Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. habil. Peter Betsch
Prof. Dr.-Ing. habil. Thomas Seelig

Finite-Elemente-Methode für die Dynamik linear-thermoelastischer Systeme am Beispiel eines Dehnstabs

Lunes Hamadi | Bachelorarbeit (2022)

Zusammenfassung

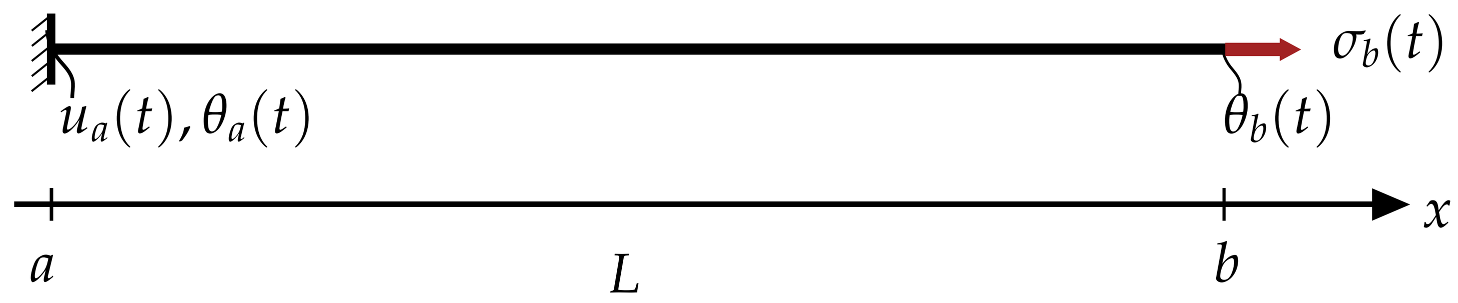
Um das Verhalten eines eingespannten Dehnstabs unter mechanischen und thermischen Belastungen numerisch zu untersuchen, wird zuerst aus der lokalen Impuls- und Energiebilanz ein schwach gekoppeltes Gleichungssystem hergeleitet. Mithilfe der Finite-Elemente-Methode (FEM) und der Mittelpunktsregel wird der Dehnstab unter verschiedenen dynamischen Belastungen simuliert und ausgewertet.

Lineare Thermoelastizität

- Kinematik: $\varepsilon = \varepsilon^{\mathrm{e}} + \varepsilon^{\mathrm{t}} = \frac{\sigma}{E} + \alpha\theta$ mit $\theta = T - T_0$
- Impulsbilanz: $\rho\ddot{u} = Eu'' - \beta\theta'$ mit $\beta = \alpha E$
- Energiebilanz: $\rho c\dot{\theta} - \lambda\theta'' = \beta T\dot{\varepsilon}$
- Vernachlässigung von $\beta T\dot{\varepsilon} \Rightarrow$ Schwache Kopplung ($\beta T\dot{\varepsilon} \approx 0$)

Anfangsrandwertproblem

- Modell des 1D-Dehnstabs mit Randbedingungen



- Anfangswerte: $u(x, t=0) = u_0(x)$, $\theta(x, t=0) = \theta_0(x)$
  $\dot{u}(x, t=0) = \dot{u}_0(x)$, $\dot{\theta}(x, t=0) = \dot{\theta}_0(x)$

Numerische Modellierung

- Räumliche Diskretisierung durch FEM
- Zeitliche Diskretisierung durch Mittelpunktsregel

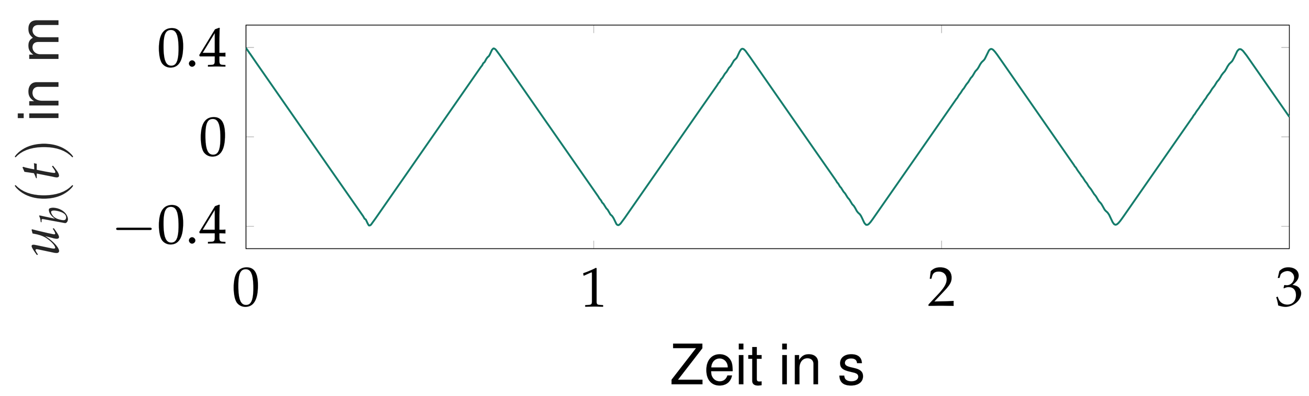
$$\Rightarrow 2\mathbf{M}\left(\frac{\chi_{n+1} - \chi_n}{\Delta t^2} - \frac{\psi_n}{\Delta t}\right) + \mathbf{C}\frac{\chi_{n+1} - \chi_n}{\Delta t} + \mathbf{K}\frac{\chi_{n+1} + \chi_n}{2} = \mathbf{F}_{n+\frac{1}{2}}$$

