Modulprüfung

Dynamik

18. August 2021

Name: .... Vorname: ....

Matr.-Nr: .... Studiengang: ....

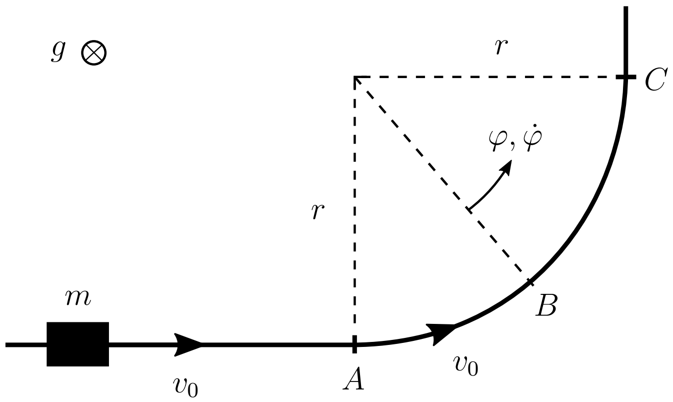
Hinweise:

- Bitte schreiben Sie deutlich lesbar. Zeichnungen müssen sauber und übersichtlich sein. Die Benutzung roter und grüner Farbstifte ist nicht zugelassen.
- Aufgaben werden nur beurteilt, wenn sie auf den ausgegebenen Blättern gelöst sind. Eventuell abgegebene Formelsammlungen werden als nicht vorhanden betrachtet. Trennen Sie die Aufgabenblätter nicht auf.
- Bei den Aufgaben muss eindeutig der Lösungsweg erkennbar sein. Ein Ergebnis ohne Lösungsweg wird nicht bewertet. Sollten für eine Aufgabe mehrere widersprüchliche Lösungen angegeben sein, so wird keine bewertet. Streichen Sie deshalb falsche Rechenschritte oder Zeichnungen durch.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite.

Aufgabe	1	2	3	4	Σ
Punkte					
Korrektor					

(Eintrag erfolgt durch Institut)

1. Aufgabe: (ca. 25 % der Gesamtpunkte)



Ein Fahrzeug der Masse m bewegt sich zunächst geradlinig mit der Geschwindigkeit v_0. Das Fahrzeug wird als Massepunkt betrachtet. Der Hafttreibungskoeffizient zwischen Fahrzeug und Fahrbahn ist μ.

a) Im Punkt A geht die Fahrbahn in einen Kreisbogen mit Radius r über, wobei die Geschwindigkeit v_0 im Teilstück AB beibehalten wird.
Wie groß darf die Geschwindigkeit $v_0 = v_{max}$ im Bereich AB höchstens sein, damit kein Gleiten eintritt?

b) Im folgenden Teilstück BC bremst das Fahrzeug mit haftenden Reifen (kein Schlupf) und gegebener konstanter Winkelbeschleunigung:

$$\ddot{\varphi} = -b$$

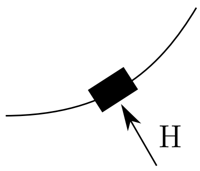
Berechnen Sie $\dot{\varphi}(t)$.
Zeichnen Sie an einem beliebigen Punkt zwischen B und C die auf das Fahrzeug wirkenden Kräfte ein. Berechnen Sie deren Resultierende F. An welcher Stelle ist sie maximal?

c) Ein vorsichtiger Fahrer fährt nun mit $v_0 = v_{max}/2$ (siehe Aufgabenteil a) in die Kreisbahn ein. Wie groß darf die Verzögerung b höchstens sein, damit im Bereich BC kein Gleiten eintritt?

Gegeben: m, μ, r, g, $b > 0$

Musterlösung - Aufgabe 1

a)



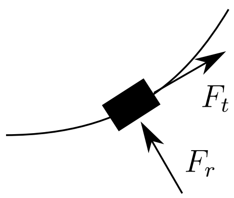
$$H = \mu \underbrace{N}_{=mg} > ma_n \qquad \text{mit } a_n = \frac{v_{max}}{r}$$

$$\Rightarrow \mu mg \geq m \cdot \frac{v_{max}^2}{r} \Rightarrow \underline{\underline{v_{max}^2 \leq \mu rg}}$$

b)

$$\ddot{\varphi} = -b\ , \quad b > 0$$
$$\Rightarrow \dot{\varphi} = -bt + c$$
$$\text{mit (AB): } \underline{\underline{\dot{\varphi} = -bt + \frac{v_0}{r}}}$$

