

Effiziente Diskretisierung von statischen Fluid-Struktur-Problemen bei großen Deformationen

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

DOKTORS DER INGENIEURWISSENSCHAFTEN

von der Fakultät für Maschinenbau der
Universität Karlsruhe (TH)

genehmigte

DISSERTATION

von

Dipl.-Ing. Thorsten Rumpel
aus Karlsruhe

Tag der mündlichen Prüfung: 31.10.2003
Hauptreferent: Prof. Dr.-Ing. J. Wittenburg
Korreferent: Prof. Dr.-Ing. K. Schweizerhof

Abstract

This thesis contains a discussion of several fluid-structure-problems for nonlinear static finite element analysis. The treatise starts out with pneumatic and hydraulic structures, where a completely filled deformable structure encloses a weightless compressible liquid or gas. Then open deformable structures partially filled by incompressible fluids under gravity are considered. Finally compressible fluids under gravity completely enclosed by a deformable structure are studied. In all three cases the effect of the fluid on the structure is represented by surface integrals of the contact area. This description results in an analytical mesh-free representation of the fluid, besides a finite element representation of the structure. Consequently remeshing, extensive mesh refinements and contact algorithms can be omitted.

The fluid is described by its potentials of internal energy and weight. If physically realistic boundary conditions are considered, the chosen conservative descriptions result in symmetric stiffness matrices even for nonlinear problems. The resulting symmetric systems of equations are condensed into pure displacement formulations. The condensed forms indicate for all cases the interaction of the fluid on the structure by different dyadic updates. After all the Sherman-Morrison formula is used to transform the dyadic coupled systems of equations for an efficient equation solving conserving the sparsity of the FE equations. Especially for stability investigations the effect of the dyadic updates can be clearly judged.

Modified arc-length methods are developed to identify critical loading either by an external load or by fluid filling. The effect of the fluid on the stability is pointed out by the distinct change of the value of the determinant and the eigenvalue of the coupled system, which is not possible for fully discretised problems. The attached numerical examples show the evidence that particularly for large displacements only fully coupled problems lead to correct results.

Kurzfassung

Im Rahmen einer statischen, nichtlinearen Finite-Element-Analyse werden drei Typen von Fluid-Struktur-Kopplungen untersucht. Zunächst werden pneumatische und hydraulische Strukturen behandelt, bei der eine geschlossene deformierbare Hülle ein kompressibles masseloses Fluid umschließt. Im nachfolgenden werden offene deformierbare Strukturen mit inkompressibler Flüssigkeitsfüllung im Schwerfeld betrachtet. Zum Abschluß der Arbeit wird die Wechselwirkung eines kompressiblen massebehafteten Fluids in einer deformierbaren geschlossenen Struktur diskutiert.

In allen Fällen gelingt es, die Fluid-Struktur-Kopplung vollständig über Oberflächenintegrale der Kontaktfläche zwischen Fluid und Struktur darzustellen. Dieses Verfahren führt auf eine elementfreie, analytische Repräsentation des Fluids neben einer Finite-Element-Darstellung der Struktur.

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Angestellter am Institut für Technische Mechanik der Universität Karlsruhe (TH).

Herrn Prof. Dr.-Ing. J. Wittenburg danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit, seine wohlwollende Förderung und die gemeinsame Zeit am Institut unter seiner Leitung.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr.-Ing. K. Schweizerhof für seine engagierte und wissenschaftlich kompetente Betreuung, welche die vorliegende Arbeit wesentlich geprägt hat.

Herrn Prof. Dr.-Ing. J. Wauer danke ich für die kritische Durchsicht der Arbeit und für die über die Mechanik hinausgehenden wertvollen Ratschläge und Hinweise.

Schließlich danke ich allen Kollegen am Institut für Technische Mechanik und am Institut für Mechanik. Meinen besonderen Dank gilt Herrn Dr.-Ing. Göttlicher, Herrn Dr.-Ing. Schweizer, Herrn Dipl.-Math. R. Keppler, Herrn Dipl.-Ing. B. Waltersberger und Herrn Dipl.-Ing. M. Harnau für ihre stete Bereitschaft und Unterstützung in allen Stationen der Arbeit.

Mein ganz besonderer Dank gilt meiner Ehefrau Christiane und meinen Kindern Peter und Hannah. Sie haben mich mit viel Geduld und Unterstützung bei dieser Arbeit begleitet, auch wenn dies mit manchem persönlichen Verzicht verbunden war.

Karlsruhe, Dezember 2003

Thorsten Rumpel

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Motivation und Ziel der Arbeit	1
1.2	Geschichtlicher Überblick der technischen Entwicklung	1
1.3	Entwicklung der Berechnungsverfahren	2
1.3.1	Analytische Verfahren	2
1.3.2	Numerische Verfahren	3
2	Pneumatik und Hydraulik deformierbarer Strukturen	5
2.1	1. und 2. Hauptsatz der Thermodynamik	5
2.1.1	Variation der Volumenänderungsarbeit	7
2.1.2	Konstitutive Gleichungen	8
2.2	Linearisierung	9
2.2.1	Variation der Volumenänderungsarbeit	9
2.2.2	Konstitutive Gleichungen	10
2.3	Konservativität	11
2.3.1	Produktintegration der Folgelast	12
2.3.2	Produktintegration der Volumenberechnung	17
2.3.3	Symmetrienachweis	18
2.4	Hybride Formulierung	19
2.5	Diskretisierung	19
2.6	Lösungsalgorithmus	21
2.7	Bogenlängenverfahren	24
2.7.1	Kraftregelung	24
2.7.2	Indirekte Verschiebungsregelung	30
2.7.3	Indirekte Verschiebungsregelung eines pneumatischen Durchschlag-Getriebes	35
2.8	Stabilität	38
2.8.1	Determinante	38
2.8.2	Eigenwert	38
2.8.3	Pneumatisches System mit zwei Freiheitsgraden	40
2.9	Zusammenfassung	41

3	Deformierbare Strukturen in der Hydrostatik	43
3.1	Prinzip der virtuellen Arbeit	43
3.1.1	Schwerepotential der Flüssigkeit	43
3.1.2	Volumenmoment 1. Grades	44
3.1.3	Volumenerhaltung	45
3.1.4	Variationsproblem der Hydrostatik	45
3.2	Linearisierung	48
3.2.1	Hydrostatisches Variationspotential	49
3.2.2	Hydrostatischer Druck und Volumenerhaltung	49
3.3	Konservativität	49
3.3.1	Produktintegration der ortsabhängigen Folgelast	50
3.3.2	Spiegelhöhenänderung	51
3.3.3	Symmetrienachweis	53
3.4	Hybride Formulierung	55
3.5	Diskretisierung	55
3.6	Lösungsalgorithmus	57
3.7	Bogenlängenverfahren	57
3.7.1	Kraftregelung	58
3.7.2	Indirekte Verschiebungsregelung	58
3.8	Stabilität	62
3.9	Zusammenfassung	63
4	Hydraulik deformierbarer Strukturen im Schwerfeld	65
4.1	Prinzip der virtuellen Arbeit	65
4.1.1	Schwerepotential eines kompressiblen Fluids	66
4.1.2	Massenerhaltung	66
4.1.3	Variation des Schwerepotentials eines kompressiblen Fluids	67
4.1.4	Variation der Volumenänderungsarbeit	68
4.1.5	Variationsdarstellung der kompressiblen schweren Flüssigkeit	68
4.2	Linearisierung	69
4.3	Hybride Formulierung	72
4.4	Diskretisierung	73
4.5	Lösungsalgorithmus	75
4.6	Bogenlängenverfahren	76
4.6.1	Kraftregelung	76
4.7	Stabilität	77
4.7.1	Determinante	77
4.7.2	Eigenwert	77
4.8	Zusammenfassung	79

5	Numerische Beispiele	81
5.1	Pneumatik	81
5.1.1	Extraktion einer pneumatischen Struktur	81
5.1.2	Pneumatisches Mehrkammersystem unter Torsionsbelastung	83
5.2	Deformierbare Strukturen in der Hydrostatik	85
5.2.1	Hydrostatik eines gekrümmten mit Flüssigkeit gefüllten Rohres	85
5.2.2	Hydrostatik einer teilweise befüllten Struktur unter externer Zug- und Torsionsbelastung	87
5.2.3	Hydrostatik von befüllten Mehrkammersystemen mit gegenseitiger Interaktion	90
5.3	Hydraulik deformierbarer Strukturen im Schwerfeld	92
5.4	Einsatz des Bogenlängenverfahrens bei Fluid-Struktur-Problemen	95
5.4.1	Pneumatisch gestützte Schale unter Einzellast	95
5.4.2	Indirekte Verschiebungsregelung in der Pneumatik	97
5.4.3	Schale unter hydrostatischer Belastung mit einer zusätzlich geregelten Einzellast	99
5.4.4	Indirekte Verschiebungsregelung in der Hydrostatik	102
6	Zusammenfassung und Ausblick	105

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Motivation und Ziel der Arbeit

Technische Entwicklungen in der Hydraulik und Pneumatik verlangen nach effektiven Berechnungsverfahren, um neue Produkte schnell und zuverlässig auf den Markt zu bringen. Die bestehenden numerischen Verfahren für Fluid-Struktur-Probleme sind nur bedingt für statische Probleme mit großen Verformungen geeignet. Als Folge der durchgehenden Vernetzung von Fluid und Struktur sind die aktuellen Berechnungsverfahren für statische Betrachtungen ineffizient. Insbesondere der aufwendige Abgleich zwischen Fluid- und Strukturnetz und die speziell bei großen Deformationen im Fluidbereich notwendigen Netz Anpassungen sind sehr rechenintensiv. In der vorliegenden Arbeit wird deshalb eine elementfreie Darstellung des Fluids für das nichtlineare Gleichgewichtsproblem verschiedener Fluid-Struktur-Kopplungen vorgestellt.

Die Untersuchung beschränkt sich auf deformierbare Hohlstrukturen, die mit einem oder mehreren Fluiden teilweise oder komplett befüllt sind. Weiter wird die Konservativität der einzelnen Kopplungen diskutiert und in diesem Zusammenhang auf die exakte Berücksichtigung von physikalisch sinnvollen Rand- und Übergangsbedingungen eingegangen. Nach der Analyse von pneumatischen und hydraulischen Strukturen in Kapitel 2 werden deformierbare Strukturen unter hydrostatischer Belastung in Kapitel 3 untersucht. Die Synthese von Kompressibilität und Gewichtseinfluß findet sich in Kapitel 4 der Arbeit. Ferner werden mehrere Varianten des Bogenlängenverfahrens für Fluid-Struktur-Probleme vorgestellt, die eine implizite Berechnung von Nachbeulformen ermöglichen.

1.2 Geschichtlicher Überblick der technischen Entwicklung

Schon die Römer nutzten pneumatische Strukturen in Form von aufblasbaren Schwimmwesten um Tiere über Flüsse zu bringen [Pri71], [RG98]. In den Krie-

gen des 15. Jahrhundert wurden Heißluftballone als Positions- und Erkennungsmerkmale verwendet. Auch zur Darstellung von myhtischen Wesen wurden im Mittelalter pneumatische Strukturen genutzt. Die erste Fahrt mit einem Ballon ereignete sich am 15. Okt. 1783 mit den Brüdern J.M und E.J. Montgolfier als erste Ballonfahrer. Das erste pneumatische Bauwerk, ein Feldhospital, wurde 1917 von F.W. Lanchester errichtet [RG98]. Später kamen Flugzeughallen und Sportarenen hinzu. R.W. Thomson ließ sich 1845 den von ihm entwickelten Luftreifen patentieren [Gor88]. Im zweiten Weltkrieg kam eine große Anzahl von pneumatischen Strukturen zum Einsatz. Hier sind neben dem gewöhnlichen Schlauchboot, Imitate von Kriegsgeräten und eine Vielzahl von pneumatischen Bauten als Feldlazerett oder Fabrikgebäude zu nennen. Heute ist das Anwendungsgebiet von pneumatischen Strukturen sehr weitreichend. Pneumatische Bauten sind sehr schnell errichtet und eignen sich als Messehallen oder als temporäre Überdachung von Sportarenen und Freilichtbühnen. Rettungswesten, aufblasbare Möbel, Staudämme und Rettungsrutschen für Flugzeuge sind weitere Anwendungen. Der Airbag wird nicht nur in Kraftfahrzeugen eingesetzt, sondern ist auch als Landesystem bei Marsmissionen zur Abfederung der Landung zu finden.

Die Wechselwirkung des Schweredrucks einer Flüssigkeit auf eine deformierbare Struktur ist hingegen bei vielen Produkten der Meerestechnik von Interesse. Bei der Bergung von Lasten aus großen Wassertiefen kommen deformierbare Auftriebsballone zum Einsatz. Schlauchwehre mit faserverstärkten Inlets werden in vielen Regionen zum Schutz gegen Flutwellen und Hochwasser eingesetzt. Auch als flexible Wasserbehälter sind sehr dünnwandige Schalen- und Membranstrukturen vielfach in Gebrauch.

1.3 Entwicklung der Berechnungsverfahren

Die Zahl der wissenschaftlichen Veröffentlichungen auf dem Sektor der Fluid-Struktur-Kopplung wächst stetig und angesichts der hohen Wichtigkeit auch sehr schnell. Eine umfassende Darstellung der relevanten Literatur ist deshalb nur begrenzt möglich. Ein Versuch, die geschichtliche Entwicklung von pneumatischen Strukturen und deren Berechnungsverfahren zu dokumentieren, findet sich in [RG98].

1.3.1 Analytische Verfahren

Die Analyse der Fluid-Struktur-Kopplung findet ihre Anfänge in den sechziger Jahren [CL63], [Top64], [Anw67]. Stabilitäts- bzw. Faltenprobleme von pneumatischen Strukturen sind in den frühen Arbeiten von [Wu71], [Wu74], [Wu78], [YMY72], [RDOJ87a], [RDOJ87b] zu finden und werden in [KL00] neu aufgegriffen. Nichtlineares Materialverhalten von pneumatischen Strukturen wurde in analytischer Form in den Arbeiten von [Wu73b], [Wu73a], [MS99], [VKDP99] und [Had00] abgehandelt. Lineare analytische Schwingungsuntersuchungen von luftgefüllten zylindrischen Hochwasserdämmen sind in [PF88],

[WP96] und [WP91] diskutiert. Eine ausführliche Zusammenstellung von linearen statischen und dynamischen Untersuchungen zu pneumatischen Strukturen findet sich in [Fir83]. In der Folge der Arbeiten von [AR52] und [GA60] zu großen elastischen Deformationen ergaben sich eine Vielzahl von analytischen Folgearbeiten, die in [RG98] genannt sind. Analytische Untersuchungen zu schlanken, umströmten und durchströmten Strukturen finden sich in [Pai98]. Zusammenfassend läßt sich feststellen, daß die analytischen Verfahren sehr gut für die Diskussion von einfachen Geometrien geeignet sind und einen guten Einblick in die grundsätzlichen Probleme der Fluid-Struktur-Mechanik geben. Für die Untersuchung von Strukturen mit großen Deformationen und vor allem komplexen Geometrien sind sie kaum verwendbar.

