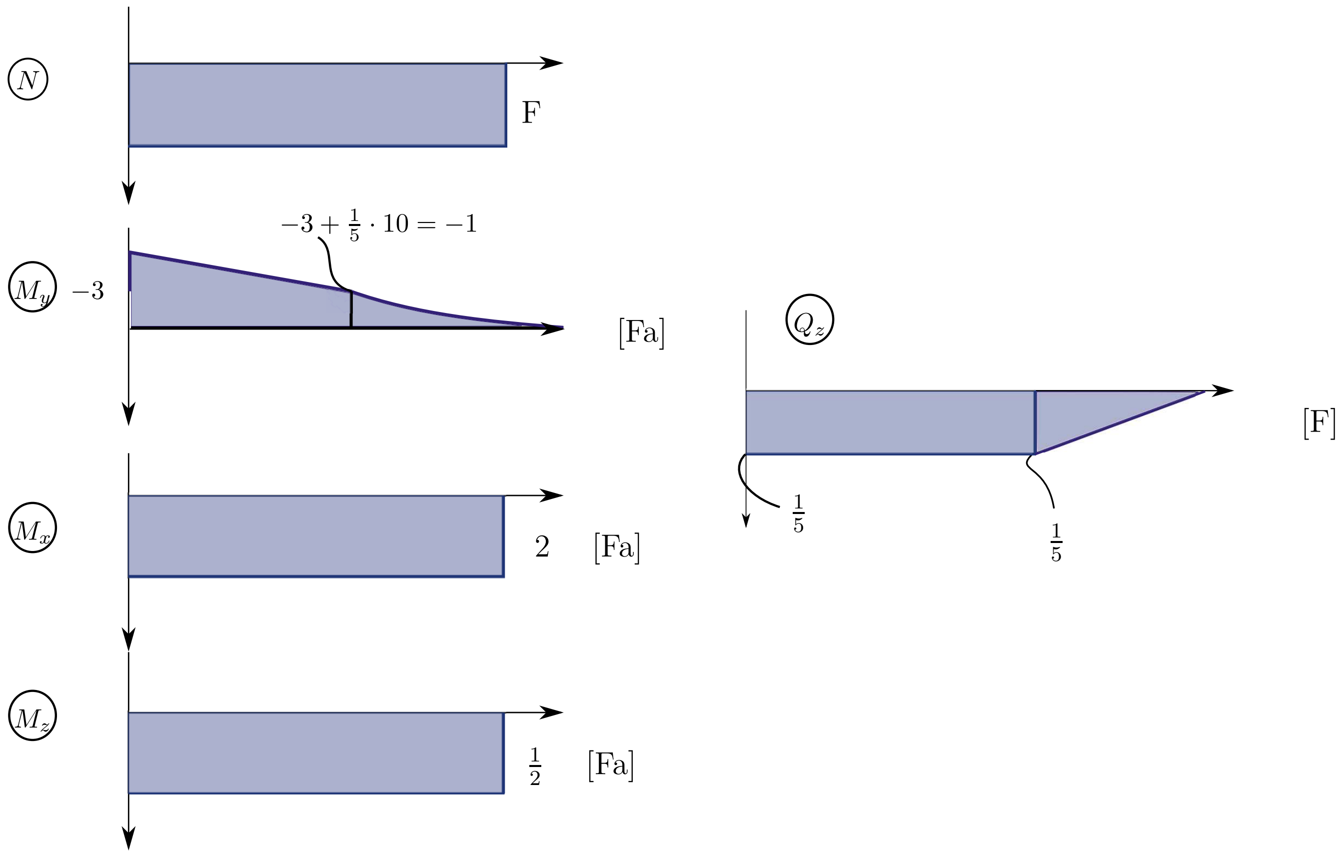
c) Stellen Sie diesen Spannungszustand als Mohrschen Spannungskreis dar.

Gegeben: F, a, G, sowie $t = a/10$, $M_T = 2Fa$, $q = \dfrac{F}{50a}$

Hinweis: Eine Verwölbung des Querschnitts ist nicht verhindert. Es darf ein dünnwandiger Querschnitt angenommen werden.