mit $\chi = (u_1, \theta_1, ..., u_{N_e+1}, \theta_{N_e+1})^{\mathrm{T}}$, $\dot{\chi} = \psi$

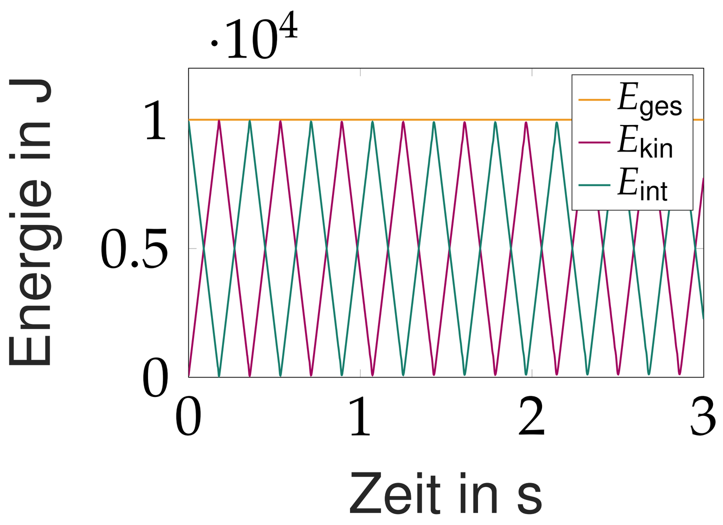
Auswertung unter verschiedenen Belastungen

- Startauslenkung von 40 cm bei $L = 4$ m

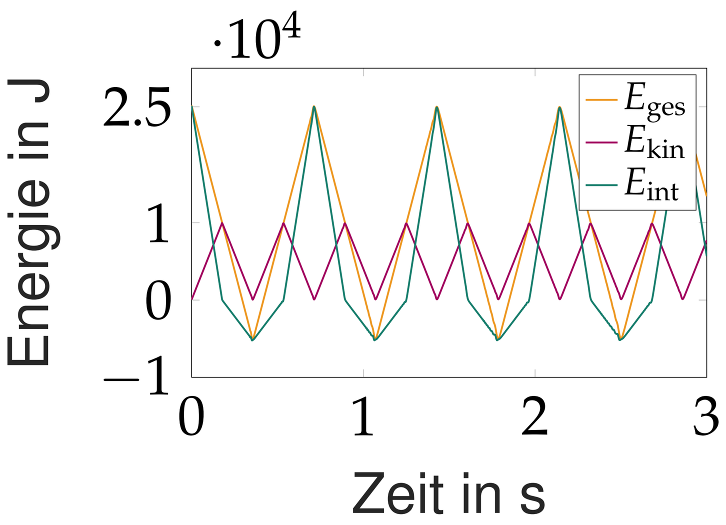
Verschiebung des rechten Randknotens



rein mechanisch ($\alpha = 0$)