1.3.2 Numerische Verfahren

Mit der Entwicklung der finiten Elemente hat die Untersuchung von Fluid-Struktur-Kopplungen einen neuen Auftrieb bekommen [OK67]. Eine Vielzahl von Elementen zur Berechnung von linearem und nichtlinearem Strukturverhalten eröffnen ein breites Anwendungsfeld. Mit der Hilfe von kommerziellen Paketen ist die Analyse von einseitig gekoppelten linearen Mehrfeldproblemen möglich [BY96], [ZT01], [Sch98], [Tam98], [vDCM03], [NEA02]. Bei akustischen linearen Schwingungsproblemen können neben den Eigenfrequenzen und Eigenschwingungen des voll gekoppelten Problems auch die Systemantworten auf periodische, harmonische und allgemeine Anregungen bestimmt werden [HKS98]. Dies gelingt mit einer kompletten Diskretisierung von Fluid und Festkörper. Einen Vorteil gegenüber den voll diskretisierten Verfahren bringen Boundary-Element-Verfahren oder halbunendliche Elemente für das Fluidgebiet. Jedoch sind diese interessanten Ansätze nur für lineare Schwingungsuntersuchungen geeignet. Flüssigkeitsbelastungen durch Auftriebskräfte mit oder ohne Wellenbelastungen können für lineare und nichtlineare statische und dynamische Problem ohne Rückkopplung auf das Fluid berechnet werden [HKS98]. Der Einfluß des Fluids wird mittels einer entsprechenden Anregung abgebildet, die unabhängig vom Strukturverhalten einwirkt. Theoretisch interessante Abhandlungen zur modalen Beschreibung von gekoppelten, linearen, voll diskretisierten Verfahren finden sich in [MO95]. Die zeitdiskretisierten Verfahren unterteilen sich in implizite und explizite Verfahren [ZT00]. Beide Verfahren finden ihre Anwendung in der Fluid-Struktur-Mechanik. Die stabilisierten impliziten Verfahren eignen sich für schwach nichtlineare Probleme [ZT00]. Die expliziten Verfahren finden ihre Anwendung bei stark nichtlinearen hochdynamischen Problemen, wie sie beim Entfalten und beim Belasten des Airbags auftreten [HT00]. Um die in der Fluidmechanik übliche Euler-Formulierung mit der Lagrange-Formulierung der Strukturmechanik zu koppeln, wird in verschiedenen Forschungsgruppen mit der Arbitrary Lagrangean Eulerian (ALE) Formulierung gearbeitet [WR98], [DHW01], [MNF01], [KHdB01]. Alle obigen Algorithmen arbeiten mit voll diskretisierten Verfahren für Fluid und Struktur. Semidiskretisierte Verfahren, die wie in der vorliegenden Arbeit ohne Diskretisierung des Fluids auskommen, sind in der Literatur nur vereinzelt zu finden. Für die Hydrostatik elastischer, zwei-

dimensionaler Strukturen sei auf die Beiträge von [Buf85], [Buf92] und [Sch90] verwiesen. In [KN02] wird die Lösung von einfachen dreidimensionalen Problemen durch eine Transformation auf drei Poissongleichungen mit Quelltermen beschrieben. Eine Erweiterung auf komplizierte dreidimensionale Strukturen ist nicht möglich. Die im Zusammenhang mit großen Deformationen interessante Fragestellung der Konservativität von Folgelasten wurde für einseitig, gekoppelten Fluid-Struktur-Problemen in den Arbeiten von [Sch82] und [SR84] besprochen. Der Nachweis gelingt für konstante Gasdruckkräfte in der Pneumatik und einen konstanten Flüssigkeitspiegel in der Hydrostatik und kann, wie im Verlauf der Arbeit gezeigt wird, auf voll gekoppelte Probleme ausgebaut werden. Zu den semidiskreten statischen Verfahren ist neben den Veröffentlichungen des Autors für pneumatische Strukturen [RS03d] und für die Hydrostatik von deformierbaren Strukturen [RS03b] die zeitgleich erschienene Arbeit von [BWMH00] zu nennen. Die Vorgehensweise die physikalische Eigenschaft des Fluids analytisch, ohne Diskretisierung, in ein implizites Finite-Element-Verfahren einzuarbeiten, zeigt speziell bei der Simulation von großen Verformungen große Vorteile und wird deshalb in der vorliegenden Arbeit weiter verfolgt und ausgebaut.

Kapitel 2

Pneumatik und Hydraulik deformierbarer Strukturen

Unter dem Begriff pneumatische und hydraulische Strukturen sind deformierbare dünnwandige Hohlkammerstrukturen zu verstehen. Hierbei sind die Kammern komplett mit kompressiblen masselosen Fluiden befüllt. Die statische Gleichgewichtslage solcher Fluid-Struktur-Probleme läßt sich zweckmäßig über die Stationarität des 1. und 2. Hauptsatzes der Thermodynamik ableiten.

2.1 1. und 2. Hauptsatz der Thermodynamik

Durch die Variation des 1. Hauptsatzes der Thermodynamik für einen abgeschlossenen, adiabaten und ruhenden Kontrollraum ist der Energieaustausch zwischen einem Fluid und einer angrenzenden Struktur eindeutig erklärt. Ein statisches Gleichgewicht liegt vor, wenn die Summe der Variationen aus innerer Energie im Fluid $\delta^k U$ und Struktur $\delta^{el} V$ identisch null ist:

$$\delta^{el} V + \delta^k U = 0. \quad (2.1)$$

Die hochgestellten Indizes k und el stehen für das kompressible Fluid bzw. die deformierbare Struktur. Um den Energieaustausch zwischen Fluid und Festkörper sichtbar zu machen, sind Fluid und Festkörper in separaten Kontrollräumen zu betrachten. Im Kontrollraum des Fluids ändert sich die innere Energie $\delta^k U$ entsprechend der über die Kontrollgrenzen zu- oder abgeführten Arbeit $\delta^k W$, siehe Abbildung 2.1. Das Gesamtsystem steht im Gleichgewicht, wenn sowohl für das Fluid als auch für die Struktur Gleichgewicht vorliegt:

$$\delta^{el} V + \delta^k U = 0, \quad (2.2)$$

$$\underbrace{\delta^{el} V - \delta^k W}_{\text{Struktur}=0} + \underbrace{\delta^k W + \delta^k U}_{\text{Fluid}=0} = 0. \quad (2.3)$$

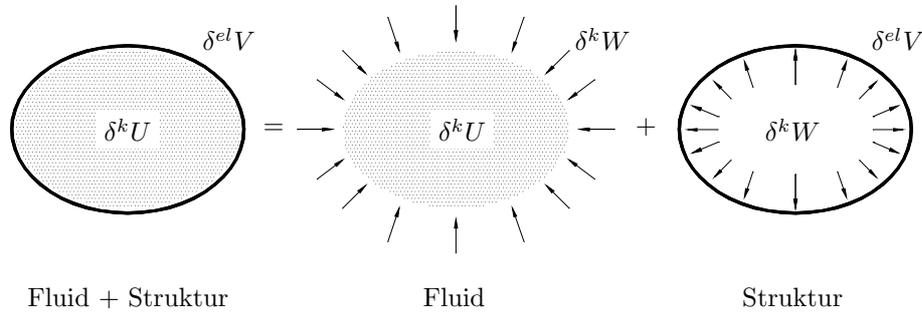


Abbildung 2.1: 1. Hauptsatz der Thermodynamik

Die Gleichgewichtsbedingung für den Kontrollraum des Fluids hat somit folgende Form:

$$\delta^k U + \delta^k W = 0. \quad (2.4)$$

Mit der Aufteilung in zwei separate Kontrollräume und der damit eingeführten Arbeit $\delta^k W$ kann die Potentialeigenschaft des Fluids besser deutlich gemacht werden. Die über die Kontrollgrenzen zu vermittelnde Arbeit $\delta^k W$ entspricht der inneren Energie $\delta^k U$ des Fluids. Werden im Inneren des Fluids irreversible Zustandsänderungen vernachlässigt, berechnet sich die zu- oder abgeführte Arbeit $\delta^k W$ für einen adiabaten Kontrollraum gemäß dem 2. Hauptsatz der Thermodynamik aus

$$\delta^k U + {}^k p \delta v = 0 \quad (2.5)$$

und wird als Variation der Volumenänderungsarbeit bezeichnet. Die Variation des Kontrollvolumens δv läßt sich mit Hilfe des Flächensatzes auf die virtuelle Verschiebung $\delta \mathbf{u}$ der umgebenden Struktur zurückführen [dB82]. Der Kompressionsdruck des Fluids ${}^k p$ wirkt stets entlang der normierten Normalen \mathbf{n} auf das Flächenelement da :

$$\delta^k U + {}^k p \int_a \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u} da = 0. \quad (2.6)$$

Mit der Variation der Volumenänderungsarbeit ist somit der Energieaustausch zwischen Fluid und Festkörper eindeutig bestimmt, wenn der Kompressionsdruck durch eine Zustandsgleichung beschrieben wird. Im weiteren wird ausschließlich der Aufbau der Volumenänderungsarbeit für große Verformungen diskutiert. Die Modellierung von nichtlinearem Strukturverhalten ist in der Literatur bereits ausführlich dargestellt, siehe z.B. [ZT00] und [HS98]. Zum besseren Verständnis der Wechselwirkung zwischen Struktur und Festkörper wird das Verformungsverhalten der umgebenden Struktur über ein Potential eingeführt.

Eine Funktionaldarstellung über ein Verschiebungsfunktional oder ein Zugang über die schwache Form des Gleichgewichts ist ebenfalls möglich und führt zu keiner Einschränkung der nachfolgenden Darstellungen.

2.1.1 Variation der Volumenänderungsarbeit

Die Variation der Volumenänderungsarbeit bzw. die Variation der inneren Energie

$$\delta^k W = {}^k p \int_a \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u} da \quad (2.7)$$

ist unter Hinzunahme einer Zustandsgleichung für das Fluid vollständig beschrieben. Die belastete Strukturfläche a kann mit Hilfe des Ortsvektors $\mathbf{x}(\xi, \eta)$ in affinen kovarianten Koordinaten ξ und η beschrieben werden. Die normierte und sich bei großen Verformungen ändernde Normalenrichtung \mathbf{n} berechnet sich aus dem kovarianten Kreuzprodukt der affinen Einheitsvektoren \mathbf{e}_ξ und \mathbf{e}_η der Oberfläche, siehe Abbildung (2.2):

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{e}_\xi \times \mathbf{e}_\eta}{|\mathbf{e}_\xi \times \mathbf{e}_\eta|} \quad (2.8)$$

$$\text{mit } \mathbf{e}_\xi = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} \quad \text{und} \quad \mathbf{e}_\eta = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \eta}. \quad (2.9)$$

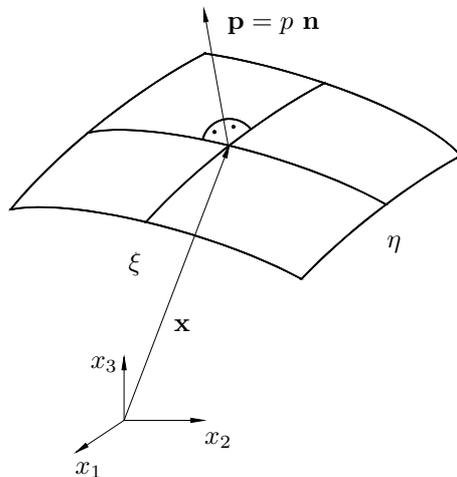


Abbildung 2.2: Oberfläche unter Druckbelastung

Das differentielle Flächenelement da kann ebenfalls in affinen Koordinaten über die Funktionaldeterminante dargestellt werden:

$$da = |\mathbf{e}_\xi \times \mathbf{e}_\eta| d\xi d\eta. \quad (2.10)$$

Die Variation der Volumenänderungsarbeit läßt sich mit ${}^*\mathbf{n} = \mathbf{e}_\xi \times \mathbf{e}_\eta$ als nicht-normierter Normalenvektor knapp in kovarianter Darstellung [Sch82], [SR84] schreiben:

$$\delta^k W = {}^k p \int_\eta \int_\xi {}^*\mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u} d\xi d\eta. \quad (2.11)$$

2.1.2 Konstitutive Gleichungen

Die konstitutive Gleichung gibt einen Zusammenhang zwischen der Verformung der Struktur und dem Druckniveau ${}^k p$ im Fluid an. Druckverluste durch Wärmeübergänge infolge Konvektion oder Konduktion an die Umgebung werden im Nachfolgenden nicht berücksichtigt.

Thermische Zustandsgleichung

Wird das Fluid als Gas modelliert, ist der Gasdruck ${}^k p$ für einen isolierten Kontrollraum mit κ als Isentropenexponent über die adiabatische bzw. Poissonsche Zustandsgleichung gegeben:

$${}^k p v^\kappa = {}^k P V^\kappa = \text{const.} \quad (2.12)$$

P , V sind Ausgangsdruck und Ausgangsvolumen der unverformten Struktur. v bezeichnet das verformte Volumen. $\kappa = 1$ überführt die adiabatische in die isotherme Zustandsgleichung.

Kompressionsdruck einer Flüssigkeit

Wird ein hydraulisches Modell bzw. eine Flüssigkeitsfüllung diskutiert, läßt sich der gemittelte Kompressionsdruck eines reibungsfreien idealen Fluids mit dem Hookeschen Gesetz beschreiben. Der lokal wirkende Kompressionsdruck ${}^k p(\mathbf{x})$ in einer Flüssigkeit ist proportional zur lokalen Volumendilatation $\varepsilon(\mathbf{x})$ mit dem Kompressionsmodul K als Proportionalitätskonstante:

$${}^k p(\mathbf{x}) = -K \varepsilon(\mathbf{x}). \quad (2.13)$$

Bei langsamen hydraulischen Prozessen sind Druckwellenausbreitungen in der Flüssigkeit unerheblich, was eine globale Beschreibung ähnlich der eines Gases nahelegt. Der sich bei einer Verformung der umgebenden Struktur ergebende Kompressionsdruck wird somit über die totale Volumenänderung der Flüssigkeit berechnet:

$${}^k p(v) = -K \frac{v - V}{V}. \quad (2.14)$$

Die Zustandsgröße ${}^k p$ eines Fluids in einer hydraulischen oder in einer pneumatischen Anlage ist demnach vollständig über die jeweilige konstitutive Gleichung bestimmt, wenn neben dem unverformten Strukturvolumen V das verformte Strukturvolumen v bekannt ist. Im folgenden wird der Kompressionsdruck in einer Flüssigkeit oder in einem Gas einheitlich mit ${}^k p(v)$ bezeichnet. Für die nachfolgenden Ausführungen ist nur die Abhängigkeit vom aktuellen Fluidvolumen v maßgebend.

Volumenberechnung

Mittels einer Integration über die einhüllende Strukturoberfläche a ist das unbekannte Fluidvolumen v gemäß

$$v = \frac{1}{3} \int_{\eta} \int_{\xi} \mathbf{x} \cdot {}^* \mathbf{n} \, d\xi d\eta \quad (2.15)$$

bestimmbar. Der wirkende Kompressionsdruck ${}^k p$ ist infolgedessen mit Kenntnis der aktuellen Lage der einhüllenden Strukturoberfläche und unter Verwendung einer Zustandsgleichung eindeutig bestimmt [RS02], [RS03d], [RS01], [BWMH00].