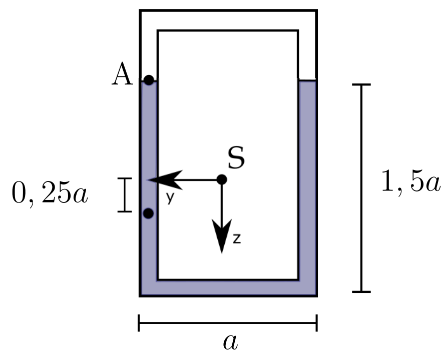
Musterlösung - Aufgabe 3

a)



b)

- Querschnittskennwerte:



$$A = 0,6a^2$$

$$I_y = 2 \cdot [\underbrace{\frac{at^3}{2}}_{\approx 0} + at \cdot a^2 + \frac{t(2a)^3}{12}] = \frac{1}{3}a^4$$

$$I_z = 2 \cdot [\underbrace{\frac{2a \cdot t^3}{2}}_{\approx 0} + \frac{a^3 t}{12} + 2at \cdot \frac{a}{2}^2] = \frac{7}{60}a^4$$

$$W_T = 2 \cdot (a \cdot 2 \cdot a)t = 0,4a^3$$

$$S_y = a \cdot t \cdot a + 2(1,5a \cdot t)0,25a = \frac{7}{40}a^3$$

- Normalspannung:

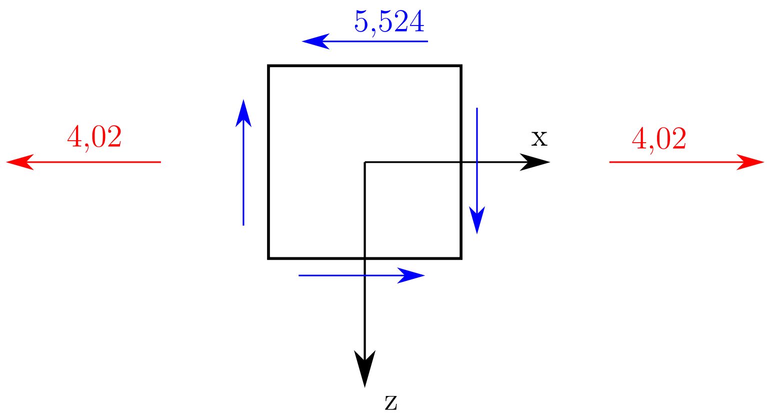
$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_y}{I_y}z - \frac{M_z}{I_z}y = \frac{F}{0,6a^2} + -\frac{3Fa}{\frac{1}{3}a^4} \cdot (-\frac{a}{2}) - \frac{\frac{1}{2}Fa}{\frac{7}{60}a^4}\frac{a}{2} = 4,02\frac{F}{a^2}$$

- Schubspannung:

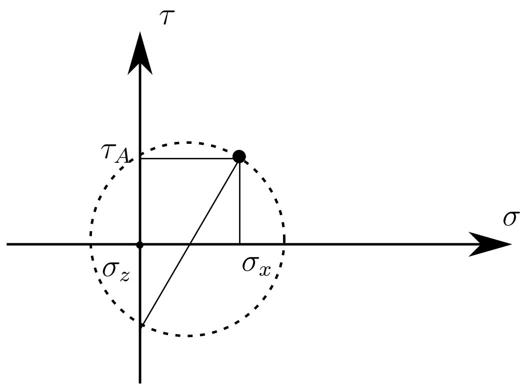
$$\tau_A^Q = \frac{QS_y}{I_y b} - \frac{M_x}{W_t} = \frac{\frac{1}{5}F \cdot \frac{7}{40}a^3}{\frac{1}{3}a^4 \cdot (\frac{2}{10}a)} = 0,524\frac{F}{a^2} \qquad \tau_A^{M_T} = \frac{2Fa}{0,4a^3} = 5\frac{F}{a^2}$$

