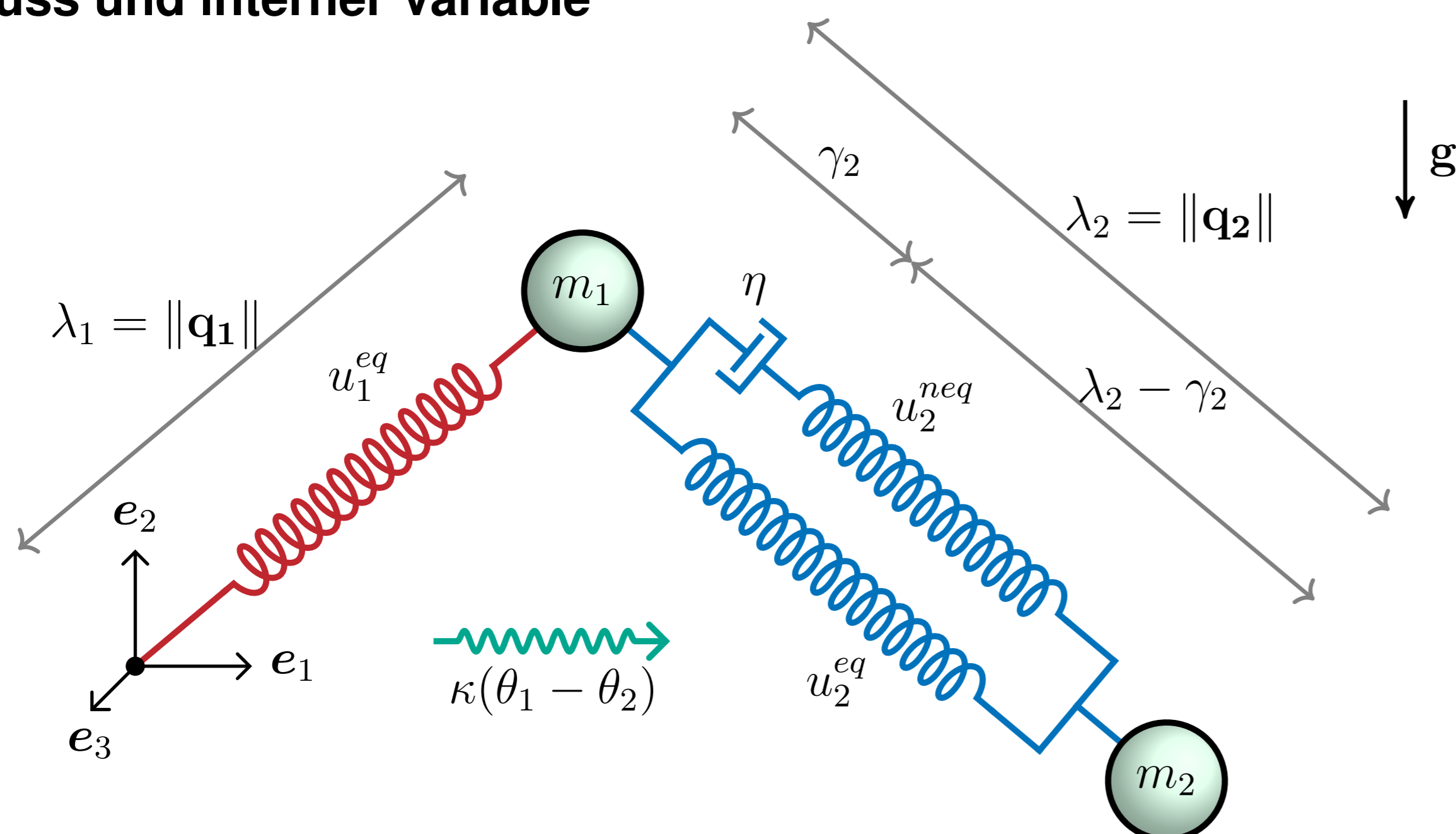


Thermodynamisch konsistente Integration gekoppelter thermoviskoelastischer diskreter Systeme

Vanessa Valdes y Beck | Masterthesis (2020)

Modellproblem

Thermoviskoelastisch gekoppeltes Doppelpendel mit Wärmefluss und interner Variable