2.2 Linearisierung

Mit der Vorgabe, große Strukturbewegungen zu beschreiben, sind die maßgebenden Gleichungen im Hinblick auf das verwendete Lösungsverfahren, z.B. das Newtonverfahren zu linearisieren. Die angreifenden Belastungen werden hierzu schrittweise in Lastinkremente aufgelöst. Für jedes Lastinkrement kann dann die gesuchte Gleichgewichtslage iterativ mit dem Newtonverfahren bestimmt werden. Hier bezeichnen \mathbf{X} die unverformte Strukturlage, V das Ausgangsvolumen und ${}^k P$ den Ausgangsdruck. Die im Verlauf des Iterationsprozesses berechnete Zwischenlösung wird als bekannte Lage bezeichnet und durch $\mathbf{x}_t = \mathbf{X} + \mathbf{u}_t$ beschrieben. \mathbf{u}_t ist die im Iterationsschritt t berechnete gesamte Strukturverschiebung. Entsprechend läßt sich das bekannte Fluidvolumen v_t und der bekannte Kompressionsdruck ${}^k p_t$ ableiten. Die gesuchte Endlage $\mathbf{x} = \mathbf{x}_t + \Delta \mathbf{u}$ mit dem Kompressionsdruck ${}^k p = {}^k p_t + \Delta {}^k p$ im Fluidvolumen $v = v_t + \Delta v$ wird durch die unbekannte Strukturverschiebung $\Delta \mathbf{u}$ und die Druckänderung $\Delta {}^k p$ bzw. Δv beschrieben, siehe Abbildung 2.3.

2.2.1 Variation der Volumenänderungsarbeit

Bei der Linearisierung der Variation der Volumenänderungsarbeit ergeben sich neben dem Residuum $\delta {}^k W_t$ Änderungen im Druckniveau $\delta {}^k W^{\Delta p}$ und in der Druckrichtung $\delta {}^k W^{\Delta n}$. Der zweite Term ergibt sich aus der Tatsache, daß die Druckkraft immer normal auf die Strukturoberfläche zeigt. Für große Verformungen leitet sich daraus ein sogenanntes Folgelastproblem ab:

$$\delta {}^k W_{lin} = \delta {}^k W_t + \delta {}^k W^{\Delta p} + \delta {}^k W^{\Delta n} \quad (2.16)$$

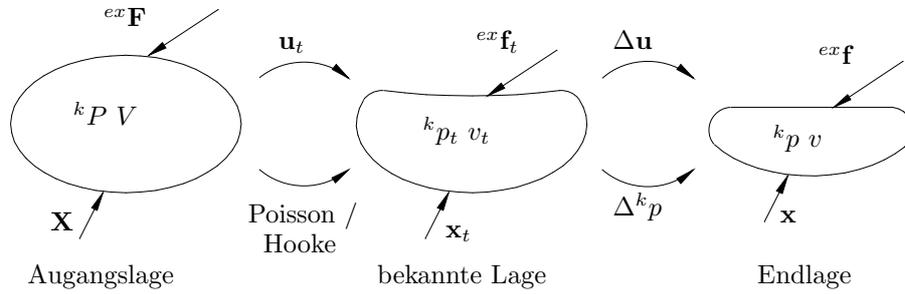


Abbildung 2.3: Pneumatik und Hydraulik von deformierbaren Strukturen; Definition der Zustandsgrößen für ein inkrementell iteratives Lösungsverfahren

$$\delta^k W_{lin} = \int_{\eta} \int_{\xi} ({}^k p_t {}^* \mathbf{n}_t + \Delta^k p_t {}^* \mathbf{n}_t + {}^k p_t \Delta^* \mathbf{n}_t) \cdot \delta \mathbf{u} \, d\xi d\eta. \quad (2.17)$$

Die linearisierte Normalenänderung läßt sich unmittelbar mit der Strukturverschiebung $\Delta \mathbf{u}$ in partiellen Ableitungen entlang den kovarianten Richtungen angeben [Sch82], [Kne97]:

$$\Delta^* \mathbf{n} = \Delta \mathbf{u}_{,\xi} \times \mathbf{e}_{\eta} + \mathbf{e}_{\xi} \times \Delta \mathbf{u}_{,\eta}. \quad (2.18)$$

2.2.2 Konstitutive Gleichungen

Um eine konsistente Beschreibung der Fluid-Struktur-Wechselwirkung zu erhalten, muß neben der Variation der Volumenänderungsarbeit auch die konstitutive Gleichung linearisiert werden.

Thermische Zustandsgleichung

Für eine Gasfüllung ist die isentrope Zustandsgleichung zu linearisieren. Die gesuchte Änderung im Druckniveau $\Delta^k p$ aus Gleichung (2.17) ist infolge der Volumenabhängigkeit über die Volumenänderung Δv bestimmt:

$$\Delta({}^k p v^{\kappa}) = 0, \quad (2.19)$$

$$\Delta^k p v_t^{\kappa} + {}^k p_t \Delta v^{\kappa} = 0 \quad (2.20)$$

mit

$$\Delta v^{\kappa} = \kappa \frac{v_t^{\kappa}}{v_t} \Delta v. \quad (2.21)$$

Mit dem Druckvolumengradienten ${}^k \alpha_t$ ergibt sich die Druckänderung im Zustand t zu

$$\Delta^k p = -{}^k \alpha_t \Delta v \quad (2.22)$$

mit

$${}^k\alpha_t = \kappa \frac{{}^k p_t}{v_t}. \quad (2.23)$$

Kompressionsdruck einer Flüssigkeit

Entsprechend zur isentropen Zustandsgleichung ist das Hookesche Gesetz zu linearisieren. Der Druckvolumengradient ${}^k\alpha$ als Proportionalitätskonstante zwischen Druck- und Volumenänderung ist bei Flüssigkeiten im Verlauf der Deformation konstant:

$$\Delta {}^k p = -{}^k\alpha \Delta v, \quad (2.24)$$

$${}^k\alpha = \frac{K}{V}. \quad (2.25)$$

Volumenberechnung

Die Volumenänderung läßt sich als Folge der Linearisierung in einen Verschiebungsanteil $\Delta v^{\Delta u}$ und einen Normalenänderungsanteil $\Delta v^{\Delta n}$ aufspalten:

$$\Delta v = \Delta v^{\Delta u} + \Delta v^{\Delta n} \quad (2.26)$$

$$= \frac{1}{3} \int_{\eta} \int_{\xi} (\Delta \mathbf{u} \cdot {}^*\mathbf{n}_t + \mathbf{x}_t \cdot \Delta {}^*\mathbf{n}) d\xi d\eta. \quad (2.27)$$

2.3 Konservativität

Die linearisierte Variation der Volumenänderungsarbeit mit den entsprechenden konstitutiven Gleichungen kann nach sukzessivem Einsetzen der oben angegebenen entwickelten Gleichungen als Funktion der Strukturverschiebung $\Delta \mathbf{u}$ formuliert und durch isoparametrische Ansatzfunktionen diskretisiert werden. Die hierdurch entstehende Laststeifigkeitsmatrix ist formal unsymmetrisch und wegen der Volumenkopplung der konstitutiven Gleichung voll besetzt. Im folgenden wird gezeigt, daß über das Anpassen an physikalisch sinnvolle Randbedingungen eine symmetrische Laststeifigkeitsmatrix entsteht [RS02], [RS03d], [RS01], [BWMH00]. Diese Aussage kann durch einen Vergleich mit einer im Rechner generierten und durch Randbedingungen kondensierten Laststeifigkeitsmatrix verifiziert werden, die ohne die nachfolgenden Umformungen diskretisiert und programmiert wird.

Daß konservative Probleme zu symmetrischen Steifigkeitsmatrizen führen, ist eine notwendige Bedingung und wurde in der Literatur vielfach gezeigt. Für eine gleichförmige Druckbelastung sind die Arbeiten von [Pea56], [Rom72] und [Sew66] zu nennen. Für nicht gleichförmige Druckbelastung finden sich Symmetrienachweise in den Arbeiten von [Sch82], [SR84]. Die vorliegenden Betrachtungen, wie auch jene von [Buf84], [Buf85], [Buf92], [Buf93], [Kne97], beruhen auf den Arbeiten [Sch82], [SR84]. Das korrespondierende Randwertproblem wird dabei durch Produktintegration aus der Feldgleichung hergeleitet.

2.3.1 Produktintegration der Folgelast

Die Normalenänderung der Druckkraft ist ein sogenanntes Folgelastproblem, das durch Produktintegration in Feldgleichung und Randwertproblem zerfällt:

$$\delta^k W^{\Delta n} = {}^k p_t \int_{\eta} \int_{\xi} \Delta^* \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\xi d\eta \quad (2.28)$$

$$= {}^k p_t \int_{\eta} \int_{\xi} (\Delta \mathbf{u}_{,\xi} \times \mathbf{e}_{\eta} + \mathbf{e}_{\xi} \times \Delta \mathbf{u}_{,\eta}) \cdot \delta \mathbf{u} \, d\xi d\eta \quad (2.29)$$

$$= {}^k p_t \int_{\eta} \int_{\xi} [(\mathbf{e}_{\eta} \times \delta \mathbf{u}) \cdot \Delta \mathbf{u}_{,\xi} + (\delta \mathbf{u} \times \mathbf{e}_{\xi}) \cdot \Delta \mathbf{u}_{,\eta}] \, d\xi d\eta \quad (2.30)$$

$$= {}^k p_t \int_s (n_{\xi}^s \mathbf{e}_{\eta} \times \delta \mathbf{u} + \delta \mathbf{u} \times n_{\eta}^s \mathbf{e}_{\xi}) \cdot \Delta \mathbf{u} \, ds \\ - {}^k p_t \int_{\eta} \int_{\xi} (\mathbf{e}_{\eta} \times \delta \mathbf{u}_{,\xi} + \delta \mathbf{u}_{,\eta} \times \mathbf{e}_{\xi}) \cdot \Delta \mathbf{u} \, d\xi d\eta. \quad (2.31)$$

Durch eine Basistransformation der kovarianten Einheitsvektoren \mathbf{e}_{ξ} , \mathbf{e}_{η} der Strukturoberfläche in Randnormale \mathbf{n}_t^s und Randtangente \mathbf{t}_t^s ist eine einheitliche Darstellung in Randgrößen möglich. n_{ξ}^s und n_{η}^s bezeichnen die Koordinaten der Randgrößen, siehe [GF97]:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{n}_t^s \\ \mathbf{t}_t^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_{\xi}^s & n_{\eta}^s \\ -n_{\eta}^s & n_{\xi}^s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{\xi} \\ \mathbf{e}_{\eta} \end{pmatrix}, \quad (2.32)$$

$$\delta^k W^{\Delta n} = {}^k p_t \int_s (\Delta \mathbf{u} \times \mathbf{t}_t^s) \cdot \delta \mathbf{u} \, ds \\ - {}^k p_t \int_{\eta} \int_{\xi} (\mathbf{e}_{\eta} \times \delta \mathbf{u}_{,\xi} + \delta \mathbf{u}_{,\eta} \times \mathbf{e}_{\xi}) \cdot \Delta \mathbf{u} \, d\xi d\eta. \quad (2.33)$$

Diskussion des Randwertproblems

Das infolge einer Produktintegration entwickelte Randintegral

$$\delta^k W^s = {}^k p_t \int_s (\Delta \mathbf{u} \times \mathbf{t}_t^s) \cdot \delta \mathbf{u} \, ds \quad (2.34)$$

aus Gleichung (2.33) ist bezüglich Strukturverschiebung $\Delta \mathbf{u}$ und virtueller Verschiebung $\delta \mathbf{u}$ unsymmetrisch. Der verbleibende Gebietsterm in Gleichung (2.33) ist symmetrisch, was in nachfolgenden Umformungen noch ausführlich dargestellt wird. Zunächst wird gezeigt, unter welchen Randbedingungen der unsymmetrische Randterm $\delta^k W^s$ verschwindet, siehe hierzu auch [RS02], [RS03d], [RS01], [BWMH00], [Sch82], [SR84]:

- Kein Rand

Bei pneumatischen und hydraulischen Strukturen ist das Fluid vollständig von der Struktur umschlossen. Es existiert kein Rand, und das Randintegral verschwindet.

Bei einer Simulation von Fluid-Struktur-Problemen ist es zweckmäßig, nur signifikante Teilbereiche einer Struktur zu modellieren. Die Darstellung einer geschlossenen komplett das Fluid umschließenden Strukturoberfläche kann zur notwendigen Volumenberechnung des Fluids über eine geeignete Projektion umgangen werden. Die in Gleichung (2.15) vorgestellte Formel zeigt eine Mittelung von drei Volumenberechnungen, die in drei aufeinander orthogonalen Raumrichtungen ausgeführt werden. Wird auf die Mittelung verzichtet, ist eine virtuelle Einbindung von Starrkörpergebieten möglich. Dies soll an einem Beispiel verdeutlicht werden.

Beispiel:

In einem Pneumatikzylinder mit einem deformierbaren Zylinderboden wird über Kolbenvorschub ein Kompressionsdruck aufgebaut, der den Zylinderboden verformt. Wird bei der Modellgenerierung z.B. die Zylinderachse parallel zur raumfesten \mathbf{e}_x -Achse gelegt, ist das eingeschlossene Fluidvolumen v über eine Projektion in \mathbf{e}_x -Richtung mittels Integration

$$v = \int_{\eta} \int_{\xi} \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{x} \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{n} \, d\xi d\eta \quad (2.35)$$

berechenbar. Diese Beschreibung erlaubt, daß nur die für die Untersuchung interessierenden Zylinder- und Kolbenoberflächen im Rahmen der Simulation zu modellieren sind. Die vertikale Zylinderwand ist virtuell als Starrkörper vorhanden und geht nicht in die Simulation ein. Eine eventuell aufwendige Kontaktmodellierung zwischen Kolben und Zylinderwand entfällt.

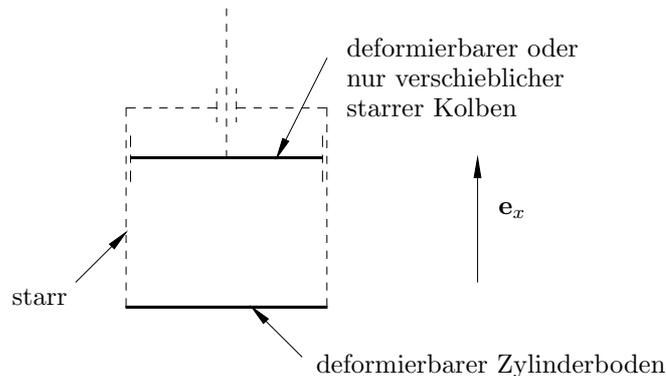


Abbildung 2.4: Reduziertes Modell für projizierte Volumenberechnung

Bei einer projizierten Volumenberechnung sind verschiedene Randbedingungen zum Fixieren der verbleibenden deformierbaren Teilbereiche denkbar, die auch

zum Verschwinden des Randintegrals führen.

