Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. habil. Peter Betsch
Prof. Dr.-Ing. habil. Thomas Seelig

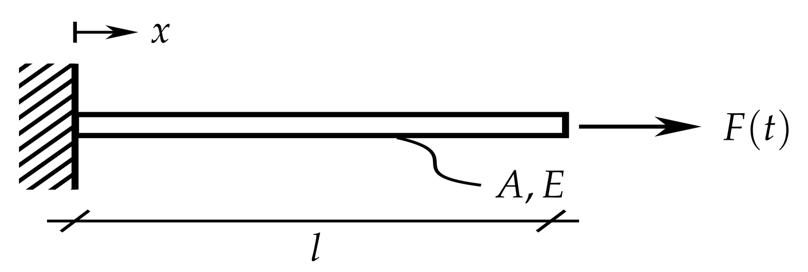
Finite-Elemente-Methode für die Dynamik linear-visko-elastischer Polymere am Beispiel eines Dehnstabs

Beatrice Hummel | Bachelorarbeit (2021)

Zusammenfassung

Viskoelastische Materialien zeichnen sich dadurch aus, dass ihre Reaktionen auf eine Spannung zeitverzögert erfolgen. Dieses Verhalten kann mithilfe des Poynting-Thomson-Modells für die lineare Elastodynamik modelliert werden. Dazu wird ein links eingespannter und rechts mit einer dynamischen Kraft belasteter Dehnstab mit der Finite-Elemente-Methode und verschiedenen Zeitdiskretisierungsverfahren in Matlab diskretisiert. Lediglich die Mittelpunktsregel kann hierbei linear-viskoelastisches Materialverhalten konsistent abbilden.

Anfangsrandwertproblem



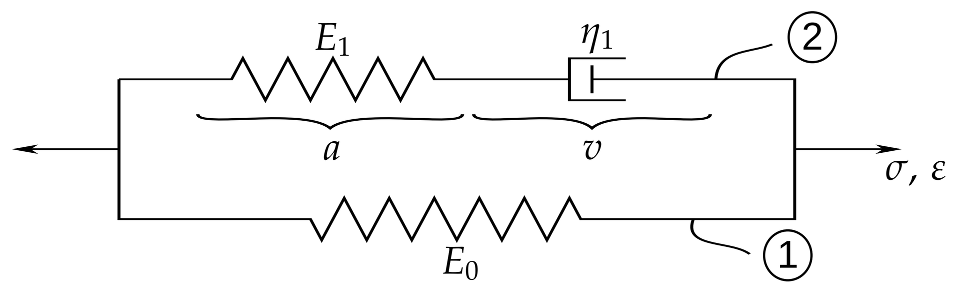
mit $F(t) = \begin{cases} F_0 \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) & \text{für } 0 < t \leq 1 \\ 0 & \text{für } 1 < t < 5 \end{cases}$

Differentialgleichung: $\sigma' = \rho \ddot{u}$

1) räumliche Diskretisierung mit Finite-Elemente-Methode
2) zeitliche Diskretisierung mit Mittelpunktsregel sowie implizitem und explizitem Eulerverahren [1]

Lineare Viskoelastizität

Poynting-Thomson-Modell [3]



- konstitutives Gesetz: $\sigma = (E_0 + E_1)\varepsilon - E_1 \varepsilon^v$
- Evolutionsgleichung für innere Variable: $\dot{\varepsilon}^v = \frac{E_1}{\eta_1}(\varepsilon - \varepsilon^v)$

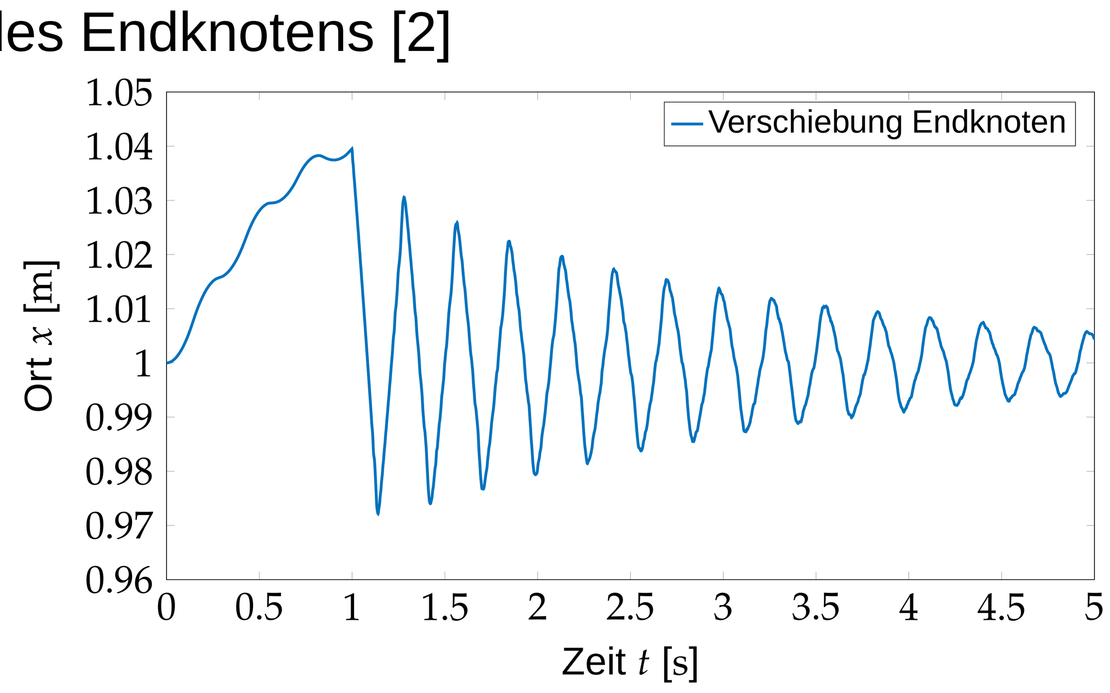
Energiekonsistenz im Kontinuierlichen [4]