$$\text{AB: } r \cdot \dot{\varphi}(t=0) = v_0$$
$$\Rightarrow \quad \dot{\varphi}(t=0) = \frac{v_0}{r}$$



$$F_t = ma_\varphi = mr\ddot{\varphi}$$
$$F_r = ma_r = mr\dot{\varphi}^2$$

Resultierende

$$F = \sqrt{F_t^2 + F_r^2} = \sqrt{(mr\ddot{\varphi})^2 + (mr\dot{\varphi}^2)^2} = mr\sqrt{\ddot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^4}$$
$$= mr\sqrt{b^2 + \left(\frac{v_0}{r} - bt\right)^4}$$

Maximale Kraft:

$$F \to max \quad \Leftrightarrow \quad b^2 + \left(\frac{v_0}{r} - bt\right)^4 \to max \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{v_0}{r} - bt\right)^4 \to max \quad \Leftrightarrow \quad t = 0$$

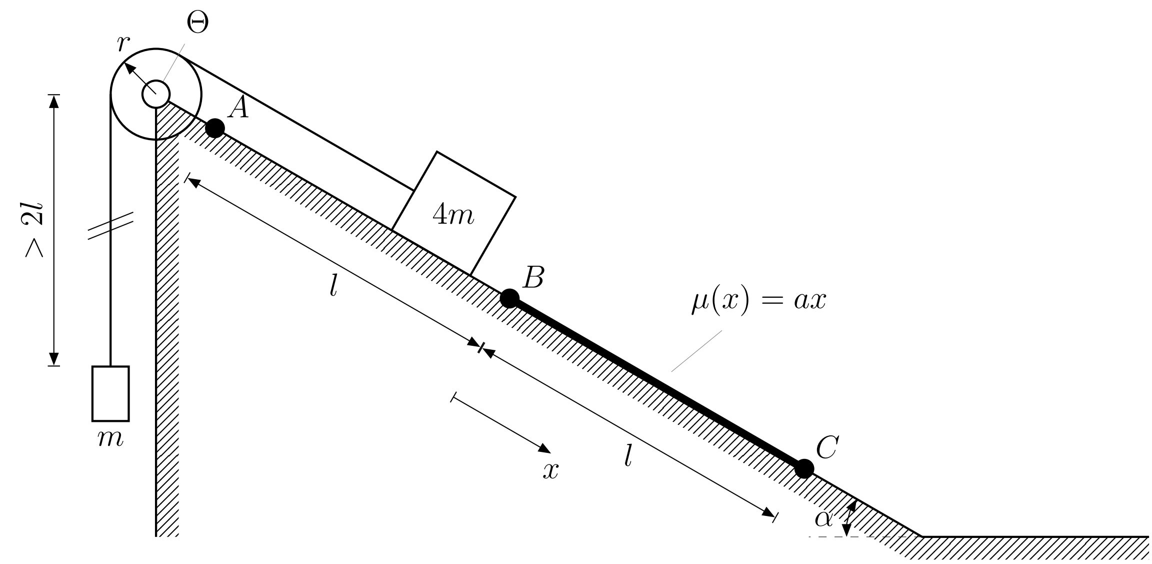
$\Rightarrow F = F_{\mathbf{max}}$ wenn Fahrzeug in B

c)

$$H = \mu mg \overset{!}{>} F_{max} = mr\sqrt{b^2 + (\frac{v_0}{r})^4}$$
$$\text{mit } v_0 = \frac{1}{2}v_{max} = \frac{\sqrt{\mu rg}}{2} \Rightarrow v_0^4 = \frac{\mu^2 r^2 g^2}{16}$$

$$\Rightarrow \mu g \overset{!}{>} \sqrt{b^2r^2 + \frac{v_0^4}{r^2}} \quad \Leftrightarrow \quad \mu g > \sqrt{b^2r^2 + \frac{\mu^2 g^2}{16}} \quad \Leftrightarrow \quad \mu^2 g^2 > b^2 r^2 + \frac{1}{16}\mu^2 g^2$$
$$\Leftrightarrow \quad b^2 < \frac{1}{r^2}\mu^2 g^2 \frac{15}{16} \quad \Leftrightarrow \quad |b| < \sqrt{\frac{15}{16}}\frac{\mu g}{r} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{15}}{4}\frac{\mu g}{r}}}$$