- Festlager
Der Rand der deformierbaren Struktur ist fest gelagert. Aus dieser Vorgabe folgt für die virtuelle Verschiebung und die Strukturverschiebung am Rand $\delta \mathbf{u} = \Delta \mathbf{u} = \mathbf{0}$. Das Randintegral ist identisch null.
- Zweiwertiges Loslager
Läßt ein zweiwertiges Loslager nur eine tangentielle Verschiebung in Richtung \mathbf{t}_t^s zu, so ergibt sich als geometrische Randbedingung $\mathbf{t}_t^s \parallel \delta \mathbf{u} \parallel \Delta \mathbf{u}$ was zum Verschwinden des Spatprodukts $(\Delta \mathbf{u} \times \mathbf{t}_t^s) \cdot \delta \mathbf{u} = 0$ führt, siehe Abbildung 2.5.

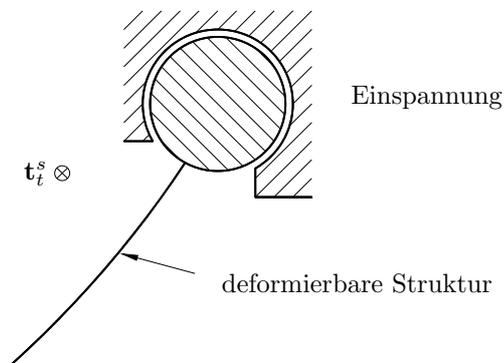


Abbildung 2.5: Projizierte Volumenberechnung mit zweiwertigem Loslager; Struktur entlang Tangente \mathbf{t}_t^s verschiebbar und um Tangente \mathbf{t}_t^s drehbar gelagert

- Einwertiges Loslager
Wird über ein einwertiges Loslager eine tangentielle Verschiebung entlang des Randes, eine Drehbewegung um die Randtangente und eine Gleitbewegung in einer beliebigen Tangentialebene zugelassen, ist nur eine beliebige Komponente senkrecht zur Randtangente \mathbf{t}_t^s fixiert. Auch dies führt zum Verschwinden des Randintegrals, siehe Abbildung 2.6.

Beweis: Die Orientierung einer Kurve im Raum ist eindeutig über die Krümmung und daraus abgeleitet über die Fundamentalgrößen festgelegt, siehe hierzu [Smi64]. An jeder Stelle s der Raumkurve können der Hauptnormalenvektor \mathbf{n}^s , Tangentenvektor \mathbf{t}^s und Binormalenvektor \mathbf{b}^s als begleitendes orthogonales Dreibein der Raumkurve konstruiert werden, siehe Abbildung 2.7.

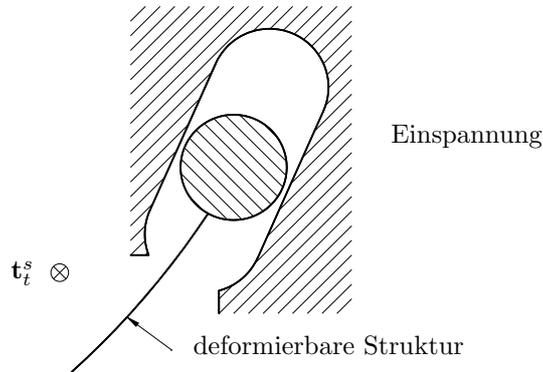


Abbildung 2.6: Projizierte Volumenberechnung mit einwertigem Loslager; Struktur entlang Tangente \mathbf{t}_t^s verschiebbar, um Tangente \mathbf{t}_t^s drehbar und in beliebiger Tangentialebene verschiebbar gelagert

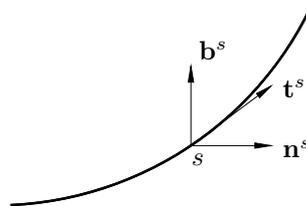


Abbildung 2.7: Fundamentalgrößen einer Raumkurve

Das Spatprodukt in Gleichung (2.34) ergibt in Komponenten der Fundamentalgrößen:

$$(\Delta \mathbf{u} \times \mathbf{t}_t^s) \cdot \delta \mathbf{u} \quad (2.36)$$

$$= \begin{pmatrix} \Delta u_n \\ \Delta u_t \\ \Delta u_b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \delta u_n \\ \delta u_t \\ \delta u_b \end{pmatrix} \quad (2.37)$$

$$= \delta u_b \Delta u_n - \delta u_n \Delta u_b.$$

Gleichung (2.37) ist identisch null, wenn eine beliebige Verschiebung senkrecht zur Tangente z. B. in Normalenrichtung ($\delta u_n = \Delta u_n = 0$) oder Binormalenrichtung ($\delta u_b = \Delta u_b = 0$) fixiert wird, siehe hierzu auch [Sch82]. Es ist anzumerken, dass die Orientierung der Fundamentalgrößen über den Krümmungsvektor festgelegt ist. Das Spatprodukt verschwindet auch dann, wenn nur eine Achse (Tangentenvektor) des begleitenden Dreieins tangential und die beiden anderen Achsen lediglich orthogonal zur Raumkurve liegen. Der Beweis ist infolgedessen nicht an die Kurvenkrümmung und somit an die Fundamentalgrößen der Raumkurve gebunden.

Es muß hierbei festgehalten werden, daß für eine reale Struktur derartige Randbedingungen, die nicht zum Verschwinden des Randintegrals führen, physikalisch nicht existieren. Verschwindet das Randintegral nicht, ergibt sich keine symmetrische Steifigkeitsmatrix, dies wäre demnach ein Hinweis auf ein System ohne Potential.

Die Symmetrie des verbleibenden Gebietsterms aus Gleichung (2.33) wird mit Aufbau einer vollständigen Metrik der Strukturoberfläche sichtbar. Hierzu sind kontravariante Basisvektoren einzuführen, siehe auch [Kne97]:

$${}^* \mathbf{n}_t = \mathbf{e}_\xi \times \mathbf{e}_\eta, \quad \mathbf{e}_\xi = \mathbf{e}^\eta \times {}^* \mathbf{n}_t, \quad \mathbf{e}_\eta = {}^* \mathbf{n}_t \times \mathbf{e}^\xi. \quad (2.38)$$

Entsprechend Gleichung (2.38) werden die kovarianten Basisvektoren durch kontravariante Basisvektoren ersetzt:

$$\begin{aligned} \delta^k W^{\Delta n} &= -{}^k p_t \int_\eta \int_\xi ({}^* \mathbf{n}_t \times \mathbf{e}^\xi \times \delta \mathbf{u}_{,\xi} \\ &\quad + \delta \mathbf{u}_{,\eta} \times \mathbf{e}^\eta \times {}^* \mathbf{n}_t) \cdot \Delta \mathbf{u} \, d\xi d\eta \\ &= -{}^k p_t \int_\eta \int_\xi [(\Delta \mathbf{u} \times {}^* \mathbf{n}_t \times \mathbf{e}^\xi) \cdot \delta \mathbf{u}_{,\xi} \\ &\quad + (\mathbf{e}^\eta \times {}^* \mathbf{n}_t \times \Delta \mathbf{u}) \cdot \delta \mathbf{u}_{,\eta}] \, d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Zum besseren Verständnis des verbleibenden Gebietsterms werden schiefsymmetrische Tensoren $\underline{\mathbf{W}}^\xi$ und $\underline{\mathbf{W}}^\eta$ eingeführt:

$$\begin{aligned} \delta^k W^{\Delta n} &= -{}^k p_t \int_\eta \int_\xi [\delta \mathbf{u}_{,\xi} \cdot ({}^* \mathbf{n}_t \otimes \mathbf{e}^\xi - \mathbf{e}^\xi \otimes {}^* \mathbf{n}_t) \Delta \mathbf{u} \\ &\quad + \delta \mathbf{u}_{,\eta} \cdot ({}^* \mathbf{n}_t \otimes \mathbf{e}^\eta - \mathbf{e}^\eta \otimes {}^* \mathbf{n}_t) \Delta \mathbf{u}] \, d\xi d\eta \\ &= -{}^k p_t \int_\eta \int_\xi (\delta \mathbf{u}_{,\xi} \cdot \underline{\mathbf{W}}^\xi \Delta \mathbf{u} + \delta \mathbf{u}_{,\eta} \cdot \underline{\mathbf{W}}^\eta \Delta \mathbf{u}) \, d\xi d\eta \\ &= {}^k p_t \int_\eta \int_\xi (\delta \mathbf{u}_{,\xi} \cdot \underline{\mathbf{W}}^{\xi T} \Delta \mathbf{u} + \delta \mathbf{u}_{,\eta} \cdot \underline{\mathbf{W}}^{\eta T} \Delta \mathbf{u}) \, d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Die Ausgangsgleichung (2.29) kann ebenfalls wie Gleichung (2.33) in eine kontravariante Darstellung mit den Transformationen (2.38) überführt werden:

$$\delta^k W^{\Delta n} = -{}^k p_t \int_\eta \int_\xi (\Delta \mathbf{u}_{,\xi} \times {}^* \mathbf{n}_t \times \mathbf{e}_\xi \\ + \mathbf{e}^\eta \times {}^* \mathbf{n}_t \times \Delta \mathbf{u}_{,\eta}) \cdot \delta \mathbf{u} \, d\xi d\eta \quad (2.41)$$

$$= -{}^k p_t \int_\eta \int_\xi \delta \mathbf{u} \cdot (\underline{\mathbf{W}}^\xi \Delta \mathbf{u}_{,\xi} + \underline{\mathbf{W}}^\eta \Delta \mathbf{u}_{,\eta}) \, d\xi d\eta. \quad (2.42)$$

Der symmetrische Aufbau des Gebietsterms wird deutlich, wenn die Gleichungen (2.40) und (2.42) zu halben Teilen addiert werden:

$$\delta^k W^{\Delta n} = \frac{k p_t}{2} \int_{\eta} \int_{\xi} \begin{pmatrix} \delta \mathbf{u} \\ \delta \mathbf{u}_{,\xi} \\ \delta \mathbf{u}_{,\eta} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{W}^{\xi} & \mathbf{W}^{\eta} \\ \mathbf{W}^{\xi T} & 0 & 0 \\ \mathbf{W}^{\eta T} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{u} \\ \Delta \mathbf{u}_{,\xi} \\ \Delta \mathbf{u}_{,\eta} \end{pmatrix} d\xi d\eta \quad (2.43)$$

2.3.2 Produktintegration der Volumenberechnung

Der in Gleichung (2.17) verbleibende zweite Gebietsterm $\delta^k W^{\Delta p}$ ist ebenfalls durch Produktintegration an die Randbedingungen anzupassen. Dieser Term beschreibt die Änderung im Druckniveau durch die linearisierten konstitutiven Gleichungen. Die zu integrierenden partiellen Ableitungen in ξ - und η -Richtungen finden sich in der Volumenänderung $\Delta v^{\Delta n}$ infolge Normalenänderung wieder, siehe Gleichung (2.27). Entsprechend den Umformungen in Gleichung (2.30) und (2.31) ergibt sich für die Volumenänderung durch Normalenänderung aus Gleichung (2.26)

$$\Delta v^{\Delta n} = \frac{1}{3} \int_{\eta} \int_{\xi} \mathbf{x}_t \cdot \Delta^* \mathbf{n} d\xi d\eta \quad (2.44)$$

$$= \frac{1}{3} \int_s (\Delta \mathbf{u} \times \mathbf{t}_t^s) \cdot \mathbf{x}_t ds + \frac{2}{3} \int_{\eta} \int_{\xi} {}^* \mathbf{n}_t \cdot \Delta \mathbf{u} d\xi d\eta. \quad (2.45)$$

Das entstehende Randintegral verschwindet identisch, da die Fluidoberfläche keinen Rand hat. Diese Argumentation ist auch dann gültig, wenn mit einem reduzierten Modell entsprechend Kapitel 2.3.1 gerechnet wird. In Kapitel 2.3.1 werden die zugehörigen Randbedingungen der belasteten Strukturoberfläche diskutiert. Hier hingegen wird explizit das Fluidvolumen diskutiert, das immer eine geschlossene Oberfläche besitzt, siehe Abbildung (2.8).

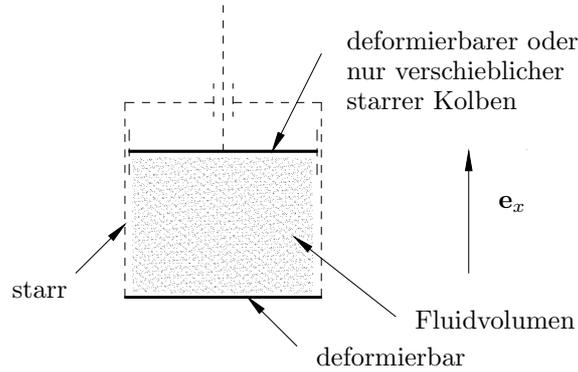


Abbildung 2.8: Geschlossenes Fluidvolumen bei reduziertem Modell

Die Volumenänderung resultiert nach Verschwinden des Randintegrals in

$$\begin{aligned}
\Delta v &= \Delta v^{\Delta u} + \Delta v^{\Delta n} \\
&= \frac{1}{3} \int_{\eta} \int_{\xi} {}^* \mathbf{n}_t \cdot \Delta \mathbf{u} \, d\xi d\eta + \frac{2}{3} \int_{\eta} \int_{\xi} {}^* \mathbf{n}_t \cdot \Delta \mathbf{u} \, d\xi d\eta \\
&= \int_{\eta} \int_{\xi} {}^* \mathbf{n}_t \cdot \Delta \mathbf{u} \, d\xi d\eta.
\end{aligned} \tag{2.46}$$

Das Ergebnis aus Gleichung (2.46) entspricht der Anwendung des Flächensatzes, siehe hierzu auch [dB82]. Die Änderung im Druckniveau $\Delta^k p$ aus Gleichung (2.22) und Gleichung (2.24) ist mit dem Ergebnis aus Gleichung (2.46) direkt über die Strukturverschiebung $\Delta \mathbf{u}$ gegeben:

$$\Delta^k p + {}^k \alpha_t \int_{\eta} \int_{\xi} {}^* \mathbf{n}_t \cdot \Delta \mathbf{u} \, d\xi d\eta = 0. \tag{2.47}$$

Für die linearisierte Variation der Volumenänderungsarbeit der Druckkraft $\delta^k W^{\Delta p}$ folgt für die Änderung im Druckniveau aus Gleichung (2.17) dann die symmetrische Form

$$\delta^k W^{\Delta p} = - {}^k \alpha_t \int_{\eta} \int_{\xi} \delta \mathbf{u} \cdot {}^* \mathbf{n}_t \, d\xi d\eta \int_{\eta} \int_{\xi} {}^* \mathbf{n}_t \cdot \Delta \mathbf{u} \, d\xi d\eta. \tag{2.48}$$

2.3.3 Symmetrienachweis

Die Ergebnisse der Produktintegrationen aus Kapitel 2.3.1 und 2.3.2 lassen sich zusammenfassen. Die linearisierte Variation der Volumenänderungsarbeit zeigt den erwarteten symmetrischen Aufbau bzgl. der Strukturverschiebung und der virtuellen Verschiebung. Die Konservativität des Modells ist somit nach der Diskussion von Rand- und Übergangsbedingungen zwischen Struktur und Fluid auch für nichtlineare Fragestellungen gezeigt:

$$\begin{aligned}
\delta^k W_{lin} &= \delta^k W_t \\
&- {}^k \alpha_t \int_{\eta} \int_{\xi} \delta \mathbf{u} \cdot {}^* \mathbf{n}_t \, d\xi d\eta \int_{\eta} \int_{\xi} {}^* \mathbf{n}_t \cdot \Delta \mathbf{u} \, d\xi d\eta && \text{Term I} \\
&+ \frac{{}^k p_t}{2} \int_{\eta} \int_{\xi} \begin{pmatrix} \delta \mathbf{u} \\ \delta \mathbf{u}_{,\xi} \\ \delta \mathbf{u}_{,\eta} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \underline{\mathbf{W}}^{\xi} & \underline{\mathbf{W}}^{\eta} \\ \underline{\mathbf{W}}^{\xi T} & 0 & 0 \\ \underline{\mathbf{W}}^{\eta T} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{u} \\ \Delta \mathbf{u}_{,\xi} \\ \Delta \mathbf{u}_{,\eta} \end{pmatrix} d\xi d\eta && \text{Term II} \\
& && (2.49)
\end{aligned}$$

Term I gibt die Volumenkopplung der Zustandsgleichungen wieder. Term II repräsentiert die gleichförmig auf die Strukturoberfläche wirkende Folgelast.