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^L \frac{1}{2} v \rho v \,\mathrm{d}x}_{=\dot{E}_{kin}} + \underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^L \frac{1}{2}\varepsilon E_0 \varepsilon \,\mathrm{d}x + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^L \frac{1}{2}(\varepsilon - \varepsilon^v) E_1 (\varepsilon - \varepsilon^v)\,\mathrm{d}x}_{=\dot{E}_{\mathrm{pot},1} + \dot{E}_{\mathrm{pot},2} = \dot{E}_{\mathrm{pot}}}$$

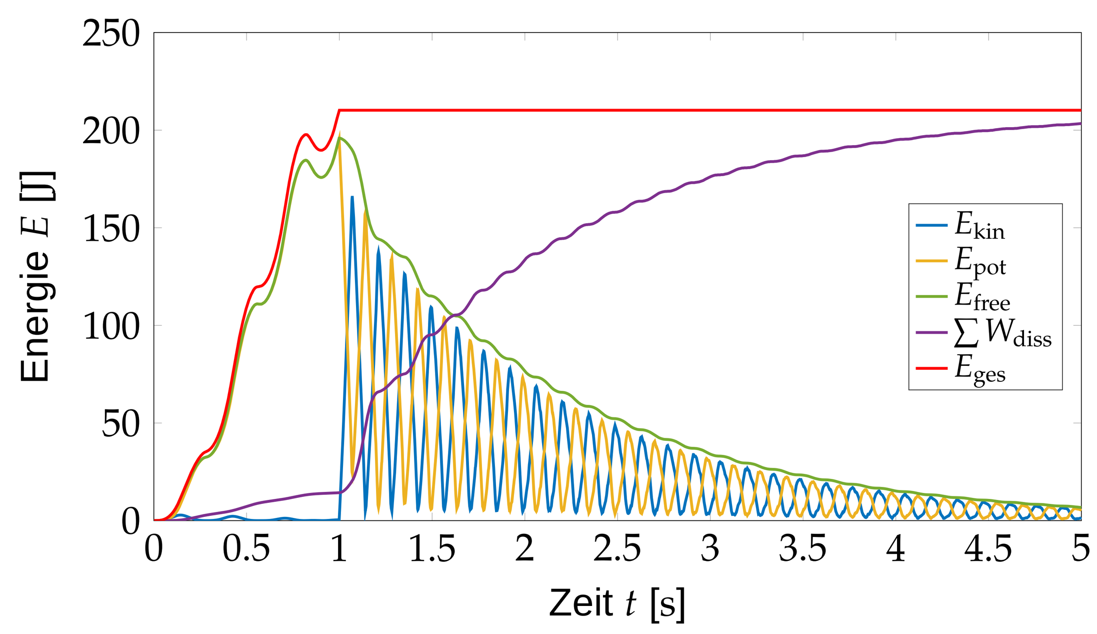
$$= -\underbrace{\int_0^L (\varepsilon - \varepsilon^v)\frac{E_1^2}{\eta_1}(\varepsilon - \varepsilon^v)\,\mathrm{d}x}_{=W_{\mathrm{diss}}}.$$

