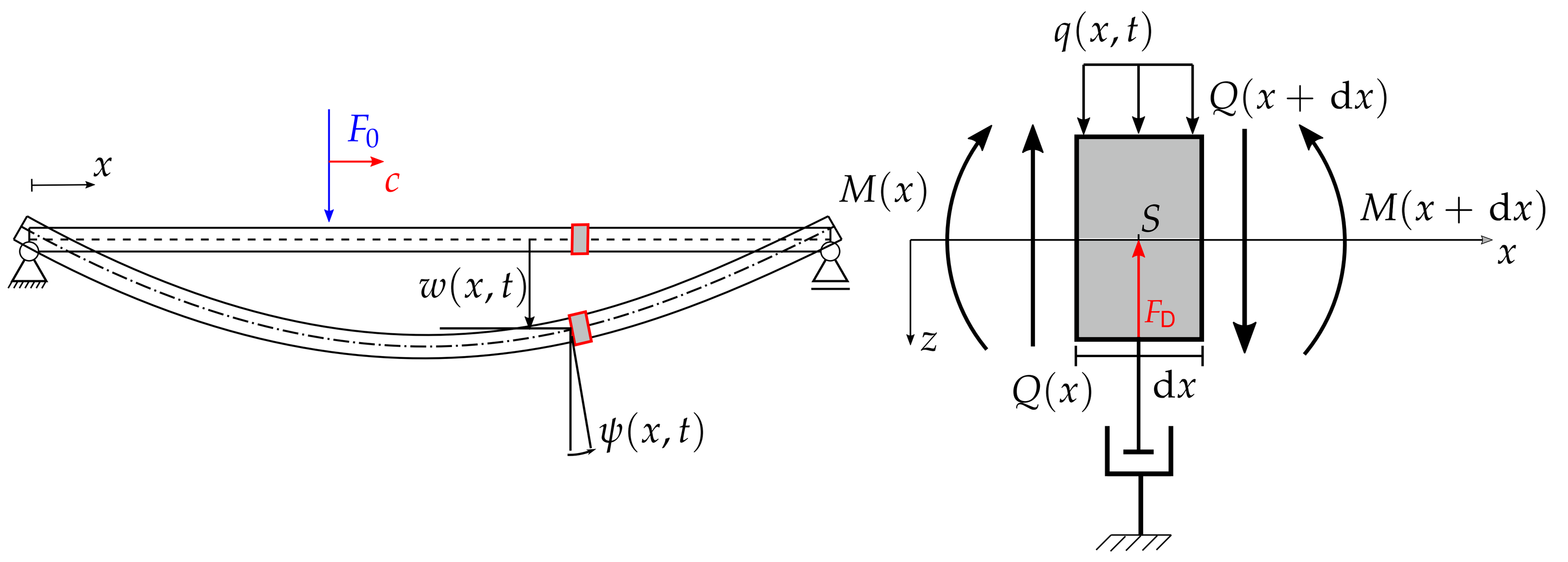
Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. habil. Peter Betsch
Prof. Dr.-Ing. habil. Thomas Seelig

Analyse des Schwingungsverhaltens eines Einfeldträgers unter beweglicher Belastung mittels Finite-Differenzen-Methode

Felix Mols | Bachelor Arbeit (2021)

Problemstellung



- Übergang einer bewegten Last F_0 über einen Balken konstanten Querschnitts mit der Geschwindigkeit c.
- Äußere Belastung mit Dirac'scher Stoßfunktion:
$$q(x,t) = \delta(x - ct)F_0$$
- Modellannahmen:
  - Euler-Bernoulli-Balken ($M' = Q,\ \psi = -w'$)
  - Viskose Dämpfung $F_D = 2\omega_b \rho A\, \dot{w}$
  - Balkenmasse $\gg$ Trägheit der Belastung
- PDGL aus Freischnitt am Balkenelement zur Beschreibung des Problems (vgl. [2])
$$EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2\omega_b \rho A\frac{\partial w}{\partial t} = \delta(x - ct)F_0$$