$$\Rightarrow \tau_A = 5,524\frac{F}{a^2}$$

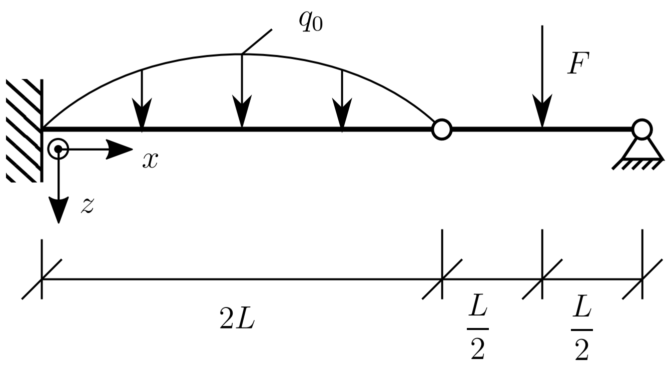
Darstellung $[F/a^2]$



c)



4. Aufgabe: (ca. 20 % der Gesamtpunkte)



Der dargestellte Balken wird durch die sinusförmige Streckenlast $q(x)$ mit dem Maximalwert q_0 im Bereich $0 \leq x \leq 2L$ sowie der Einzellast F bei $x = \frac{5}{2}L$ belastet.

a) Geben Sie den Verlauf der Steckenlast $q(x)$ an.

b) Geben Sie alle erforderlichen Rand- und Übergangsbedingungen an.

c) Führen Sie die Integrationen der Biegeliniendifferentialgleichung für den gesamten Träger durch, so dass Sie die Biegelinie in Abhängigkeit der Integrationskonstanten und der Koordinaten x erhalten.

d) Geben Sie den Grad der statischen Unbestimmtheit an.

Musterlösung - Aufgabe 4

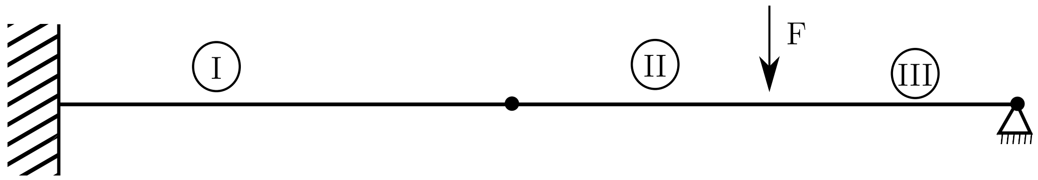
a)

$$q(x) = A\sin Bx; \quad \text{Periode } T = 4L \;\rightarrow\; \frac{2\pi}{B} = 4L \Rightarrow B = \frac{2\pi}{4L} = \frac{\pi}{2L}$$

$$A = q_0$$

$$\Rightarrow q(x) = q_0 \sin\left(\frac{\pi}{2L}x\right)$$

b)



$\boxed{x=0}$	$\boxed{x=2L}$	$\boxed{x=\frac{5}{2}L}$	$\boxed{x=3L}$
$w' = 0$	$w^{links} = w^{rechts}$	$w^{li} = w^{re}$	$w = 0$
$w = 0$	$M^{li} = M^{re}$	$w'^{li} = w'^{re}$	$M = 0$
	$Q^{li} = Q^{re}$	$M^{li} = M^{re}$	
		$Q^{li} = F + Q^{re}$	

je Rand-/Übergangsbedingung

c) <u>Bereich I:</u> $0 \leq x \leq 2L$

$$\begin{aligned}
EIw_I'''' &= q(x) = q_0 \sin(\frac{\pi}{2L}x)\\
EIw_I''' &= -q_0 \cos(\frac{\pi}{2L}x)\frac{2L}{\pi} + C_1\\
EIw_I'' &= -q_0 \sin(\frac{\pi}{2L}x)(\frac{2L}{\pi})^2 + C_1 x + C_2\\
EIw_I' &= q_0 \cos(\frac{\pi}{2L}x)(\frac{2L}{\pi})^3 + \frac{1}{2}C_1 x^2 + C_2 x + C_3\\
EIw_I &= q_0 \sin(\frac{\pi}{2L}x)(\frac{2L}{\pi})^4 + \frac{1}{6}C_1 x^3 + \frac{1}{2}C_2 x^2 + C_3 x + C_4
\end{aligned}$$