■ Zustandsvektor

$$\mathbf{z} = [\mathbf{q}_1^T, \mathbf{q}_2^T, \mathbf{p}_1^T, \mathbf{p}_2^T, \tau_1, \tau_2, \gamma_2]^T$$

mit $\tau \in \{s, \theta, u\}$ als thermodynamische Variable

■ Gesamtenergie

$$\mathcal{E} = \sum_{i,j=1}^2 \left(\frac{1}{2} \mathbf{p}_i^T m_{ij}^{-1} \mathbf{p}_j + u_i(\lambda_i, \tau_i, \gamma_i) \right) + V^{ext}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)$$

■ 1. Hauptsatz der Thermodynamik

$$\dot{\mathcal{E}} = 0$$

■ Gesamtentropie

$$S = \sum_{i=1}^2 s_i(\lambda_i, \tau_i, \gamma_i)$$

■ 2. Hauptsatz der Thermodynamik

$$\dot{S} = D_{cond} + D_{int} \geq 0 \quad \text{mit} \quad D_{cond} \geq 0 \quad \text{und} \quad D_{int} \geq 0$$

GENERIC Formalismus

General Equation for Non-Equilibrium Reversible Irreversible Coupling (GENERIC)

■ Evolutionsgleichungen im GENERIC Format

$$\dot{\mathbf{z}} = \dot{\mathbf{z}}_{rev} + \dot{\mathbf{z}}_{irr} = \mathbf{L}(\mathbf{z}) \nabla \mathcal{E}(\mathbf{z}) + \mathbf{M}(\mathbf{z}) \nabla S(\mathbf{z})$$

mit $\mathbf{L} = -\mathbf{L}^T$, $\mathbf{M} = \mathbf{M}^T$ und $\mathbf{A} \cdot \mathbf{M} \mathbf{A} \geq 0 \forall \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{dim(\mathbf{z})}$

■ Degenerationsbedingungen fordern die thermodynamische Konsistenz ein

$$\mathbf{L} \nabla S = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{M} \nabla \mathcal{E} = \mathbf{0}$$

• 1. Hauptsatz der Thermodynamik

$$\dot{\mathcal{E}}(\mathbf{z}) = \nabla \mathcal{E}(\mathbf{z}) \cdot \mathbf{L}(\mathbf{z}) \nabla \mathcal{E}(\mathbf{z}) + \nabla \mathcal{E}(\mathbf{z}) \cdot \mathbf{M}(\mathbf{z}) \nabla S(\mathbf{z}) = 0$$

• 2. Hauptsatz der Thermodynamik

$$\dot{S}(\mathbf{z}) = \nabla S(\mathbf{z}) \cdot \mathbf{M}(\mathbf{z}) \nabla S(\mathbf{z}) \geq 0$$

Strukturerhaltende Zeitintegration (EME)

■ Approximation der Evolutionsgleichungen

$$\frac{\mathbf{z}_{n+1} - \mathbf{z}_n}{\Delta t} = \mathbf{L}(\mathbf{z}_{n+1}, \mathbf{z}_n) D\mathcal{E}(\mathbf{z}_{n+1}, \mathbf{z}_n) + \mathbf{M}(\mathbf{z}_{n+1}, \mathbf{z}_n) DS(\mathbf{z}_{n+1}, \mathbf{z}_n)$$

■ Direktionalitätsbedingung

$$f(\mathbf{z}_{n+1}) - f(\mathbf{z}_n) = Df(\mathbf{z}_{n+1}, \mathbf{z}_n) \cdot (\mathbf{z}_{n+1} - \mathbf{z}_n)$$