2. Aufgabe: (ca. 25 % der Gesamtpunkte)



Ein Klotz der Masse $4m$ rutscht wie oben dargestellt auf einer schiefen Ebene ($\alpha = 30°$) aus der Ruhe von Punkt A nach Punkt C. Er wird von einem Gegengewicht der Masse m, das mittels dehnstarrem und masselosem Seil über eine frei drehbare Rolle mit dem Klotz $4m$ verbunden ist, gebremst. Die Rolle hat den Radius r und das Massenträgheitsmoment $\Theta = mr^2$. Die Ebene sei zwischen Punkt A und B reibungsfrei. Zwischen Punkt B und C wirkt Gleitreibung mit dem Reibbeiwert $\mu(x) = ax$. Bearbeiten Sie folgende Aufgabenteile mit dem Arbeitssatz:

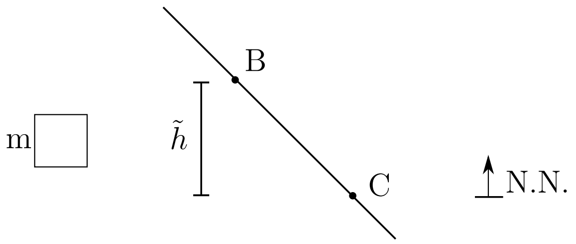
a) Mit welcher Geschwindigkeit erreicht der Klotz $4m$ den Punkt B?

b) Wie groß muss der Parameter a gewählt werden, damit der Block $4m$ in C zum Stillstand kommt?

Gegeben: l, m, r, $\alpha = 30°$

Hinweis: Lösungen mit anderen Methoden als dem Arbeitssatz werden nicht gewertet.

Musterlösung - Aufgabe 2
a) Wahl N.N.



Punkt A:

$$T_A = 0$$
$$V_A = 4mg2l\sin\alpha + mg\tilde{h} = 4mgl + mg\tilde{h}$$

Punkt B:

$$\begin{aligned} T_B &= \frac{1}{2}4mv_B^2 + \frac{1}{2}mv_B^2 + \frac{1}{2}\Theta\dot{\varphi}^2 = 2mv_B^2 + \frac{1}{2}mv_B^2 + \frac{1}{2}mr^2(\frac{v_B}{r})^2 \\ &= 3mv_B^2 \\ V_B &= 4mgl\sin\alpha + mg(\tilde{h} + l) = 3mgl + mg\tilde{h} \end{aligned}$$

EES:

$$T_A + V_A = T_B + V_B$$
$$\Leftrightarrow 4mgl + mg\tilde{h} + 0 = 3mv_B^2 + 3mgl + mg\tilde{h}$$
$$\Leftrightarrow v_B = \sqrt{\frac{1}{3}gl}$$

b)Punkt B: siehe a)
PunktC:

$$V_C = mg(\tilde{h} + 2l) \qquad T_C = 0$$

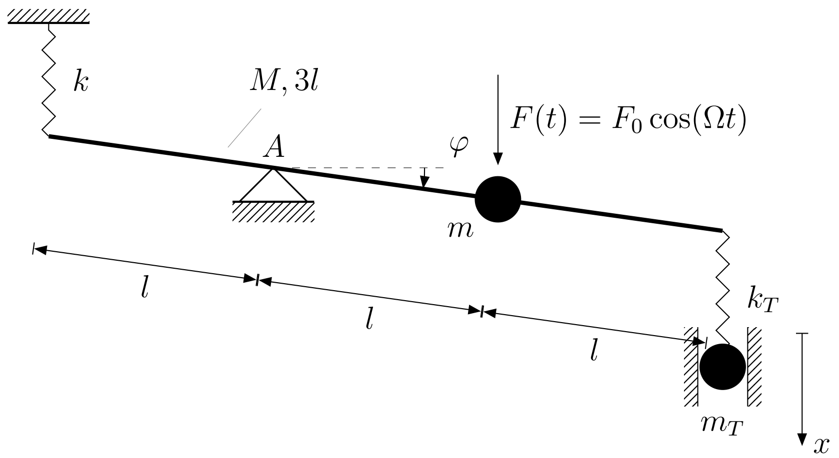
Arbeit Nichtpotentialkräfte:

$$\begin{aligned} W|_B^C &= -\int_0^l \mu N \; dx = -\int_0^l ax\frac{\sqrt{3}}{2}4mg \; dx \\ &= -\sqrt{3}mgal^2 \end{aligned}$$