2.4 Hybride Formulierung

Eine alternative Darstellung zur reinen Verschiebungsform (2.49) ist die hybride Darstellung des Modells mit der Druckänderung $\Delta^k p$ als zusätzlichem Freiheitsgrad [RS03d]. Die linearisierte Variation der Volumenänderungsarbeit (2.47) wird über die Druckänderung $\Delta^k p$ mit der linearisierten Zustandsgleichung (2.47) gekoppelt:

$$\begin{aligned} \delta^k W_{lin} &= \delta^k W_t \\ &+ \Delta^k p \int_{\eta} \int_{\xi} \delta \mathbf{u} \cdot {}^* \mathbf{n}_t \, d\xi d\eta \\ &+ \frac{{}^k p_t}{2} \int_{\eta} \int_{\xi} \begin{pmatrix} \delta \mathbf{u} \\ \delta \mathbf{u}_{,\xi} \\ \delta \mathbf{u}_{,\eta} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \underline{\mathbf{W}}^{\xi} & \underline{\mathbf{W}}^{\eta} \\ \underline{\mathbf{W}}^{\xi T} & 0 & 0 \\ \underline{\mathbf{W}}^{\eta T} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{u} \\ \Delta \mathbf{u}_{,\xi} \\ \Delta \mathbf{u}_{,\eta} \end{pmatrix} \, d\xi d\eta, \end{aligned} \quad (2.50)$$

$$\Delta^k p + {}^k \alpha_t \int_{\eta} \int_{\xi} {}^* \mathbf{n}_t \cdot \Delta \mathbf{u} \, d\xi d\eta = 0. \quad (2.51)$$

Die hybride Darstellung eignet sich besonders für eine Erweiterung auf deformierbare befüllte Mehrkammerstrukturen, was im nachfolgenden Kapitel verdeutlicht wird.

2.5 Diskretisierung

Aus dem Prinzip der virtuellen Arbeit $\delta \Pi = 0$ mit ${}^{el}V$ als elastischem Potential der Struktur, der Variation der Volumenänderungsarbeit $\delta^k W$ und der virtuellen Arbeit der externen richtungstreuen Kräfte $\delta^{ex} W$ ergibt sich die nichtlineare Gleichgewichtsbedingung zu

$$\delta \Pi = \delta {}^{el}V - \delta^k W - \delta^{ex} W = 0. \quad (2.52)$$

Die Variation der inneren Energie $\delta^k U$ geht über die Variation der Volumenänderungsarbeit $\delta^k W$ der resultierenden Gasdruckkraft in das Gesamtpotential der Struktur ein. Mit der Einführung der Volumenänderungsarbeit ist der Energieaustausch zwischen Struktur und Fluid sichtbar und das Prinzip der virtuellen Arbeit bleibt auf den Kontrollraum der Struktur beschränkt. Durch Entwicklung der Gleichgewichtsbedingung in eine Taylorreihe wird das nichtlineare Gleichgewichtsproblem stückweise linearisiert und der gesuchte Gleichgewichtszustand iterativ mit dem Newtonverfahren ermittelt:

$$\delta \Pi(\mathbf{x}_t + \Delta \mathbf{u}) = \delta \Pi(\mathbf{x}_t) + D\delta \Pi(\mathbf{x}_t)\Delta \mathbf{u} = 0. \quad (2.53)$$

Für einen bekannten Zustand (Iterationsschritt) t im Lastschritt ist folgendes lineares Gleichungssystem zu lösen:

$$D[\delta {}^{el}V(\mathbf{x}_t) - \delta^k W(\mathbf{x}_t)]\Delta \mathbf{u} = -\delta \Pi(\mathbf{x}_t). \quad (2.54)$$

Hierzu wird die Struktur z.B. mit einem isoparametrischen Ansatz \mathbf{N} approximiert und in eine Finite-Element-Darstellung überführt:

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{N}\mathbf{x}, \quad \Delta \mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{d}, \quad \delta \mathbf{u} = \mathbf{N}\delta \mathbf{d}. \quad (2.55)$$

Das entstehende algebraische Gleichungssystem der Fluid-Struktur-Kopplung zur Bestimmung der Knotenverschiebungen \mathbf{d} besteht aus einer symmetrischen Struktursteifigkeitsmatrix ${}^{el}V_{,\mathbf{x}\mathbf{x}}$, der hergeleiteten symmetrischen Laststeifigkeitsmatrix ${}^k W_{,\mathbf{x}\mathbf{x}}$ und einem Lastvektor aus inneren Kräften ${}^{el}V_{,\mathbf{x}}$, Kompressionsdruck- bzw. Wechselwirkungskräften ${}^k W_{,\mathbf{x}}$ und extern angreifenden Kräften ${}^{ex}W_{,\mathbf{x}}$:

$$({}^{el}V_{,\mathbf{x}\mathbf{x}} - {}^k W_{,\mathbf{x}\mathbf{x}})\mathbf{d} = -({}^{el}V_{,\mathbf{x}} - {}^k W_{,\mathbf{x}} - {}^{ex}W_{,\mathbf{x}}). \quad (2.56)$$

Für die Erweiterung auf Mehrkammersysteme ist die hybride Darstellung der Gleichungen (2.50) und (2.51) zweckmäßig. Mit dem isoparametrischen Ansatz (2.55) ergibt sich das algebraische hybride Gleichungssystem in Knotenverschiebungen \mathbf{d} und Druckänderungen $\Delta^k p_i$ für $i = 1..n$ Kammern zu

$$\begin{pmatrix} {}^{el,k}\mathbf{K} & -\mathbf{a}_1 & -\mathbf{a}_2 & -\mathbf{a}_3 & \dots & -\mathbf{a}_n \\ -\mathbf{a}_1^T & -{}^k\alpha_1^{-1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\mathbf{a}_2^T & 0 & -{}^k\alpha_2^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ -\mathbf{a}_3^T & 0 & 0 & -{}^k\alpha_3^{-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\mathbf{a}_n^T & 0 & 0 & 0 & \dots & -{}^k\alpha_n^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{d} \\ \Delta^k p_1 \\ \Delta^k p_2 \\ \Delta^k p_3 \\ \vdots \\ \Delta^k p_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^k\mathbf{F} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.57)$$

mit den Einträgen

$${}^{el,k}\mathbf{K} = {}^{el}\mathbf{K} - {}^k\mathbf{K}_1 - {}^k\mathbf{K}_2 - {}^k\mathbf{K}_3 - \dots - {}^k\mathbf{K}_n, \quad (2.58)$$

$${}^k\mathbf{F} = {}^{ex}\mathbf{f} + {}^k\mathbf{f}_1 + {}^k\mathbf{f}_2 + {}^k\mathbf{f}_3 + \dots + {}^k\mathbf{f}_n - {}^{el}\mathbf{f}. \quad (2.59)$$

Durch die Ansatzfunktionen (2.55) wird eine Kammer i durch einen symmetrischen Laststeifigkeitsanteil ${}^k\mathbf{K}_i$, einen Kopplungsvektor \mathbf{a}_i und einen Lastvektor ${}^k\mathbf{f}_i$ im Gleichungssystem repräsentiert:

$${}^k\mathbf{K}_i = \frac{{}^k p_{ti}}{2} \sum_{e_i} \int_{\eta} \int_{\xi} \begin{pmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{N}_{,\xi} \\ \mathbf{N}_{,\eta} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & \underline{\mathbf{W}}^{\xi} & \underline{\mathbf{W}}^{\eta} \\ \underline{\mathbf{W}}^{\xi T} & 0 & 0 \\ \underline{\mathbf{W}}^{\eta T} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{N}_{,\xi} \\ \mathbf{N}_{,\eta} \end{pmatrix} d\xi d\eta, \quad (2.60)$$

$$\mathbf{a}_i = \sum_{e_i} \int_{\eta} \int_{\xi} \mathbf{N}^T * \mathbf{n}_t d\xi d\eta, \quad (2.61)$$

$${}^k\mathbf{f}_i = {}^k p_{ti} \sum_{e_i} \int_{\eta} \int_{\xi} \mathbf{N}^T * \mathbf{n}_t d\xi d\eta. \quad (2.62)$$

Nach sukzessiver Elimination der Kammerdrücke $\Delta^k p_i$ ergibt sich die für FE-Algorithmen typische Knotenverschiebungsform

$$[{}^{el}\mathbf{K} - \sum_{i=1}^n ({}^k\mathbf{K}_i - {}^k\alpha_i \mathbf{a}_i \mathbf{a}_i^T)] \mathbf{d} = {}^{ex}\mathbf{f} + \sum_{i=1}^n {}^k\mathbf{f}_i - {}^{el}\mathbf{f}. \quad (2.63)$$

Auf die Struktursteifigkeitsmatrix ${}^{el}\mathbf{K}$ wird pro Kammer i ein Laststeifigkeitsanteil ${}^k\mathbf{K}_i$ und ein Volumenkopplungsanteil ${}^k\alpha_i \mathbf{a}_i \mathbf{a}_i^T$ addiert. Der Laststeifigkeitsanteil ${}^k\mathbf{K}_i$ gibt die Richtungsabhängigkeit der Druckkraft wieder, die vollbesetzte Kopplungsmatrix ${}^k\alpha_i \mathbf{a} \mathbf{a}^T$ ist eine Dyade vom Rang eins und verdeutlicht die Volumenabhängigkeit der Druckkraft. Die globale Steifigkeitsmatrix wird bei n Kammern durch n Dyaden vom Rang eins erweitert.

2.6 Lösungsalgorithmus

Gleichungssysteme mit dyadischer Aufaddierung sind in der Literatur vielfältig diskutiert, siehe [Zie68], [Zie70] oder [ZF84]. Durch die dyadische Erweiterung der Steifigkeitsmatrix kann bei einem Einkammersystem ein vollbesetztes algebraisches Gleichungssystem entstehen, mit entsprechendem Lösungsaufwand sowohl für direkte als auch für iterative Löser. Der numerische Aufwand für voll besetzte Systeme kann mit Hilfe der Sherman-Morrison-Formel beträchtlich reduziert werden, siehe [SM49], [RS03d], [RS02], [RS01]. Liegt z.B. eine einfache dyadische Erweiterung $\alpha \mathbf{a} \mathbf{b}^T$ einer schwach besetzten Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} vor, ergibt sich folgendes Gleichungssystem

$$(\mathbf{K} + \alpha \mathbf{a} \mathbf{b}^T) \mathbf{d} = \mathbf{F} \quad (2.64)$$

mit \mathbf{d} als unbekanntem Knotenverschiebungsvektor und \mathbf{F} als Residuum. Nach Sherman-Morrison wird das voll besetzte Gleichungssystem bei unterschiedlichen Rangvektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} in zwei schwach besetzte Referenzprobleme überführt. Sei die erweiterte Steifigkeitsmatrix

$$\mathbf{A} = \mathbf{K} + \alpha \mathbf{a} \mathbf{b}^T, \quad (2.65)$$

dann ist folgendes Gleichungssystem

$$\mathbf{d} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{F} \quad (2.66)$$

zu lösen. Unter der Annahme, daß die Inverse von \mathbf{K} bekannt ist, wird nach [SM49] folgender additiver Ansatz gemacht

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{K}^{-1} - \mathbf{B}. \quad (2.67)$$

Wird die Gleichung (2.65) nach \mathbf{K} umgestellt, von links mit der inversen Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}^{-1}

$$\mathbf{K}^{-1} \mathbf{K} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{A} - \alpha \mathbf{K}^{-1} \mathbf{a} \mathbf{b}^T, \quad (2.68)$$

und von rechts mit der inversen Matrix \mathbf{A}^{-1} durchmultipliziert, ergibt sich für die gesuchte Inverse folgendes Zwischenergebnis

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{K}^{-1} - \alpha \mathbf{K}^{-1} \mathbf{a} \mathbf{b}^T \mathbf{A}^{-1}. \quad (2.69)$$

Die in Gleichung (2.67) unbekannt Matrix \mathbf{B} kann somit über einen Koeffizientenvergleich bestimmt werden. Die in Gleichung (2.69) verbleibende Matrix \mathbf{A}^{-1} wird durch Multiplikation von links mit \mathbf{b}^T bestimmt:

$$\mathbf{b}^T \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{b}^T \mathbf{K}^{-1} - \alpha \mathbf{b}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{a} \mathbf{b}^T \mathbf{A}^{-1}, \quad (2.70)$$

$$\mathbf{b}^T \mathbf{A}^{-1} = (1 + \alpha \mathbf{b}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{a})^{-1} \mathbf{b}^T \mathbf{K}^{-1}. \quad (2.71)$$

Wird die Gleichung (2.71) in die Gleichung (2.69) eingesetzt, ergibt sich schließlich die gesuchte Form der Inversen:

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{K}^{-1} - \frac{\alpha \mathbf{K}^{-1} \mathbf{a} \mathbf{b}^T \mathbf{K}^{-1}}{1 + \alpha \mathbf{b}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{a}}. \quad (2.72)$$

Der Lösungsvektor \mathbf{d} berechnet sich dann entsprechend Gleichung (2.64) zu

$$\mathbf{d} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F} - \frac{\alpha \mathbf{K}^{-1} \mathbf{a} \mathbf{b}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F}}{1 + \alpha \mathbf{b}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{a}}. \quad (2.73)$$

Die Lösung gewinnt an Übersicht, wenn zwei Zwischenlösungen

$$\begin{aligned} {}^1 \mathbf{d} &= \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F}, \\ {}^2 \mathbf{d} &= \mathbf{K}^{-1} \mathbf{a} \end{aligned}$$

und die Abkürzung

$$\beta = \frac{\alpha}{1 + \alpha \mathbf{b}^T {}^2 \mathbf{d}} \quad (2.74)$$

eingeführt werden:

$$\mathbf{d} = {}^1 \mathbf{d} - \beta \mathbf{b}^T {}^1 \mathbf{d} {}^2 \mathbf{d}. \quad (2.75)$$