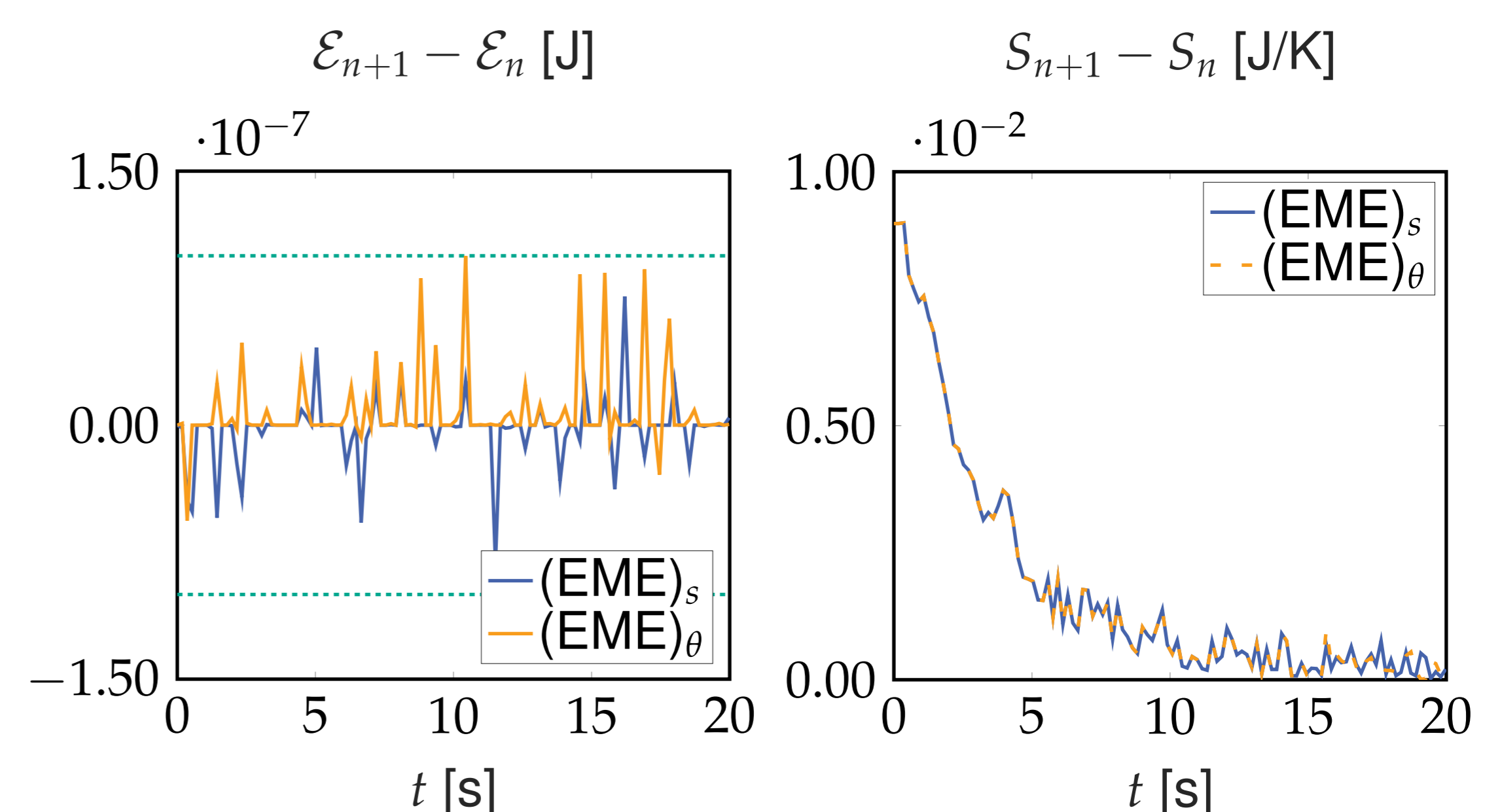
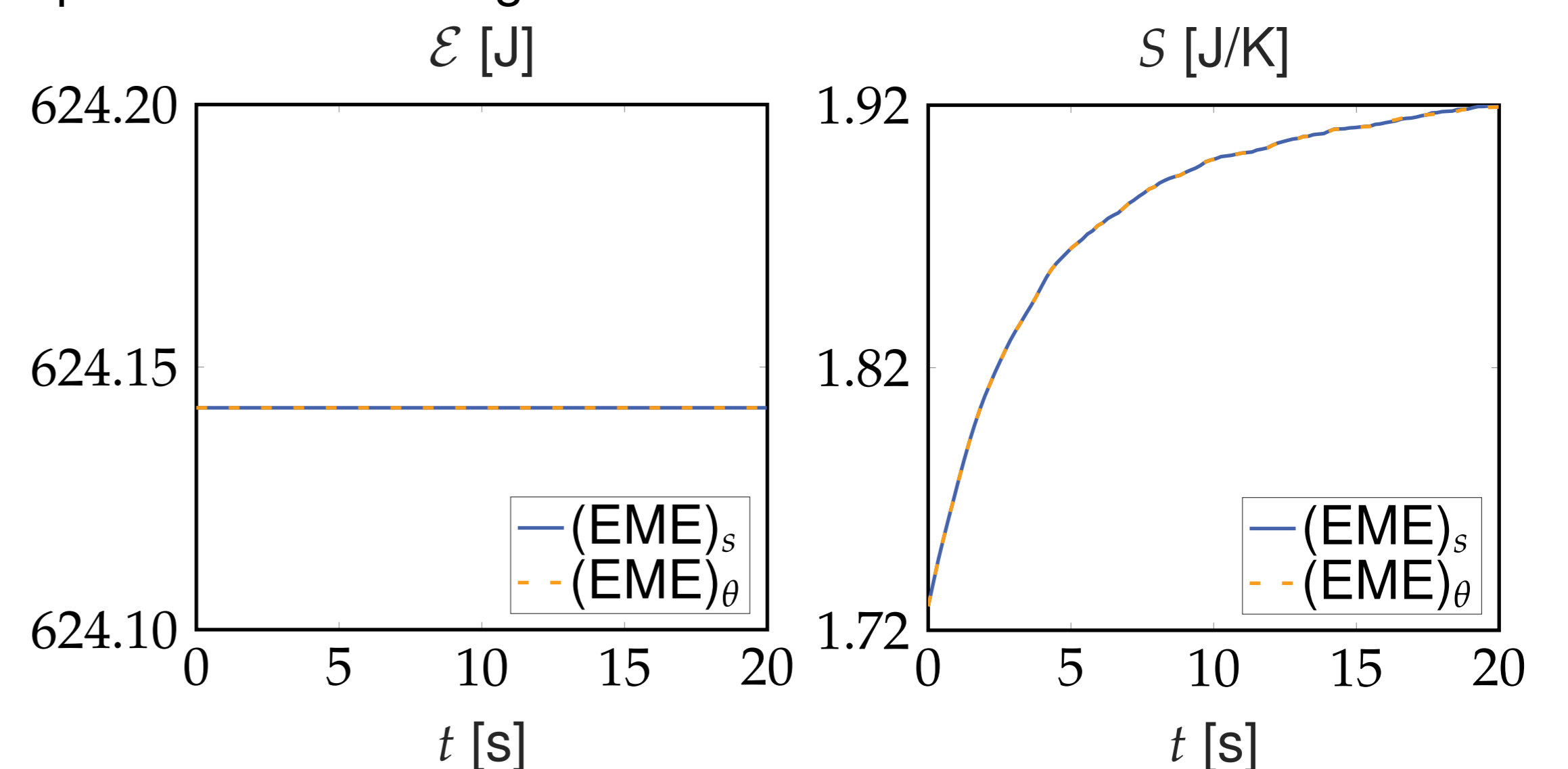
■ Algorithmisch strukturelle Eigenschaften