<u>Bereich II:</u> $2L \leq x \leq \frac{5}{2}L$

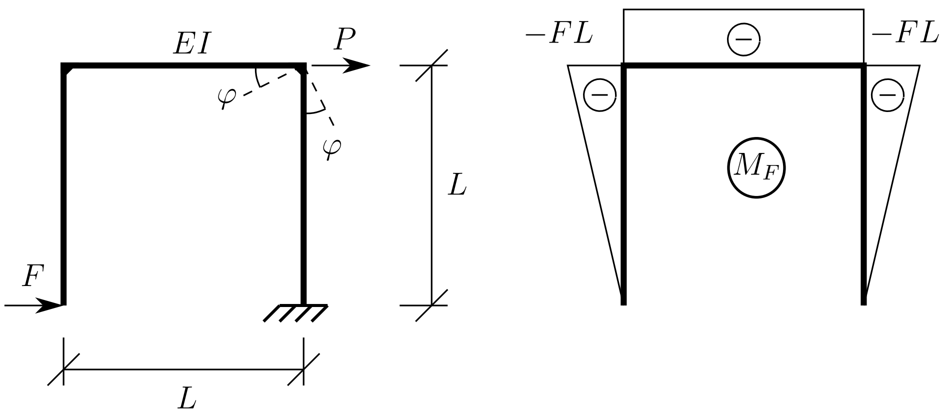
$$\begin{aligned}
EIw_{II}'''' &= 0\\
EIw_{II}''' &= C_5\\
EIw_{II}'' &= C_5 x + C_6\\
EIw_{II}' &= \frac{1}{2}C_5 x^2 + C_6 x + C_7\\
EIw_{II} &= \frac{1}{6}C_5 x^3 + \frac{1}{2}C_6 x^2 + C_7 x + C_8
\end{aligned}$$

Bereich III: $\frac{5}{2}L \leq x \leq 3L$

$$\begin{aligned}
EIw_{III}'''' &= 0 \\
EIw_{III}''' &= C_9 \\
EIw_{III}'' &= C_9 x + C_{10} \\
EIw_{III}' &= \frac{1}{2}C_9 x^2 + C_{10}x + C_{11} \\
EIw_{III} &= \frac{1}{6}C_9 x^6 + \frac{1}{2}C_{10}x^2 + C_{11}x + C_{12}
\end{aligned}$$

d) Kragarm + Zusätzliches Feld und 2-weriges Lager $\Rightarrow$ 1-fach stat. unbestimmt

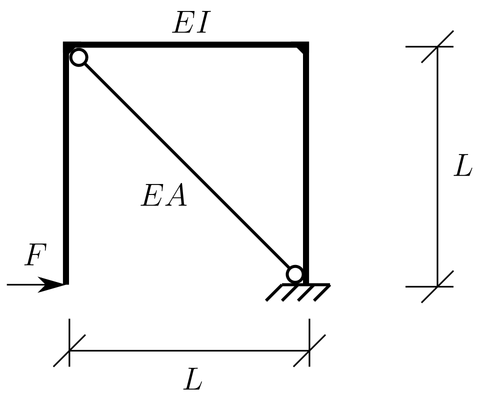
5. Aufgabe: (ca. 24 % der Gesamtpunkte)



Für obiges System ist der Momentenverlauf M_F infolge der Last F gegeben. Die Dehnsteifigkeit des Balkens ist zu vernachlässigen.

a) Wie groß muss die Last P sein, damit $\varphi = 0$ gilt?

Das System wird durch einen Stab mit der Dehnsteifigkeit $EA = \dfrac{3\,EI}{5\,L^2}$ ergänzt und nur noch durch die Last F belastet.



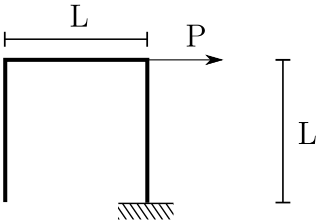
b) Berechnen Sie die Kraft im Stab.