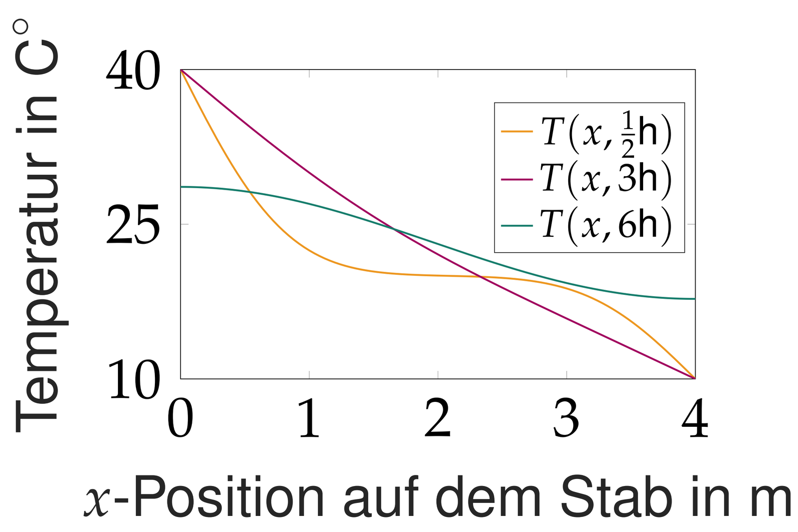


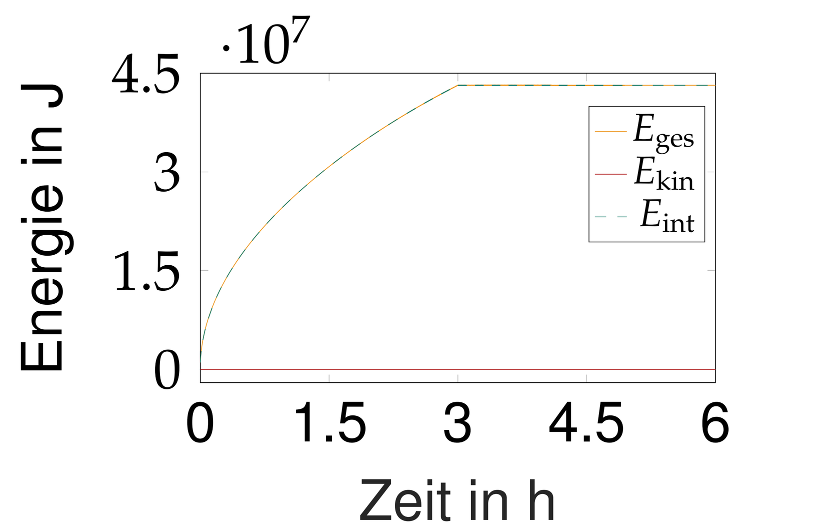
thermoelastisch ($\alpha \neq 0$)



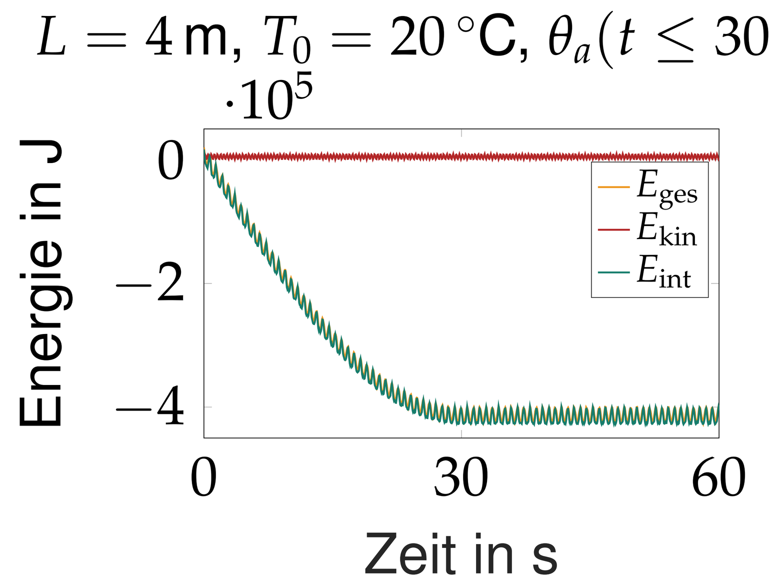
- Keine Temperaturbelastung und schwache Kopplung
  $\Rightarrow$ Deformation unabhängig vom Ausdehnungskoeffizienten α
- E_{ges} im rein mechanischen System (links) konstant
- E_{ges} im thermoelastischen System (rechts sowie im Folgenden) nur im Mittel konstant $\Rightarrow$ keine Energieerhaltung

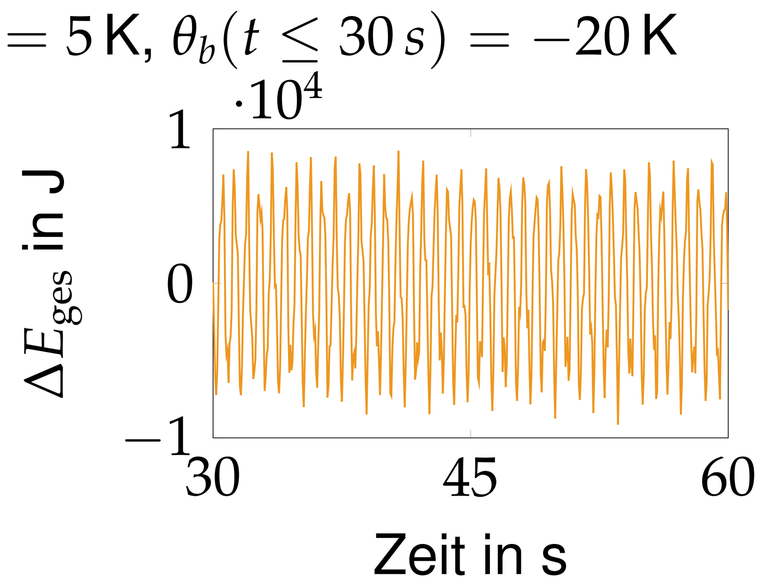
- Rein thermische Belastung für 3 h:
  $L = 4$ m, $T_0 = 20\,°$C, $\theta_a(t \leq 3\,\mathrm{h}) = 20$ K, $\theta_b(t \leq 3\,\mathrm{h}) = -10$ K