Eine Alternative zur Lösung des Gleichungssystems über die Sherman-Morrison-Formel ist die direkte Lösung des hybriden Gleichungssystems mit den Knotenverschiebungen und den Druckänderungen als Unbekannte, was hier nicht weiter verfolgt wird, aber für iterative Löser sicher ein effizienteres Vorgehen darstellt. Am Beispiel eines Dreikammerproblems

$$({}^{el,k} \mathbf{K}_{123} + {}^k \alpha_1 \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_1^T + {}^k \alpha_2 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_2^T + {}^k \alpha_3 \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_3^T) \mathbf{d} = {}^k \mathbf{F}_{123} \quad (2.76)$$

kann beispielhaft gezeigt werden, wie sich nach mehrmaligem Anwenden der Formel drei Referenzgleichungssysteme ergeben. Zweckmäßig wird die Struktursteifigkeit ${}^{el} \mathbf{K}$ mit den Laststeifigkeitsanteilen ${}^k \mathbf{K}_i$ der Richtungsänderungen der Normalen zu einer globalen Teilsteifigkeitsmatrix ${}^{el,k} \mathbf{K}_{123}$ zusammengefaßt. Die

einzelnen Kraftvektoren der inneren Kräfte ${}^{el}\mathbf{f}$, der äußeren Kräfte ${}^{ex}\mathbf{f}$ und der Druckkräfte in den Kammern ${}^k\mathbf{f}_i$ werden zu einem globalen Lastvektor ${}^k\mathbf{F}_{123}$ aufaddiert:

$${}^{el,k}\mathbf{K}_{123} = {}^{el}\mathbf{K} - {}^k\mathbf{K}_1 - {}^k\mathbf{K}_2 - {}^k\mathbf{K}_3, \quad (2.77)$$

$${}^k\mathbf{F}_{123} = {}^{ex}\mathbf{f} + {}^k\mathbf{f}_1 + {}^k\mathbf{f}_2 + {}^k\mathbf{f}_3 - {}^{el}\mathbf{f}. \quad (2.78)$$

Nach dem mehrmaligen Anwenden der Sherman-Morrison-Formel baut sich ein explizites Lösungsschema auf, in dem nicht die vollbesetzte, sondern die schwach besetzte Teilsteifigkeitsmatrix ${}^{el,k}\mathbf{K}_{123}$, d.h. die Strukturmatrix mit den Strukturfreiheitsgraden, invertiert und mit verschiedenen rechten Seiten, dem Lastvektor ${}^k\mathbf{F}_{123}$ und den drei Rangvektoren \mathbf{a}_i ($i = 1..3$), gelöst werden muß:

$$\begin{aligned} {}^6\mathbf{d} &= {}^{el,k}\mathbf{K}_{123}^{-1} {}^k\mathbf{F}_{123}, \\ {}^7\mathbf{d} &= {}^{el,k}\mathbf{K}_{123}^{-1} \mathbf{a}_1, \\ {}^8\mathbf{d} &= {}^{el,k}\mathbf{K}_{123}^{-1} \mathbf{a}_2, \\ {}^9\mathbf{d} &= {}^{el,k}\mathbf{K}_{123}^{-1} \mathbf{a}_3. \end{aligned} \quad (2.79)$$

Es sei hier festzustellen, daß die Vektoren \mathbf{a}_i jeweils nur an Stellen der Freiheitsgrade besetzt sind, die in Kontakt mit dem Fluid sind. Der gesuchte Knotenverschiebungsvektor \mathbf{d} ergibt sich rekursiv durch

$$\begin{aligned} \mathbf{d} &= {}^1\mathbf{d} - {}^1\beta {}^2\mathbf{d}^T \mathbf{F} {}^2\mathbf{d}, \\ {}^1\mathbf{d} &= {}^3\mathbf{d} - {}^2\beta {}^4\mathbf{d}^T \mathbf{F} {}^4\mathbf{d}, \\ {}^2\mathbf{d} &= {}^5\mathbf{d} - {}^2\beta {}^4\mathbf{d}^T \mathbf{a}_3 {}^4\mathbf{d}, \\ {}^3\mathbf{d} &= {}^6\mathbf{d} - {}^3\beta {}^7\mathbf{d}^T \mathbf{F} {}^7\mathbf{d}, \\ {}^4\mathbf{d} &= {}^8\mathbf{d} - {}^3\beta {}^7\mathbf{d}^T \mathbf{a}_2 {}^7\mathbf{d}, \\ {}^5\mathbf{d} &= {}^9\mathbf{d} - {}^3\beta {}^9\mathbf{d}^T \mathbf{a}_3 {}^9\mathbf{d} \end{aligned} \quad (2.80)$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} {}^1\beta &= \frac{{}^k\alpha_3}{1 + {}^k\alpha_3 \mathbf{a}_3^T {}^2\mathbf{d}}, \\ {}^2\beta &= \frac{{}^k\alpha_2}{1 + {}^k\alpha_2 \mathbf{a}_2^T {}^4\mathbf{d}}, \\ {}^3\beta &= \frac{{}^k\alpha_1}{1 + {}^k\alpha_1 \mathbf{a}_1^T {}^7\mathbf{d}}. \end{aligned} \quad (2.81)$$

Je größer das Verhältnis von Fluidoberfläche zur gesamten diskretisierten Strukturfläche ist, desto stärker ist die Kopplung des Gleichungssystems ausgeprägt, und die Effektivität der Sherman-Morrison-Formel wird besonders deutlich.

2.7 Bogenlängenverfahren

Das Bogenlängenverfahren, auch Arc-Length-Verfahren oder Riks-Verfahren genannt, ist ein Regularisierungsverfahren zur Behandlung singulärer Gleichungssysteme, siehe [Rik79], [Sch82], [KD85], [Sch89], [Ram80], [Cri81], [SW86], [WWM88]. Die Diskussion des Bogenlängenverfahrens im Zusammenhang mit Fluid-Struktur-Problemen ist vielfach motiviert. Aus mechanischer Sicht ist die Bestimmung von kritischen Lasten in der nichtlinearen Fluid-Struktur-Analyse interessant, siehe hierzu auch [RS03d]. Eine stabile Gleichgewichtslage ist durch eine positiv definite Steifigkeitsmatrix gekennzeichnet. Die Verformungsabhängigkeit der Steifigkeitsmatrix führt in der Umgebung der kritischen Last auf ein nahezu singuläres Gleichungssystem. Die daraus resultierenden Knotenverschiebungen werden immer größer, was in Konvergenzproblemen deutlich wird. Mit der Formulierung einer Regelungsgleichung wird das Gleichungssystem über eine dyadische Erweiterung stabilisiert und das Lastniveau kann in der Umgebung der kritischen Last entsprechend angepaßt werden. Weitere begleitende Maßnahmen erlauben die Bestimmung der kritischen Last bzw. des Last-Verformungspfades im postkritischen Bereich. Aus numerischer Sicht interessant, aber aus mechanischer Sicht meist nicht sehr sinnvoll, ist die Berechnung von abfallenden, post-kritischen Last-Verformungspfaden bzw. die Berechnung von Nachbeulformen. Es ist im Einzelfall zu prüfen, ob die Vernachlässigung der Trägheitskraft, bewirkt von Strukturmasse und Fluidmasse, im Versagensfall noch zulässig ist. Sind die Strukturinstabilitäten auf kleine und leichte Strukturbereiche begrenzt, kann eine Vernachlässigung gerechtfertigt sein. Bei großflächigen Strukturinstabilitäten ist eine vollständige, dynamische Modellierung unumgänglich, um den Versagensprozeß physikalisch korrekt abzubilden.

Aus algorithmischer Sicht ist die Integration des Bogenlängenverfahrens in die vorgestellte Fluid-Struktur Umgebung interessant. Beide Problemstellungen führen auf eine dyadisch erweiterte Steifigkeitsmatrix.

Im folgenden wird eine Kraft- und eine Verschiebungsregelung von pneumatischen und hydraulischen Systemen vorgestellt, die für praktische Fragestellungen von wesentlicher Bedeutung sind.

2.7.1 Kraftregelung

Zu den im Kapitel 2.1 beschriebenen Modellgleichungen wird eine zusätzliche Nebenbedingung (2.85) zur Lastregelung eingeführt. Die externe richtungstreue Kraft ${}^{ex}\mathbf{f}$ wird über einen Regelparameter λ im Lastniveau entsprechend angepaßt, so daß in der Nähe einer Singularität ein quadratisches Konvergenzverhalten erhalten bleibt.

Prinzip der virtuellen Arbeit

Das beschreibende Variationsfunktional (2.52) der Fluid-Struktur-Kopplung wird durch eine virtuelle Arbeit $\delta^{\lambda}W$ einer geregelten externen richtungstreuen

Kraft erweitert:

$$\delta\Pi = \delta^{el}V - \delta^k W - \delta^{\lambda f} W \quad (2.82)$$

$$= \delta^{el}V - \delta^{k,\lambda f} W. \quad (2.83)$$

Das Variationfunktional der Druckkraft und der geregelten Last hat die Form

$$\delta^{k,\lambda f} W = {}^k p \int_{\eta} \int_{\xi} {}^* \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\xi d\eta + \lambda {}^{ex} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u}. \quad (2.84)$$

Regelungsgleichung

Die Regelungsgleichung (2.85) für den Lastparameter λ ist zunächst durch eine allgemeine algebraische Nebenbedingung gegeben, die für jeden Iterationsschritt innerhalb eines Lastschrittes zu erfüllen ist:

$$\Xi(\mathbf{x}, \lambda) = 0. \quad (2.85)$$

Das nichtlineare Funktional (2.82) mit den konstitutiven Gleichungen aus Kapitel 2.1.2 und der Regelungsgleichung (2.85) ist entsprechend den Ausführungen im Kapitel 2.2 für eine iterative Lösung mit dem Newton-Verfahren durch eine mehrdimensionale Taylorreihe mit Abbruch nach dem linearen Term zu entwickeln. Die gesuchte Gleichgewichtslage wird dann unter gleichzeitiger Erfüllung der Nebenbedingungen ermittelt.

Linearisierung

Die Linearisierung des Variationsfunktionals (2.84) führt entsprechend den Umformungen der Kapitel 2.2 - 2.4 auf eine hybride Darstellung mit der unbekanntem Strukturverschiebung $\Delta \mathbf{u}$, der Druckänderung $\Delta {}^k p$ und der Änderung im Lastparameter $\Delta \lambda$. Ausgehend vom Lastniveau $\Lambda = 0$ der unverformten Struktur wird die Last $\lambda {}^{ex} \mathbf{f}$ der Gleichgewichtslage bei Anwendung des Newton-Verfahrens über eine Zwischenlösung λ_t und der Laständerung $\Delta \lambda$ beschrieben. Die unbekanntem Druckänderung $\Delta {}^k p$ wird gleichzeitig aus der linearisierten Zustandsgleichung (2.51) bestimmt:

$$\begin{aligned} \delta^{k,\lambda f} W_{lin} &= \delta^{k,\lambda f} W_t \\ &+ \Delta {}^k p \int_{\eta} \int_{\xi} \delta \mathbf{u} \cdot {}^* \mathbf{n}_t \, d\xi d\eta \\ &+ {}^k p_t \int_{\eta} \int_{\xi} \Delta {}^* \mathbf{n}_t \cdot \delta \mathbf{u} \, d\xi d\eta + \Delta \lambda {}^{ex} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u} \end{aligned} \quad (2.86)$$

mit

$$\Xi_{lin} = \Xi_t + \mathbf{z} \cdot \Delta \mathbf{u} + \gamma \Delta \lambda = 0, \quad (2.87)$$

$$\mathbf{z} = \frac{d}{d\varepsilon} \Xi(\mathbf{x}_t + \varepsilon \Delta \mathbf{u}, \lambda_t) |_{\varepsilon=0}, \quad (2.88)$$

$$\gamma = \frac{d}{d\varepsilon} \Xi(\mathbf{x}_t, \lambda_t + \varepsilon \Delta \lambda) |_{\varepsilon=0}. \quad (2.89)$$

Der Iterationsprozess im Last-Verschiebungsraum kann für ein System mit einem Freiheitsgrad graphisch dargestellt werden, siehe Abbildung (2.9). In der

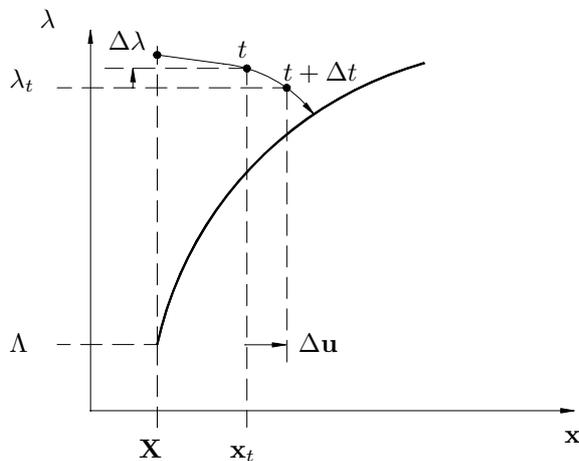


Abbildung 2.9: Bogenlängenverfahren im Last-Verschiebungsraum

Literatur findet sich eine große Auswahl von Regelungsgleichungen, siehe z.B. [KD85], [WWM88] und [Sch89]. Für die beschriebene Fluid-Struktur-Kopplung erweist sich eine Iteration auf Normalenebene als robust und leicht implementierbar.

Iteration auf Normalenebene

Die Jakobi-Determinante des erweiterten Gleichungssystems hat im Durchschlagpunkt den größten Wert, wenn die Iterationsebene den Lastverformungspfad orthogonal schneidet, siehe Abbildung 2.10 und [Sch89]. Mit dem Tangentenvektor \mathbf{t}_t der Last-Verformungskurve und der Iterationsebene $\mathbf{t} - \mathbf{t}_t$ ist die linearisierte Nebenbedingung direkt formulierbar.

$$\Xi_{lin} = \mathbf{t}_t^T (\mathbf{t} - \mathbf{t}_t) = 0 \quad (2.90)$$

Der Tangentenvektor und die Iterationsebene sind mit den Verschiebungsgrößen und dem Lastparameter im Iterationsraum aufzustellen:

$$\mathbf{t}_t = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_t - \mathbf{X} \\ \lambda_t - \Lambda \end{pmatrix}, \quad (2.91)$$

$$\mathbf{t} - \mathbf{t}_t = \begin{pmatrix} \mathbf{x} - \mathbf{x}_t \\ \lambda - \lambda_t \end{pmatrix}. \quad (2.92)$$

Durch Koeffizientenvergleich lassen sich die Parameter der linearisierten Nebenbedingung (2.87) aus Abbildung 2.10 ablesen:

$$\mathbf{z} = \mathbf{x}_t - \mathbf{X}, \quad \gamma = \lambda_t - \Lambda. \quad (2.93)$$

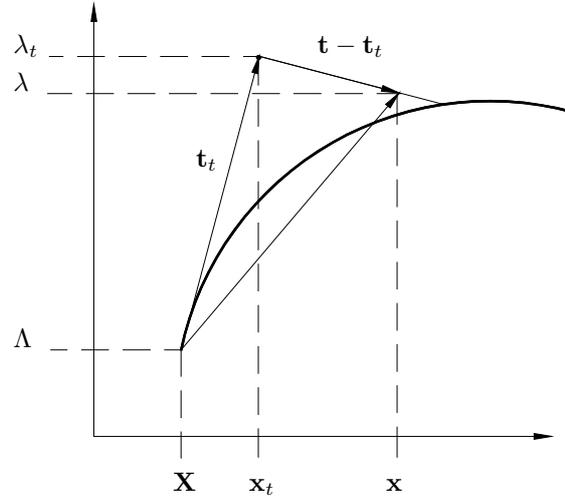


Abbildung 2.10: Iteration auf Normalenebene im Last-Verschiebungsraum

Diskretisierung

Das linearisierte Gleichungssystem wird mit dem isoparametrischen Ansatz (2.55) diskretisiert und in hybrider Form aufgestellt. Das System setzt sich aus dem linearisierten Variationsfunktional $\delta\Pi_{lin}$ und den zwei Nebenbedingungen, der linearisierten Zustandsgleichung und der linearisierten Regelungsgleichung, zusammen. Für ein Einkammersystem mit kompressibler Fluidfüllung und geregelter externer Last ergibt sich folglich

$$\begin{pmatrix} {}^{el,k}\mathbf{K} & -\mathbf{a} & -{}^{ex}\mathbf{f} \\ -\mathbf{a}^T & -k\alpha^{-1} & 0 \\ \mathbf{z}^T & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{d} \\ \Delta^k p \\ \Delta\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda {}^{ex}\mathbf{f} + {}^k\mathbf{f} - {}^{el}\mathbf{f} \\ 0 \\ -\Xi \end{pmatrix}. \quad (2.94)$$

Das weiter auf Knotenverschiebungen \mathbf{d} kondensierte Gleichungssystem zeigt folgenden Aufbau:

$$\left({}^{el,k}\mathbf{K} + {}^k\alpha\mathbf{a}\mathbf{a}^T + \frac{1}{\gamma} {}^{ex}\mathbf{f}\mathbf{z}^T \right) \mathbf{d} = \lambda^k \mathbf{F} - \frac{\Xi}{\gamma} {}^{ex}\mathbf{f}. \quad (2.95)$$

Für ein kompressibles Fluid wird die Steifigkeitsmatrix der Fluid-Struktur-Kopplung durch die Zusatzgleichungen zweifach dyadisch erweitert. Der Lastvektor setzt sich aus einem geregelten Anteil

$$\lambda^k \mathbf{F} = \lambda {}^{ex}\mathbf{f} + {}^k\mathbf{f} - {}^{el}\mathbf{f} \quad (2.96)$$

und einem Korrekturfaktor $\frac{\Xi}{\gamma} {}^{ex}\mathbf{f}$ zusammen.