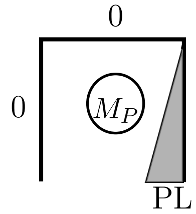
Gegeben: $L,\ F,\ EI$

<u>*Hinweis:*</u> Die Aufgabe ist mit dem Prinzip der virtuellen Kräfte zu lösen.

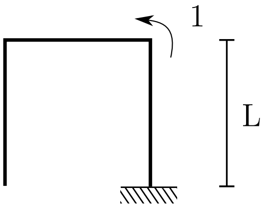
Musterlösung - Aufgabe 5

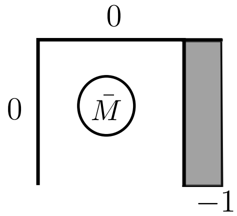
a) Last P berechnen:





infolge der Last P,





und infolge der Last 1 in Richtung der gesuchten Verdrehung.

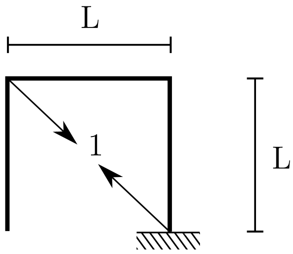
Verdrehung φ:

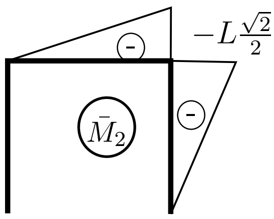
$$\varphi = \int \frac{(M_F + M_P)\bar{M}}{EI}\,dx = \underbrace{\frac{1}{EI}\frac{1}{2}(-FL)(-1)L}_{\text{infolge F}} + \underbrace{\frac{1}{EI}\frac{1}{2}(PL)(-1)L}_{\text{infolge P}}$$

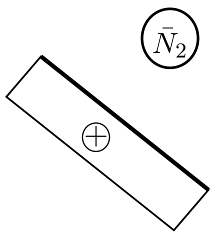
$$= \frac{1}{2}\frac{L^2}{EI}(F-P)$$

$$\Rightarrow\ \varphi = 0 \ \text{ für } \ P = F.$$

b) Stabkraft berechnen:







Einflusszahlen und Stabkraft:

$$\alpha_{10} = \int \frac{M_F\bar{M}_2}{EI}\,dx + \int \frac{N_F\bar{N}_2}{EA}\,dx$$

$$= \frac{L}{EI}\left(\frac{1}{2}(-FL)(-L\frac{\sqrt{2}}{2}) + \frac{1}{3}(-FL)(-L\frac{\sqrt{2}}{2})\right) + \frac{L}{EA}\cdot 0 = \frac{5\sqrt{2}FL^3}{12EI}$$

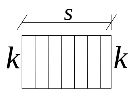
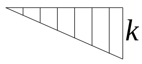
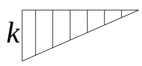
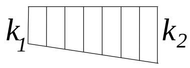
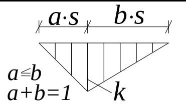
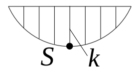
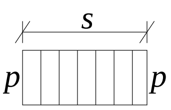
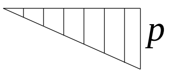
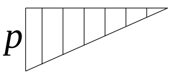
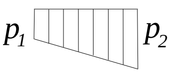
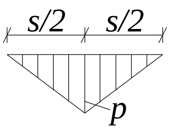
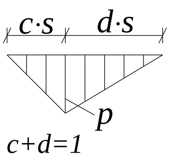
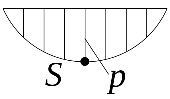
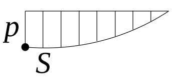
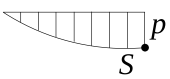
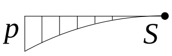
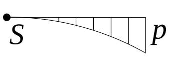
$$\alpha_{11} = \int \frac{\left(\bar{M}_2\right)^2}{EI}\,dx + \int \frac{\left(\bar{N}_2\right)^2}{EA}\,dx$$

$$= \frac{L}{EI}\left(\frac{2}{3}\left(-L\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right) + \frac{\sqrt{2}L}{\frac{3EI}{5L^2}}\cdot 1^2 = \frac{(1+5\sqrt{5})L^3}{3EI}$$

$$\Rightarrow S = -\frac{\alpha_{10}}{\alpha_{11}} = \frac{-5\sqrt{2}FL^3}{12EI}\frac{3EI}{(1+5\sqrt{2})L^3} = \frac{-5\sqrt{2}}{4(1+5\sqrt{2})}F \approx -0,22F$$