- Startauslenkung (40 cm) und thermische Belastung für 30 s:
  $L = 4$ m, $T_0 = 20\,°$C, $\theta_a(t \leq 30\,\mathrm{s}) = 5$ K, $\theta_b(t \leq 30\,\mathrm{s}) = -20$ K

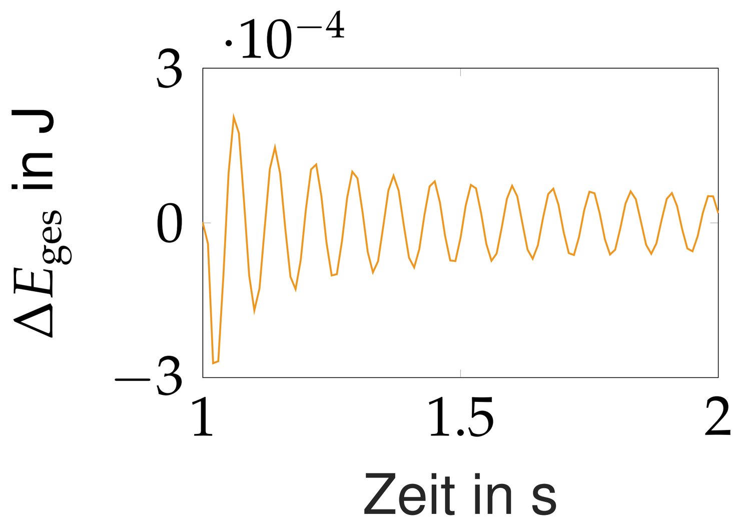




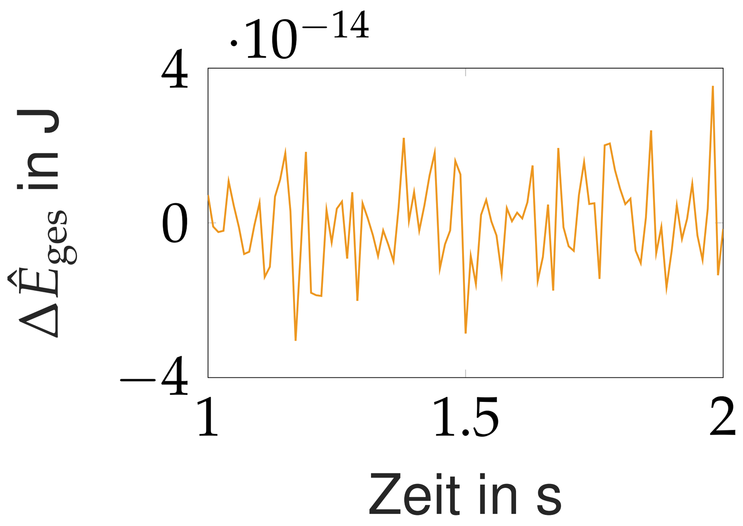
Vergleich mit starker Kopplung und Fazit

- Wärmeflussanstieg bei $x = 0$, Kraftanstieg bei $x = L$ ($t \leq 1$ s)

schwache Kopplung



starke Kopplung



$\Rightarrow$ Starke Kopplung ist energieerhaltend

- Präzise Approximationen der Verschiebungen und Temperaturen macht schwache Kopplung zu guter Alternative zur rechenaufwändigen starken Kopplung
- Gesamtenergie nur im Mittel konstant
- Keine Energieerhaltung durch fehlende Rückkopplung ($\beta T\dot{\varepsilon} \approx 0$)

Literatur

[1] BETSCH, P. *Scriptum zur Vorlesung: Finite-Elemente-Methoden.* Karlsruhe: Karlsruher Institut für Technologie, Institut für Mechanik, 2013.
[2] ESLAMI, M. R. *Finite Elements Methods in Mechanics.* Cham, Schweiz: Springer, 2014.
[3] HETNARSKI, R. B. und ESLAMI, M. R. *Thermal Stresses — Advanced Theory and Applications (2nd ed.)* Cham, Schweiz: Springer, 2019.