Lösungsalgorithmus

Das Bogenlängenverfahren wird in einem Prädiktor-Korrektor Verfahren implementiert. Im Prädiktorschritt $t = 0$ sind zunächst Knotenverschiebungen \mathbf{d}_0

zu einem vorgegebenen Lastfaktor λ_0 zu bestimmen. Die Ausgangskonfiguration für den Korrektorschritt $t = 1$ wird über eine Skalierung des Lastniveaus mittels Vorgabe einer *Bogenlänge* des Last-Verformungspfades ermittelt. Das infolge der formulierten Regelungsgleichung erweiterte Gleichungssystem wird anschließend in Korrektorschritten unter kontinuierlicher Anpassung des Lastparameters im Sinne des Newtonverfahrens simultan gelöst. Die gesuchte Knotenverschiebung \mathbf{d} zum Lastniveau

$$\lambda = \lambda_t + \Delta\lambda \quad (2.97)$$

berechnet sich im Iterationsprozess, durch mehrmaliges Anwenden der Sherman-Morrison-Formel mit den Zwischenlösungen ${}^1\mathbf{d}$, ${}^2\mathbf{d}$ und der Änderung $\Delta\lambda$ im Lastniveau:

$$\mathbf{d} = \Delta\lambda {}^1\mathbf{d} + {}^2\mathbf{d}. \quad (2.98)$$

Die Niveauänderung $\Delta\lambda$ und die Zwischenlösungen berechnen sich zu

$$\Delta\lambda = -\frac{\Xi + \mathbf{z}^T {}^2\mathbf{d}}{\gamma + \mathbf{z}^T {}^1\mathbf{d}}, \quad (2.99)$$

$${}^1\mathbf{d} = {}^3\mathbf{d} - \beta {}^4\mathbf{d}^T \text{ex} \mathbf{f} {}^4\mathbf{d}, \quad (2.100)$$

$${}^2\mathbf{d} = {}^5\mathbf{d} - \beta {}^4\mathbf{d}^T \text{ex} \mathbf{f} {}^4\mathbf{d}. \quad (2.101)$$

Für ein Einkammersystem mit kompressiblem Fluid und geregelter externer Last ist die Teilstufigkeitsmatrix ${}^{el,k}\mathbf{K}$ dreimal mit verschiedenen rechten Seiten für einen Iterationsschritt zu lösen:

$$\beta = \frac{{}^k\alpha}{1 + {}^k\alpha \mathbf{a}^T {}^4\mathbf{d}}, \quad (2.102)$$

$${}^3\mathbf{d} = {}^{el,k}\mathbf{K}^{-1} \text{ex} \mathbf{f}, \quad (2.103)$$

$${}^4\mathbf{d} = {}^{el,k}\mathbf{K}^{-1} \mathbf{a}, \quad (2.104)$$

$${}^5\mathbf{d} = {}^{el,k}\mathbf{K}^{-1} \lambda^k \mathbf{F}. \quad (2.105)$$

Auch hier wird nochmal deutlich, daß mit Hilfe der Sherman-Morrison Formel elegant die Lösung einer vollbesetzten und auch unsymmetrischen Steifigkeitsmatrix umgangen wird.

Kraftregelung eines pneumatischen Durchschlag-Getriebes

Am Beispiel eines pneumatischen Durchschlag-Getriebes kann die Kraftregelung einer Fluid-Struktur-Kopplung anschaulich dargestellt werden. Die geregelte externe Kraft $\lambda^{\text{ex}} f$ wird über einen nichtlinearen Mechanismus (Hebellänge l) umgelenkt um das Gasvolumen $V = Al_p$ über einen Kolben (Kolbenfläche A) zu komprimieren, siehe Abbildung 2.11. Die Kolbenstellung wird über den Winkel φ beschrieben, bei $\varphi = \varphi_0$ ist der Gasdruck p im Zylinder gleich dem Umgebungsdruck P .

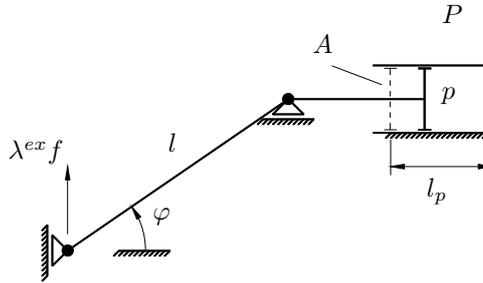


Abbildung 2.11: Kraftregelung eines pneumatischen Durchschlag-Getriebes

Mit dem Freiheitsgrad φ und dem Lastparameter λ kann die Volumenänderungsarbeit δU und die adiabatische Zustandsgleichung formuliert werden:

$$\begin{aligned} \delta U &= [(P - p)Al \sin \varphi + \lambda^{ex} f l \cos \varphi] \delta \varphi = 0, \\ p[V - Al(\cos \varphi - \cos \varphi_0)]^\kappa &= PV^\kappa. \end{aligned}$$

In dimensionsloser Darstellung mit den Parametern

$$\psi = \frac{p}{P}, \quad \Phi = \frac{f}{Ps}, \quad \mu = \frac{Al}{V} = \frac{l}{l_p}$$

ergibt sich für die Gleichgewichtsbedingung des Systems und das Gasgesetz

$$\begin{aligned} (1 - \psi) \sin \varphi + \lambda \Phi \cos \varphi &= 0, \\ \psi [1 - \mu(\cos \varphi - \cos \varphi_0)]^\kappa &= 1. \end{aligned} \quad (2.106)$$

Die Regelung wird über eine Iteration auf Normalenebene realisiert. Der Tangentenvektor \mathbf{t} in der Last-Verschiebungs-Ebene kann direkt mit dem Freiheitsgrad φ und dem Lastniveau λ angegeben werden:

$$\begin{aligned} \Xi_{lin} &= \mathbf{t}_t^T (\mathbf{t} - \mathbf{t}_t) \\ &= \varphi_t (\varphi - \varphi_t) + \lambda_t \Phi^2 (\lambda - \lambda_t). \end{aligned}$$

Nach der Linearisierung errechnen sich aus der Gleichgewichtsbedingung und der Zustandsgleichung folgende Koeffizienten für das hybride Gleichungssystem (2.94):

$$\begin{aligned} {}^{el,k}K &= (1 - \psi_t) \cos \varphi_t - \lambda_t \Phi \sin \varphi_t, & a &= \sin \varphi_t, \\ {}^k\alpha_t &= \frac{\kappa \psi_t \mu}{1 - \mu(\cos \varphi_t - \cos \varphi_0)}, & {}^k f &= (1 - \psi_t) \sin \varphi_t, \\ {}^{ex} f &= -\Phi \cos \varphi_t, & {}^{el} f &= 0, \\ z &= \varphi_t, & \gamma &= \Phi^2 \lambda_t. \end{aligned}$$

Der Last-Verschiebungs-Verlauf $\lambda(\varphi)$ des Getriebes kann sowohl analytisch aus den Gleichungen (2.106) bestimmt als auch punktweise mittels des entwickelten Lösungsalgorithmus berechnet werden, siehe Abbildung 2.12.

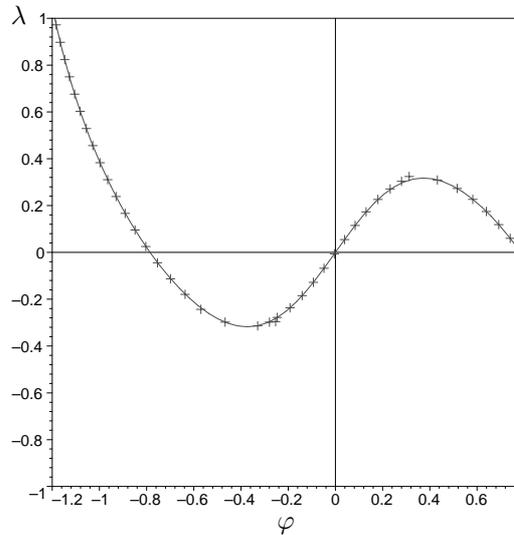


Abbildung 2.12: Kraftregelung eines pneumatischen Durchschlag-Getriebes; Last-Verschiebungs-Kurve $\lambda(\varphi)$; $-$: analytische Lösung, $+$: iterative Lösung mittels Kraftregelung; $\mu = 2$, $\varphi_0 = \frac{\pi}{4}$, $\kappa = 1$, $\Phi = 1$

In Abbildung 2.12 ist deutlich das Durchschlagverhalten des Getriebes zu erkennen. Ferner wird eine sehr gute Approximation der exakten Lösung durch die Kraftregelung erreicht. Für die iterative Lösung ist jeweils nur ein Iterationsschritt je Lastschritt notwendig.

2.7.2 Indirekte Verschiebungsregelung

Wird der Druckaufbau über einen verschiebungsgesteuerten Kolbenhub realisiert, ist eine zur Kraftregelung modifizierte Implementierung des Bogenlängenverfahrens notwendig. Es hat sich gezeigt, daß eine direkte Regelung des Kolbenhubes bei stark nichtlinearen Problemstellungen zu Konvergenzproblemen führt. Es ist deshalb zweckmäßig, die Fluid-Struktur-Kopplung über eine Nachlaufrechnung einzubinden.

Prinzip der virtuellen Arbeit

Der auf die Struktur wirkende Druck wird direkt über den Regelparameter λ gesteuert. Das beschreibende Gesamtpotential setzt sich aus der Variation der Verformungsenergie $\delta^{el}V$ und der virtuellen Arbeit einer geregelten Druckkraft $\delta^{\lambda k}W$ zusammen:

$$\delta\Pi = \delta^{el}V - \delta^{\lambda k}W. \quad (2.107)$$

Die infolge der Regelungsgleichung nicht mehr konservative virtuelle Arbeit $\delta^{\lambda k} W$ der Druckkraft hat die folgende Form

$$\delta^{\lambda k} W = \lambda^k p \int_{\eta} \int_{\xi} {}^* \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\xi d\eta. \quad (2.108)$$

Der Lastparameter λ wird wie in Kapitel 2.7.1 durch eine algebraische Nebenbedingung (2.85) im Last-Verschiebungsraum geregelt. Hier ist anzumerken, daß mit der simultanen Berücksichtigung der Regelungsgleichung die Konservativität der Druckkraft verloren geht, was sich auch später im unsymmetrischen Aufbau der Laststeifigkeitsmatrix zeigt. Die Physik des Fluids in Form der Zustandsgleichung wird bei der indirekten Verschiebungsregelung lediglich in der Nachlaufrechnung und nicht mehr gleichberechtigt zum Strukturverhalten berücksichtigt.

Zustandsgleichungen

Um die zum Druckniveau $\lambda^k p$ korrespondierende Kolbenstellung zu bestimmen, ist eine mit der Regelungsgröße λ modifizierte Zustandsgleichung aufzubauen. Für pneumatische Systeme ergibt sich die adiabatische Zustandsgleichung mit dem geregelten Druckniveau $\lambda^k p$ und dem dazu korrespondierendem Gasvolumen $\lambda^v v$ zu

$$\lambda^k p \lambda^v v = \text{const.} \quad (2.109)$$

Entsprechend kann die Hookesche Gleichung eines hydraulischen Systems formuliert werden:

$$\lambda^k p = -K \frac{\lambda^v v - V}{V}. \quad (2.110)$$

Volumenberechnung

Die zu einem gegebenen Regeldruck $\lambda^k p$ korrespondierende Kolbenstellung kann ermittelt werden, wenn das Fluidvolumen $\lambda^v v$ über zwei Oberflächenintegrale beschrieben wird:

$$\lambda^v v = v + h_v \quad (2.111)$$

$$= \frac{1}{3} \int_{\eta} \int_{\xi} \mathbf{x} \cdot {}^* \mathbf{n} \, d\xi d\eta + \frac{1}{3} \int_{h_{\eta}} \int_{h_{\xi}} h_{\mathbf{x}} \cdot h_{\mathbf{n}} \, d^h \xi d^h \eta \quad (2.112)$$

Der Ortsvektor $h_{\mathbf{x}}$ zum geregelten Strukturbereich (starrer Strukturbereich bzw. Kolben) setzt sich aus der unverformten Strukturformlage \mathbf{X} und dem variablen Kolbenhub $h_{\mathbf{e}}$ zusammen. Der Einheitsvektor \mathbf{e} mit $|\mathbf{e}| = 1$ gibt die Richtung des Kolbenhubs und h den Hub an, siehe Abbildung 2.13.