$$\frac{\mathcal{E}_{n+1} - \mathcal{E}_n}{\Delta t} = \frac{T_{n+1} - T_n}{\Delta t} + \frac{V_{n+1}^{ext} - V_n^{ext}}{\Delta t} + \frac{U_{n+1} - U_n}{\Delta t} = 0 \quad \checkmark$$

$$\frac{S_{n+1} - S_n}{\Delta t} = D_{cond}|_{algo} + D_{int}|_{algo} \geq 0 \quad \checkmark$$

Numerische Untersuchungen

Die numerischen Untersuchungen zeigen die Übereinstimmung der Ergebnisse der strukturerhaltenden 'Energy-Momentum-Entropy' (EME) Zeitintegrationsmethode in der Entropie- sowie der Temperaturformulierung.



Literatur

- [1] CONDE MARTÍN, S., BETSCH, P. und GARCÍA ORDEN, J. C. A temperature-based thermodynamically consistent integration scheme for discrete thermo-elastodynamics. In: *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat* 32, 63–80, 2016.
- [2] CONDE MARTÍN, S. und GARCÍA ORDEN, J. C. On Energy-Entropy-Momentum integration methods for discrete thermo-visco-elastodynamics. In: *Computers and Structures* 181, 3–20, 2017.
- [3] ROMERO, I. Thermodynamically consistent time-stepping algorithms for non-linear thermomechanical systems. In: *Int. J. Numer. Meth. Engng* 79, 706–732, 2009.