Ergebnisse

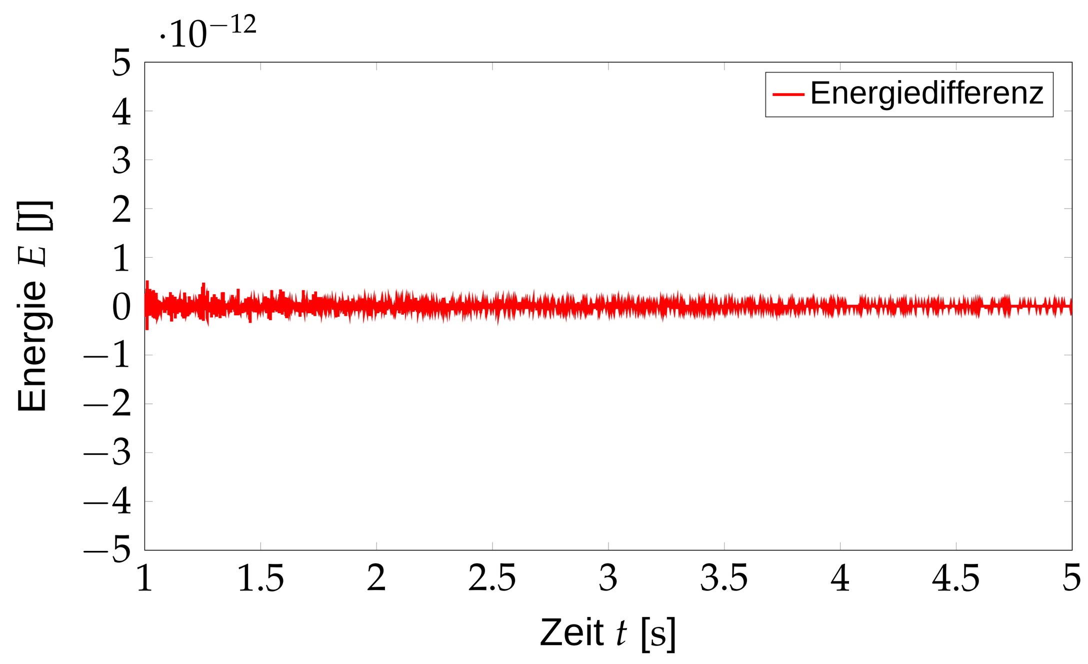
Bewegung des Endknotens [2]



Energieverlauf

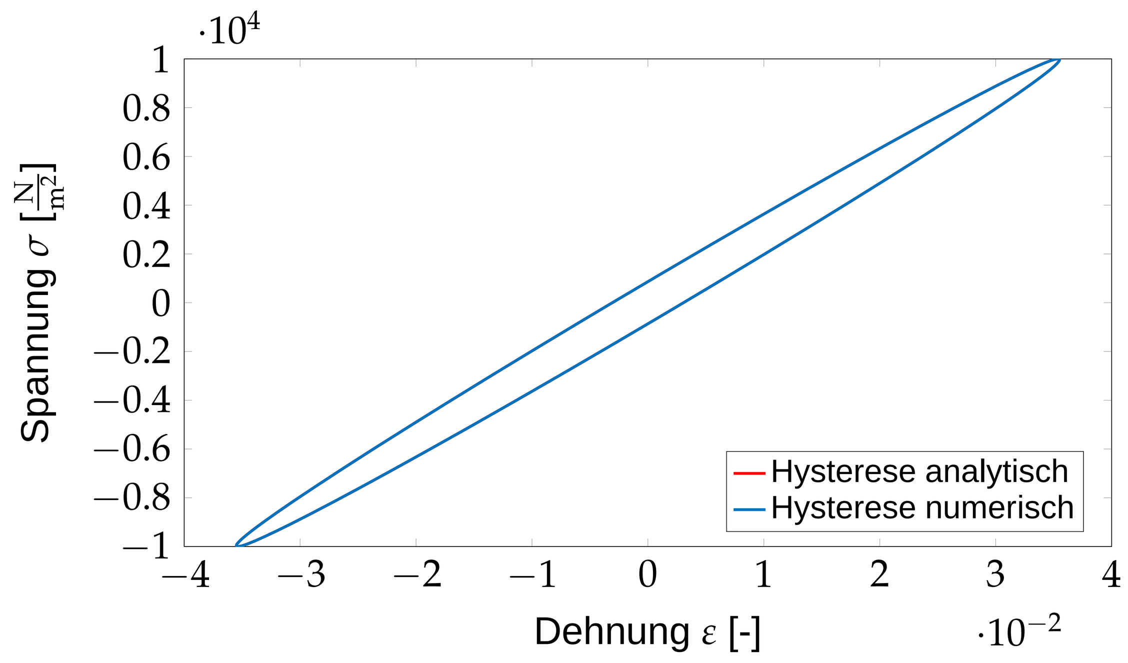


Energiedifferenz



$\Rightarrow$ Mittelpunktsregel erhält Energiekonsistenz

Hysterese



Literatur

[1] Betsch, P. *Scriptum zur Vorlesung: Numerische Methoden im Maschinenbau*. Siegen: Universität Siegen, Institut für Mechanik und Regelungstechnik, Lehrstuhl für numerische Mechanik, 2012.

[2] Bleyer, J. *Numerical Tours of Computational Mechanics with FEniCS*. Zenodo, 2018.

[3] Seelig, T. *Skript zur Vorlesung: Anwendungsorientierte Materialtheorien*. Karlsruhe: Karlsruher Institut für Technologie, Institut für Mechanik, 2019.

[4] Simo, J. C. und Tarnow, N. The discrete energy-momentum method. Conserving algorithms for nonlinear elastodynamics. In: *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, 43: 757–792, 1992.