Analytischer Lösungsansatz

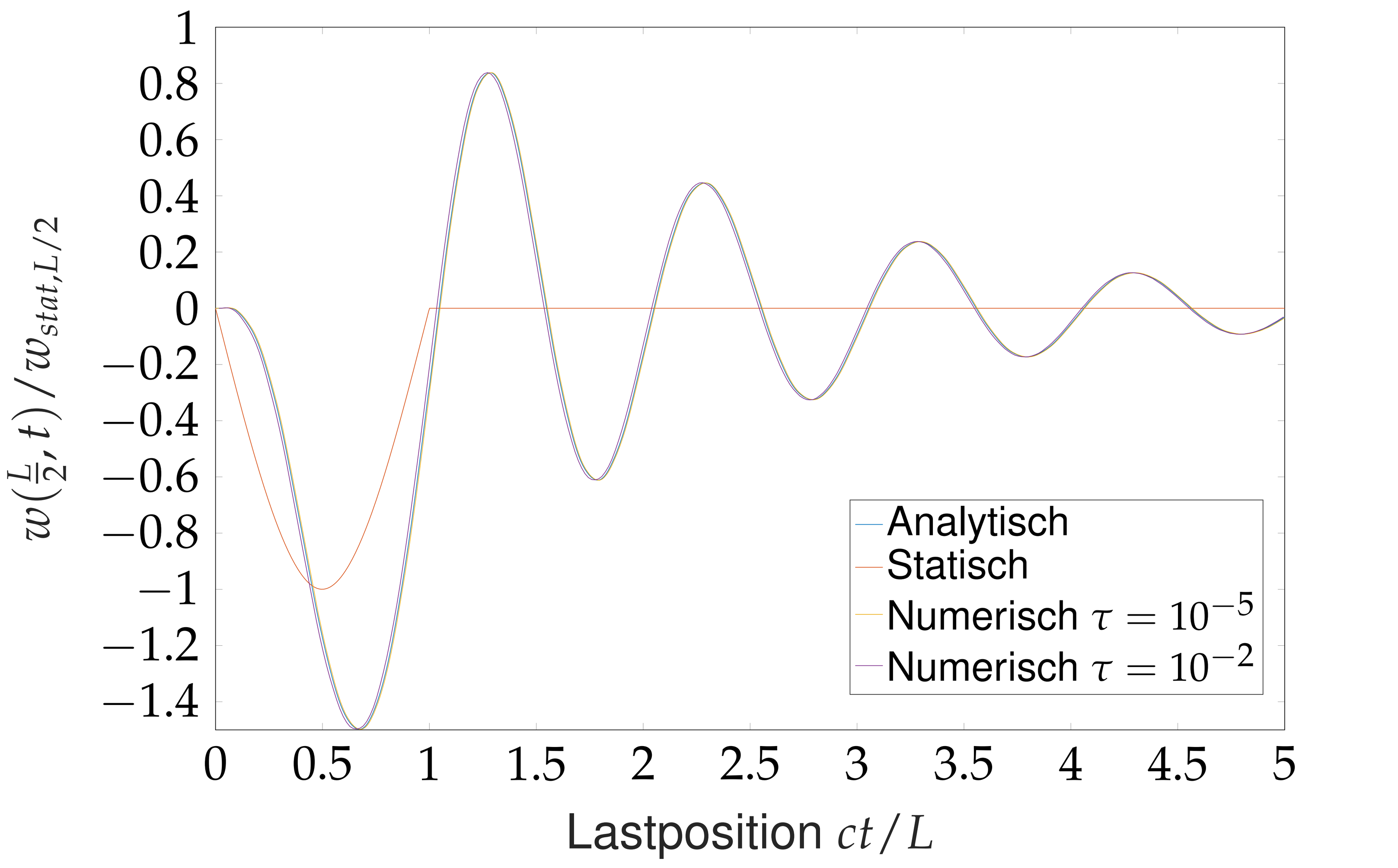
- Räumliche Lsg. mit Sinusreihe (Eigenmoden)
$$w(x,t) = \frac{2}{L}\sum_{k=1}^{\infty} V_k(t)\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$$
- Vereinfachung zu gewöhnlicher DGL für $V_k(t)$ (zeitliche Lsg.)
$$\rho A\ \ddot{V}_k + 2\rho A\omega_b\ \dot{V}_k + \frac{k^4\pi^4}{L^4}EI\ V_k = F\sin\left(\frac{k\pi ct}{L}\right)$$

Numerischer Lösungsansatz

Approximation der DGL mittels Finite-Differenzen-Methode und der impliziten Mittelpunktsregel. Dies liefert ein LGS für die Verschiebung $\mathbf{w_{i+1}}$ und die Geschwindigkeit $\mathbf{v_{i+1}}$.