Koppeltafel

Werte der Integrale $\int_0^s P(x)\cdot K(x)\mathrm{dx}$

$K(x)$ / $P(x)$						
	pks	$\frac{1}{2}pks$	$\frac{1}{2}pks$	$\frac{p}{2}(k_1+k_2)s$	$\frac{1}{2}pks$	$\frac{2}{3}pks$
	$\frac{1}{2}pks$	$\frac{1}{3}pks$	$\frac{1}{6}pks$	$\frac{p}{6}(k_1+2k_2)s$	$\frac{1}{6}pk(1+a)s$	$\frac{1}{3}pks$
	$\frac{1}{2}pks$	$\frac{1}{6}pks$	$\frac{1}{3}pks$	$\frac{p}{6}(2k_1+k_2)s$	$\frac{1}{6}pk(1+b)s$	$\frac{1}{3}pks$
	$\frac{k}{2}(p_1+p_2)s$	$\frac{k}{6}(p_1+2p_2)s$	$\frac{k}{6}(2p_1+p_2)s$	$[\frac{p_1}{6}(2k_1+k_2)$ $+\frac{p_2}{6}(k_1+2k_2)]s$	$[\frac{k}{6}[p_1(1+b)+$ $p_2(1+a)]s$	$\frac{k}{3}(p_1+p_2)s$
	$\frac{1}{2}pks$	$\frac{1}{4}pks$	$\frac{1}{4}pks$	$\frac{p}{4}(k_1+k_2)s$	$\frac{pk}{12b}(3-4a^2)s$	$\frac{5}{12}pks$
	$\frac{1}{2}pks$	$\frac{pk}{6}(1+c)s$	$\frac{pk}{6}(1+d)s$	$\frac{p}{6}[k_1(1+d)+$ $k_2(1+c)]s$	$\frac{pk}{6bc}(2c-c^2-a^2)s$ für $c \geq a$	$\frac{pk}{3}(1+cd)s$
	$\frac{2}{3}pks$	$\frac{1}{3}pks$	$\frac{1}{3}pks$	$\frac{p}{3}(k_1+k_2)s$	$\frac{pk}{3}(1+ab)s$	$\frac{8}{15}pks$
	$\frac{2}{3}pks$	$\frac{1}{4}pks$	$\frac{5}{12}pks$	$\frac{p}{12}(5k_1+3k_2)s$	$\frac{pk}{12}(5-a-a^2)s$	$\frac{7}{15}pks$
	$\frac{2}{3}pks$	$\frac{5}{12}pks$	$\frac{1}{4}pks$	$\frac{p}{12}(3k_1+5k_2)s$	$\frac{pk}{12}(5-b-b^2)s$	$\frac{7}{15}pks$
	$\frac{1}{3}pks$	$\frac{1}{12}pks$	$\frac{1}{4}pks$	$\frac{p}{12}(3k_1+k_2)s$	$\frac{pk}{12}(1+b+b^2)s$	$\frac{1}{5}pks$
	$\frac{1}{3}pks$	$\frac{1}{4}pks$	$\frac{1}{12}pks$	$\frac{p}{12}(k_1+3k_2)s$	$\frac{pk}{12}(1+a+a^2)s$	$\frac{1}{5}pks$

$S \stackrel{\wedge}{=}$ Scheitel einer quadratischen Parabel

Modulprüfung
Festigkeitslehre
am 17. August 2021

Lösungsvorlage

Name: .... Vorname: ....

Matr.-Nr: .... Studiengang: ....