Arbeitssatz:

$$T_B + V_B + W|_B^C = T_C + V_C$$
$$\Leftrightarrow 3m(\sqrt{\frac{1}{3}gl})^2 + 3mgl + mg\tilde{h} - \sqrt{3}mgal^2 = 0 + 2mgl + mg\tilde{h}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{3}mgal^2 = 2mgl \Leftrightarrow \underline{\underline{a = \frac{2}{\sqrt{3}l}}}$$

3. Aufgabe: (ca. 25 % der Gesamtpunkte)



Die dargestellte Konstruktion besteht aus einem in A frei drehbar gelagerten starren Balken mit Masse M und Länge $3l$ an dem eine Punktmasse m befestigt ist. Am linken Ende des Balkens ist eine Feder der Steifigkeit k angebracht. Um Schwingungen infolge einer harmonischen Kraft $F(t)$, die an der Punktmasse m angreift, zu vermindern wird ein Schwingungstilger mit Masse m_T und Federsteifigkeit k_T angebracht. Der Schwingungstilger bewegt sich nur vertikal. Es wirkt **keine** Gravitation. Die Federn sind für $x = \varphi = 0$ entspannt. Bearbeiten Sie folgende Aufgabenteile:

a) Schneiden Sie das System in allgemeiner Lage frei und bestimmen Sie die Federkräfte für kleine Rotationen $\varphi \ll 1$ in Abhängigkeit der Koordinaten x und φ.

b) Ermitteln Sie die Bewegungsgleichung(en) des Systems für kleine Rotationen $\varphi \ll 1$ unter Verwendung des Drall- und Schwerpunktsatzes in den Koordinaten x und φ.

c) Bestimmen Sie die Federsteifigkeit k_T so, dass der Balken für eine gegebene Erregerfrequenz Ω in Ruhe ist.

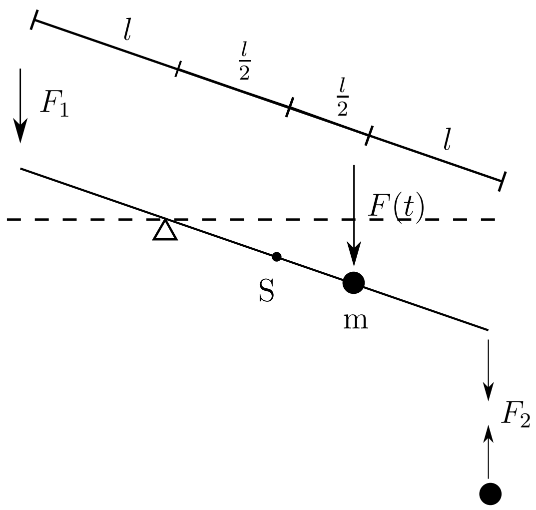
d) Welches Problem tritt bei zu kleiner Wahl der Masse m_T auf, obwohl der Balken wie in c) in Ruhe ist?

Gegeben: l, m, M, k, F_0, Ω, (k_T für Aufgabenteile a) und b))

Hinweis: Lösungen mit anderen Methoden als der synthetischen werden nicht gewertet.

Musterlösung - Aufgabe 3

a)



Federkräfte für $|\varphi| << 1$

$F_1 = kl\varphi$

$F_2 = k_T(x - 2l\varphi)$

b) Massenträgheitsmoment um A:

$$\Theta_A = M\frac{(3l)^2}{12} + M(\frac{l}{2})^2 + ml^2 = Ml^2 + ml^2$$

Punktmasse:

$$\sum F_{iz} = m_T\ddot{x} \quad \Leftrightarrow \quad m_T\ddot{x} = -k_T(x - 2l\varphi) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\ddot{x} + \frac{k_T}{m_T}x - \frac{2lk_T}{m_T}\varphi = 0} \tag{1}$$

Drallsatz um Punkt A:

$$\sum M_{iA} = \Theta_A\ddot{\varphi} \Leftrightarrow \Theta_A\ddot{\varphi} = -kl^2\varphi\cos\varphi + k_T 2l\cos\varphi(x - 2l\varphi) + F(t)l\cos\varphi$$

$$\overset{|\varphi|<<1}{\Leftrightarrow} \underline{\ddot{\varphi} + \frac{kl^2 + 4k_Tl^2}{Ml^2 + ml^2}\varphi - \frac{2k_Tl}{Ml^2 + ml^2}x = \frac{F(t)l}{Ml^2 + ml^2}} \tag{2}$$

c) Balken in Ruhe $\quad \Rightarrow \quad \varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi} = \ddot{\varphi} = 0$