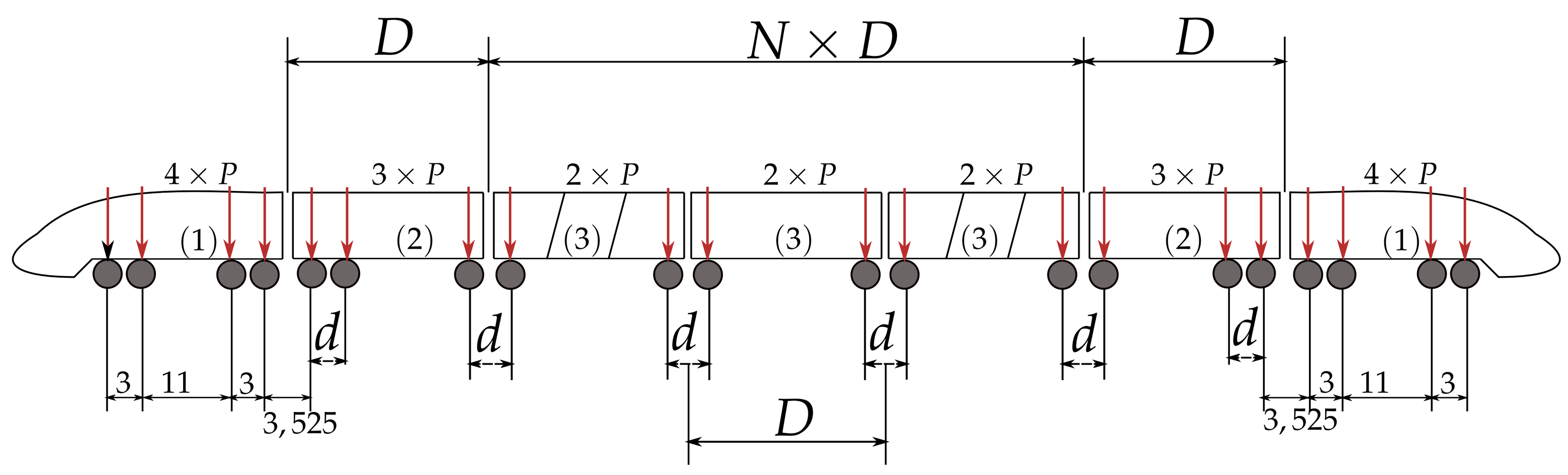
$$\left(\frac{\tau^2}{4}\mathbf{K} + \mathbf{M} + \tau\mathbf{D}\right)\mathbf{w_{i+1}} = \tau\mathbf{M}\mathbf{v_i} + \left(\mathbf{M} + \tau\mathbf{D} - \frac{\tau^2}{4}\mathbf{K}\right)\mathbf{w_i} + \frac{\tau^2}{2}\mathbf{q_{i+\frac{1}{2}}}$$
$$(\mathbf{M} + \tau\mathbf{D})\,\mathbf{v_{i+1}} = \mathbf{M}\mathbf{v_i} + \tau\left(\mathbf{q_{i+\frac{1}{2}}} - \mathbf{K}(\mathbf{w_{i+\frac{1}{2}}}) - \mathbf{D}\mathbf{v_i}\right)$$

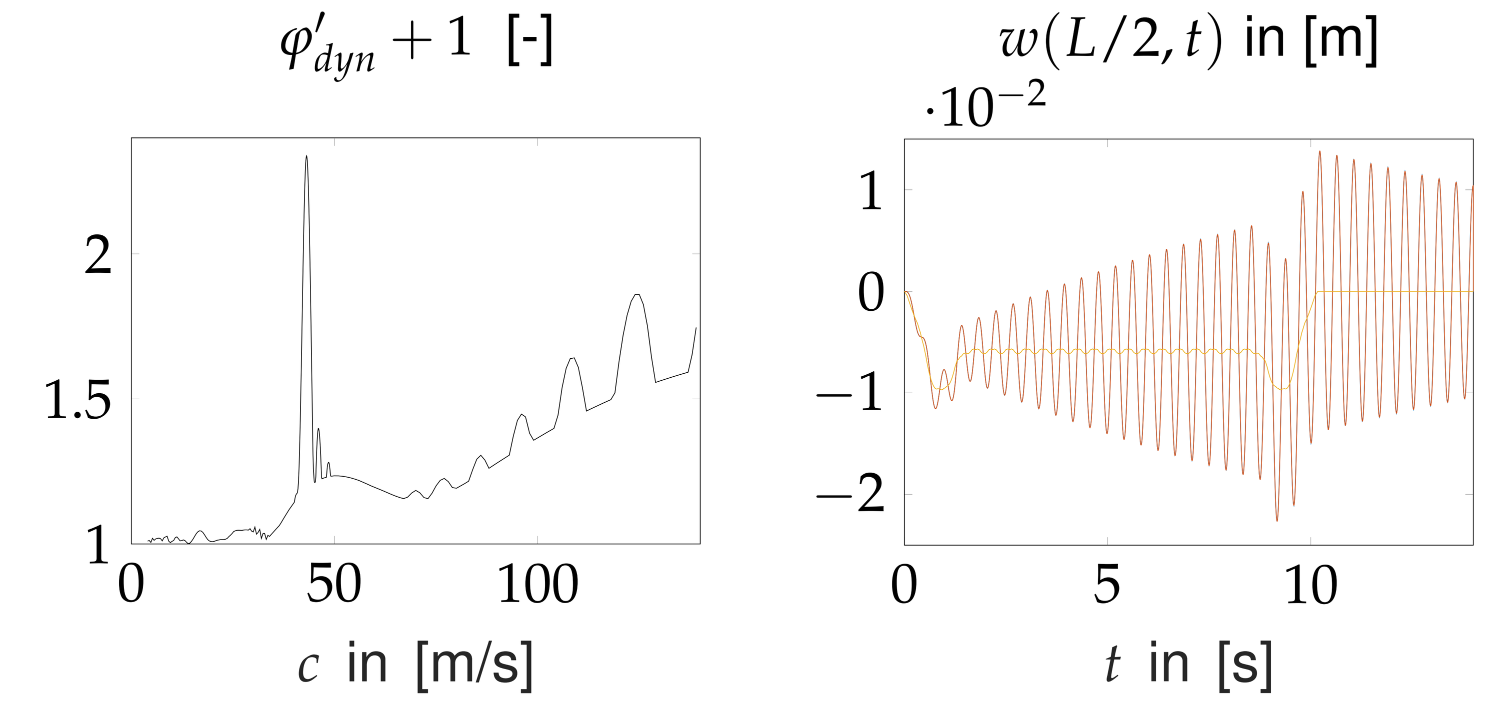
Die Abbildung zeigt ein beispielhaftes Amplitudenverhältnis $w(\frac{L}{2},t)/w_{\text{stat}}$ in Feldmitte, berechnet mit verschiedenen Verfahren. Zum Vergleich ist in rot die statische Antwort aufgetragen.



Anwendung auf eine Zugüberfahrt

Durch Superposition der Einzellösungen lassen sich beliebige Folgen von Einzellasten darstellen, wie z.B. das Lastmodell HSLMA (oben) eines Schnellzuges [1].





Die Auswertung ist bspw. mit Diagrammen des dynamischen Zuwachses für verschiedene Geschwindigkeiten (links), der Tragwerksantwort in Feldmitte im Resonanzfall (rechts) oder der Beschleunigung möglich.

Literatur

[1] *DIN EN 1991-2:2010-12. Eurocode 1: Einwirkungen auf Tragwerke - Teil 2: Verkehrslasten auf Brücken.* Norm. 2010.

[2] Frýba, L. *Vibration of solids and structures under moving loads.* 3. Auflage. London: Thomas Telford, 1999.

[3] Gross, D., Hauger, W. und Wriggers, P. *Technische Mechanik 4 : Hydromechanik, Elemente der Höheren Mechanik, Numerische Methoden.* 10. Aufl. 2018. SpringerLink. Berlin, Heidelberg: Springer Vieweg, 2018.