Einsetzen in (2):

$$x = -\frac{1}{2k_T}F_0\cos(\Omega t) \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{x} = \frac{1}{2k_T}\Omega^2F_0\cos(\Omega t)$$

Einsetzen in (1):

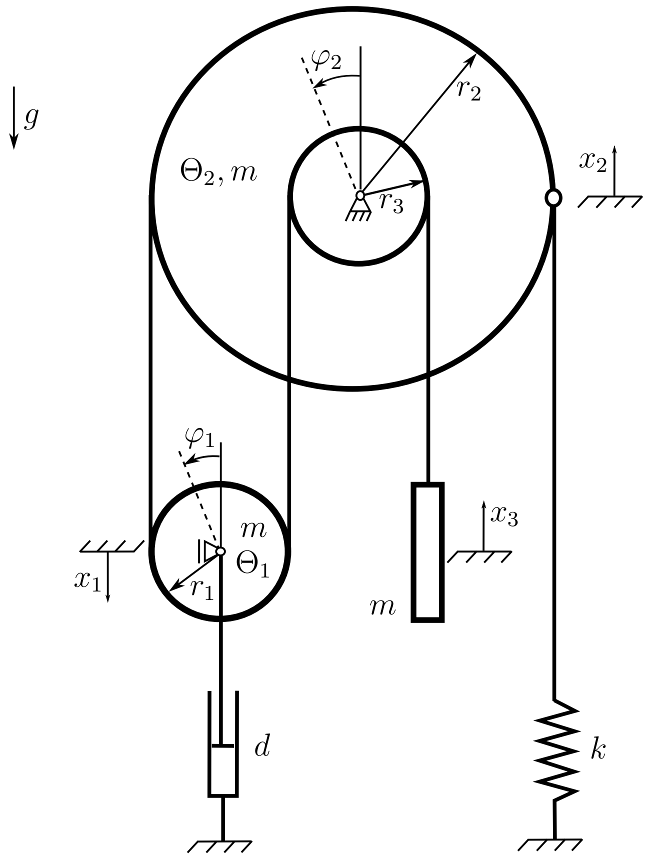
$$\underbrace{\frac{1}{2k_T}F_0\cos(\Omega t)}_{\neq 0}\left(\Omega^2 - \frac{k_T}{m_T}\right) \overset{!}{=} 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad k_T = \Omega^2 m_T \tag{3}$$

d) Aus (3): $m_T \to 0 \Rightarrow k_T \to 0$

$$x = \frac{1}{2k_T}(...) \to \infty \text{ für } m_T \to 0$$

$\Rightarrow$ Bei zu kleiner Wahl von m_T werden die Tilgerauslenkungen zu groß.

4. Aufgabe: (ca. 25 % der Gesamtpunkte)



Bearbeiten Sie zu oben dargestelltem schwingungsfähigen System folgende Teilaufgaben:

a) Geben Sie die Koordinaten x_1, x_2, x_3, φ_1 in Abhängigkeit von φ_2 an.

Gehen Sie im Weiteren einfachheitshalber davon aus, dass $\varphi_1 = \varphi_2$ gilt.

b) Stellen Sie die Bewegungsgleichung in Abhängigkeit der generalisierten Koordinate φ_2 durch Verwendung der Lagrangeschen Gleichungen 2. Art auf.

c) Berechnen Sie die Verdrehung φ_2 in der statischen Ruhelage.

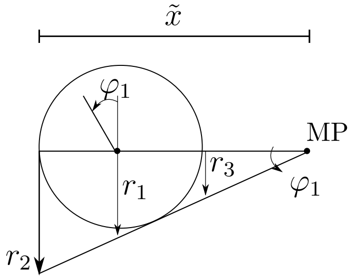
d) Stellen Sie qualitativ, unter Angabe maßgebender Ordinaten, die Lösung der in Aufgabenteil b) ermittelten Bewegungsgleichung für die Anfangsbedingungen $\varphi_2(t=0) = \varphi_0$ und $\dot{\varphi}_2(t=0) = 0$ dar.

Gegeben: $m,\ \Theta_2 = 2\Theta_1 = 4\Theta = 2mr^2,\ k,\ d,\ g,\ 3r_1 = 3r_3 = r_2 = 3r,\ \varphi_0$

Hinweis: Für $\varphi_2 = 0$ ist die Feder entspannt. Zu jedem Zeitpunkt liegt zwischen dem Seil und den Rollen Haften vor (kein Schlupf). Lösen Sie die Aufgabe unter Verwendung der Lagrangeschen Gleichungen 2. Art. Andere Lösungsmethoden werden nicht gewertet.

Musterlösung - Aufgabe 4

a) Kinematik:



$$
\begin{aligned}
&v_2 = r_2\dot{\varphi}_2 && \Rightarrow \boxed{x_2 = 3r\varphi_2}\\
&v_3 = r_3\dot{\varphi}_2 && \Rightarrow \boxed{x_3 = r\varphi_2}\\
&v_1 = (v_2+v_3)\frac{1}{2} \Rightarrow (3r\dot{\varphi}_2 + r\dot{\varphi}_2)\frac{1}{2} && \Rightarrow \boxed{x_1 = 2r\varphi_2}\\
&\frac{x_2}{x_3} = \frac{\tilde{x}}{(\tilde{x}-2r)} \Rightarrow 3r\varphi_2\tilde{x} - 2\cdot 3r\varphi_2 = r\varphi_2\tilde{x} && \Rightarrow \underline{\tilde{x} = 3r}\\
&x_2 = \tilde{x}\varphi_1 \Rightarrow \varphi_1 = \frac{3r\varphi_2}{3r} = \varphi_2 && \Rightarrow \boxed{\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi}
\end{aligned}
$$

b) Energien:

$$
\begin{aligned}
V_{Feder} &= \frac{1}{2}k_2^2 = \frac{1}{2}k(3r\varphi)^2 = \underline{\underline{\frac{9}{2}kr^2\varphi^2}}\\
V_{m_3} &= m_3 g x_3 = m_3 g r\varphi_2 = \underline{\underline{mgr\varphi}}\\
V_{m_1} &= -m_1 g \underbrace{x_1}_{2\cdot x_3} = -m_1 g 2r\varphi_2 = \underline{\underline{-2mgr\varphi}}\\
T_1 &= \frac{1}{2}\Theta_1\dot{\varphi}^2 = \underline{\underline{\Theta\dot{\varphi}^2}}\\
T_2 &= \frac{1}{2}\Theta_2\dot{\varphi}^2 = \underline{\underline{2\Theta\dot{\varphi}^2}}\\
T_3 &= \frac{1}{2}m_3\dot{x}_3^2 = \underline{\underline{\frac{1}{2}m(r\dot{\varphi})^2}} = \underline{\underline{\Theta\dot{\varphi}^2}}\\
T_4 &= \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 = \frac{1}{2}m4(r\dot{\varphi})^2 = \underline{\underline{4\Theta\dot{\varphi}^2}}\\
L &= 8\Theta\dot{\varphi}^2 + mgr\varphi - \frac{9}{2}kr^2\varphi^2
\end{aligned}
$$

Euler-Lagrange Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} &= 16\Theta\dot{\varphi} \rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right) = 16\Theta\ddot{\varphi}\\
\frac{\partial L}{\partial\varphi} &= mgr - gkr^2\varphi
\end{aligned}
$$

Generalisierte Kräfte:

$$
\begin{aligned}
Q &= \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_i}\cdot\boldsymbol{F}_i = -2rF_d && \boldsymbol{F}_i = [-F_d, 0, 0, 0, 0]\\
\boldsymbol{r} &= [x_1, x_2, x_3, \varphi_1, \varphi_2]^{\mathrm{T}}\\
&= [2r\varphi_2, 3r\varphi_2, r\varphi_2, \varphi_2, \varphi_2]^T \rightarrow \frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\varphi} = [2r, 3r, r, 1, 1]^T && d\dot{x}_1 = d2r\dot{\varphi}_2\\
&\Rightarrow \boxed{16\Theta\ddot{\varphi} + 9kr^2\varphi - mgr = -F_d 2r}
\end{aligned}
$$

c) $\ddot{\varphi} = \dot{\varphi} = \varphi = 0: \quad \varphi = \frac{1}{9}\frac{mg}{kr}$

Modulprüfung
Dynamik
am 18. August 2021

Lösungsvorlage

Name: .... Vorname: ....

Matr.-Nr: .... Studiengang: ....