$$h_{\mathbf{x}} = \mathbf{X} + h_{\mathbf{e}}. \quad (2.113)$$

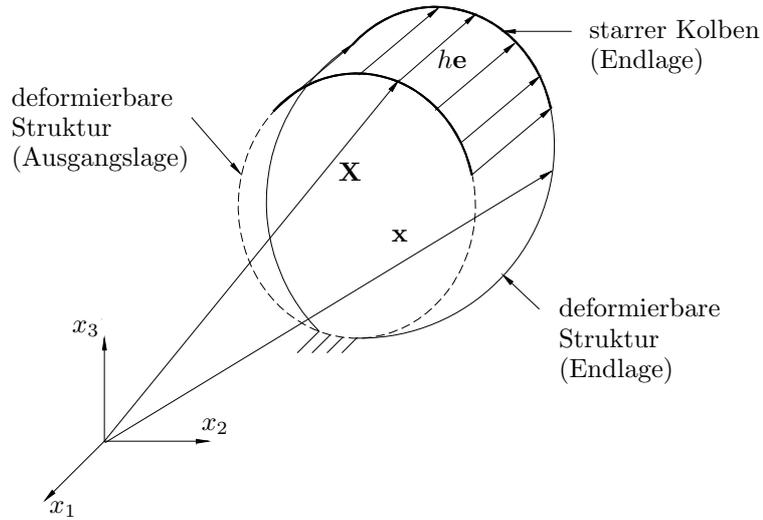


Abbildung 2.13: Indirekte Verschiebungsregelung für kompressible Fluide

Linearisierung

Die nichtlineare Funktionaldarstellung (2.107) wird linearisiert und der Aufbau eines iterativen Lösungsverfahrens ist möglich. Diese Darstellung unterscheidet sich von der unregulierten Variante durch ein vom Regelparameter abhängiges Druckniveau $\lambda^k p$:

$$\begin{aligned} \delta^{\lambda^k} W_{lin} &= \delta^{\lambda^k} W_t \\ &+ \Delta \lambda^k p \int_{\eta} \int_{\xi} {}^* \mathbf{n}_t \cdot \delta \mathbf{u} \, d\xi d\eta + \lambda_t^k p \int_{\eta} \int_{\xi} \Delta {}^* \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\xi d\eta \end{aligned} \quad (2.114)$$

Die Änderung im Druckniveau $\Delta \lambda^k p$ ist alleine über die allgemeine linearisierte Regelungsgleichung (2.87) bzw. durch die spezielle Beziehung für eine Iteration auf Normalenebene (2.90) bestimmt. Die linearisierte Zustandsgleichung kann dann rückwirkend genutzt werden, um die physikalisch korrekte Kolbenstellung zu einem gegebenen Fluidruck $\lambda_t^k p$ im Iterationsprozess zu berechnen. Für ein pneumatisches System folgt die linearisierte Zustandsgleichung

$$\Delta \lambda^k p + \lambda^k \alpha_t \Delta \lambda v = 0 \quad (2.115)$$

mit

$$\lambda^k \alpha_t = \kappa \frac{\lambda_t^k p}{\lambda v_t}. \quad (2.116)$$

Eine entsprechende Beziehung ergibt sich ebenfalls für ein hydraulisches System:

$$\Delta \lambda^k p + \alpha \Delta \lambda v = 0 \quad (2.117)$$

mit

$$\alpha = \frac{K}{V}. \quad (2.118)$$

Die sich nach der Linearisierung ergebende Volumenänderung $\Delta^\lambda v$ setzt sich aus einem Struktur- und einem Regelungsbereich zusammen:

$$\begin{aligned} \Delta^\lambda v &= \frac{1}{3} \int_\eta \int_\xi \Delta \mathbf{u} \cdot {}^* \mathbf{n}_t + \mathbf{x}_t \cdot \Delta^* \mathbf{n} \, d\xi d\eta \\ &\quad + \frac{1}{3} \int_{h_\eta} \int_{h_\xi} \Delta^h \mathbf{u} \cdot {}^h \mathbf{n}_t + {}^h \mathbf{x}_t \cdot \Delta^h \mathbf{n} \, d^h \xi d^h \eta. \end{aligned} \quad (2.119)$$

Zur korrekten Darstellung von Feldgleichung und Randwertproblem wird mittels Produktintegration weiter vereinfacht.

Produktintegration

Analog den Umformungen von Gleichung (2.30) und (2.31) ergibt sich für die geregelte Volumenänderung

$$\begin{aligned} \Delta^\lambda v &= \frac{1}{3} \int_s (\Delta \mathbf{u} \times \mathbf{t}_t^s) \cdot \mathbf{x}_t \, ds + \frac{1}{3} \int_{h_s} ({}^h \Delta \mathbf{u} \times {}^h \mathbf{t}_t^s) \cdot {}^h \mathbf{x}_t \, d^h s \\ &\quad + \int_\eta \int_\xi {}^* \mathbf{n}_t \cdot \Delta \mathbf{u} \, d\xi d\eta + \int_{h_\eta} \int_{h_\xi} {}^h \mathbf{n}_t \cdot \Delta^h \mathbf{u} \, d^h \xi d^h \eta. \end{aligned} \quad (2.120)$$

Die Ränder des deformierbaren und des starren Teilbereichs sind identisch und die Randintegrale heben sich gegenseitig auf:

$$\mathbf{x}_t|_s = \mathbf{x}_t|_{h_s}, \quad \mathbf{t}_t^s = -{}^h \mathbf{t}_t^s, \quad \Delta \mathbf{u}|_s = \Delta \mathbf{u}|_{h_s}. \quad (2.121)$$

Für die geregelte Volumenänderung folgt nach der Anpassung an Übergangsbedingungen

$$\Delta^\lambda v = \int_\eta \int_\xi {}^* \mathbf{n}_t \cdot \Delta \mathbf{u} \, d\xi d\eta + \int_{h_\eta} \int_{h_\xi} {}^h \mathbf{n}_t \cdot \Delta^h \mathbf{u} \, d^h \xi d^h \eta. \quad (2.122)$$

Die Verschiebungsänderung $\Delta^h \mathbf{u}$ im geregelten Teilbereich (Kolben) ist durch den Kolbenhub Δh und mit der Kolbenrichtung \mathbf{e} darstellbar:

$$\Delta^h \mathbf{u} = \Delta h \mathbf{e}. \quad (2.123)$$

Mit der in \mathbf{e} -Richtung projizierten Kolbenfläche

$${}^h S = \int_{h_\eta} \int_{h_\xi} \mathbf{e} \cdot {}^h \mathbf{n}_t \, d^h \xi d^h \eta \quad (2.124)$$

kann die Volumenänderung $\Delta^\lambda v$ in verkürzter Form formuliert werden:

$$\Delta^\lambda v = \int_\eta \int_\xi {}^* \mathbf{n}_t \cdot \Delta \mathbf{u} \, d\xi d\eta + \Delta h {}^h S. \quad (2.125)$$

Diskretisierung

Die Diskretisierung mit dem isoparametrischen Ansatz (2.55) überführt das linearisierte Gesamtpotential (2.114) und die linearisierte Regelungsgleichung (2.87) in ein hybrides algebraisches Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} {}^{el,\lambda^k} \mathbf{K} & -{}^k \mathbf{f} \\ \mathbf{z}^T & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{d} \\ \Delta \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^k \mathbf{f} - {}^{el} \mathbf{f} \\ -\Xi \end{pmatrix}. \quad (2.126)$$

Die globale Teilsteifigkeitsmatrix ${}^{el,\lambda^k} \mathbf{K}$ setzt sich aus der Struktursteifigkeitsmatrix ${}^{el} \mathbf{K}$ und den Laststeifigkeitsanteilen ${}^{\lambda^k} \mathbf{K}$, die vom Regelparameter und der Normalenänderung im elastischen Teilbereich abhängen, zusammen:

$${}^{el,\lambda^k} \mathbf{K} = {}^{el} \mathbf{K} - {}^{\lambda^k} \mathbf{K}. \quad (2.127)$$

Nach der Kondensation auf Knotenverschiebungen ergibt sich eine einfache dyadische Erweiterung der Teilsteifigkeitsmatrix ${}^{el,\lambda^k} \mathbf{K}$ durch die linearisierte diskretisierte Regelungsgleichung (2.87) bzw. Gleichung (2.90):

$$\left({}^{el,\lambda^k} \mathbf{K} + \frac{1}{\gamma} {}^k \mathbf{f} \mathbf{z}^T \right) \mathbf{d} = \lambda^k \mathbf{R} - \frac{\Xi}{\gamma} {}^k \mathbf{f}. \quad (2.128)$$

Der Lastvektor besteht aus einem Residuum $\lambda^k \mathbf{R} = \lambda^k \mathbf{f} - {}^{el} \mathbf{f}$ der inneren und der geregelten Druckkräfte sowie einem Korrekturanteil $\frac{\Xi}{\gamma} {}^k \mathbf{f}$. Durch die direkte Druckregelung findet sich im Korrekturanteil neben einem Residuum der Nebenbedingung $\frac{\Xi}{\gamma}$ der Lastvektor ${}^k \mathbf{f}$ der Druckkraft wieder. Der die Normalenänderung beschreibende Laststeifigkeitsanteil ${}^{\lambda^k} \mathbf{K}$ und der Druckkraftvektor ${}^k \mathbf{f}$ ändern sich gegenüber dem unregulierten Fall nur im geregelten Druckniveau:

$${}^{\lambda^k} \mathbf{K} = \frac{\lambda_t^k p}{2} \sum_e \int_\eta \int_\xi \begin{pmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{N}_{,\xi} \\ \mathbf{N}_{,\eta} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{W}^\xi & \mathbf{W}^\eta \\ \mathbf{W}^{\xi T} & 0 & 0 \\ \mathbf{W}^{\eta T} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{N}_{,\xi} \\ \mathbf{N}_{,\eta} \end{pmatrix} d\xi d\eta, \quad (2.129)$$

$${}^k \mathbf{f} = {}^k p \sum_e \int_\eta \int_\xi \mathbf{N}^T {}^* \mathbf{n}_t \, d\xi d\eta. \quad (2.130)$$

Für die Bestimmung der Kolbenstellung ist die linearisierte Zustandsgleichung (2.115) mit der modifizierten Volumenänderung aus Gleichung (2.125) zu diskretisieren:

$$\Delta h \lambda \alpha_t {}^h S + \Delta \lambda^k p + \lambda \alpha_t \mathbf{a}^T \mathbf{d} = 0. \quad (2.131)$$

Entsprechendes kann für ein hydraulisches System aus Gleichung (2.117) und Gleichung (2.125) abgeleitet werden. Zum Aufbau des relevanten Gleichungssystems ist anzumerken, daß eine simultane Erfüllung von Regelungsgleichung (2.87) und Zustandsgleichung (2.115) zu einem überbestimmten Gleichungssystem führt. Die Höhe des Druckniveaus $\lambda^k p$ ist allein über die Regelungsgleichung bestimmt, und die zum Druckniveau korrespondierende Kolbenstellung h wird im Nachlauf über die linearisierte Zustandsgleichung (2.131) ermittelt. Weiter zeigt sich im unsymmetrischen Aufbau des Gleichungssystems der Einfluß der nicht konservativen Regelung.

Lösungsalgorithmus

Mit Hilfe der Sherman-Morrison-Formel läßt sich das Regelniveau λ und die Knotenverschiebung \mathbf{d} wie im lastgeregelten Fall bestimmen:

$$\lambda = \lambda_t + \Delta\lambda, \quad (2.132)$$

$$\mathbf{d} = \Delta\lambda \mathbf{d}^1 + \mathbf{d}^2. \quad (2.133)$$

Die Zwischenlösungen $\mathbf{d}^1, \mathbf{d}^2$ und die Änderungen im Regelparameter $\Delta\lambda$ berechnen sich aus

$$\Delta\lambda = -\frac{\Xi + \mathbf{z}^T \mathbf{d}^2}{\gamma + \mathbf{z}^T \mathbf{d}^1}, \quad (2.134)$$

$$\mathbf{d}^1 = {}^{el, \lambda^k} \mathbf{K}^{-1} {}^k \mathbf{f}, \quad (2.135)$$

$$\mathbf{d}^2 = {}^{el, \lambda^k} \mathbf{K}^{-1} \lambda^k \mathbf{R}. \quad (2.136)$$

Bei der direkten Druckregelung ist für einen Iterationsschritt das Gleichungssystem mit zwei verschiedenen rechten Seiten, dem Residuum $\lambda^k \mathbf{R}$ und dem Lastvektor ${}^k \mathbf{f}$, zu lösen. Mit den Ergebnissen aus den Gleichungen (2.133) und (2.134) folgt anschließend mit Gleichung (2.131) für die iterative Änderung im Kolbenhub

$$\Delta h = \frac{-1}{\lambda_{\alpha_t}^k h S} (\Delta\lambda^k p + \lambda_{\alpha_t}^k \mathbf{a}^T \mathbf{d}). \quad (2.137)$$

Für eine Flüssigkeitsfüllung, d.h. hydraulisches System, ist $\lambda_{\alpha_t}^k$ durch $\alpha = \frac{K}{V}$ zu ersetzen.

2.7.3 Indirekte Verschiebungsregelung eines pneumatischen Durchschlag-Getriebes

Die indirekte Verschiebungsregelung wird ebenfalls anhand eines einfachen Beispiels verdeutlicht. Über ein Pneumatikelement mit zwei gleichen beweglichen Kolben (Kolbenflächen A) wird eine Feder (Federsteifigkeit c) über einen Umlenkmechanismus (Hebellänge l) belastet. Mit der Verschiebungsvorgabe u_{ext} am oberen Kolben kann im Inneren des Pneumatikzylinders ein Überdruck λp aufgebaut werden, der bei Überschreiten eines kritischen Druckwertes zum

Durchschlagen des Getriebes führt. In der Winkelstellung $\varphi = \varphi_0$ ist die Feder entspannt und der Gasdruck λp bei einem Gasvolumen $V = Al_p$ im Pneumatikelement entspricht dem Umgebungsdruck P , siehe Abbildung 2.14.

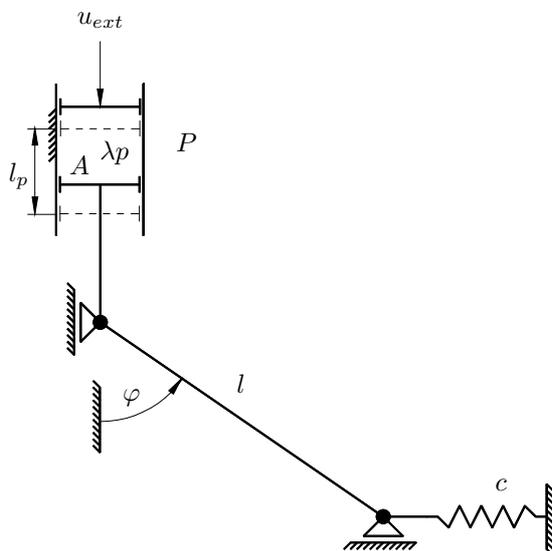


Abbildung 2.14: Indirekte Verschiebungsregelung eines pneumatischen Schub-Kolben-Getriebes

Die nichtlineare Gleichgewichtsbedingung des Getriebes und die adiabatische Zustandsgleichung des Gases ergeben sich zu

$$\begin{aligned}\delta\Pi &= \delta V - \delta^{\lambda k} W \\ &= [cl^2(\sin \varphi - \sin \varphi_0) \cos \varphi - (\lambda p - P)Al \sin \varphi] \delta \varphi = 0, \\ PV^\kappa &= \lambda p [V + Al(\cos \varphi_0 - \cos \varphi) - Au_{ext}]^\kappa.\end{aligned}$$

Mit den Parametern

$$\psi = \frac{p}{P}, \quad \eta = \frac{u_{ext}}{l}, \quad \mu = \frac{Al}{V} = \frac{l}{l_p} \quad \nu = \frac{cl}{PA}$$

lassen sich daraus die dimensionslose Gleichgewichtsbedingung

$$\nu(\sin \varphi - \sin \varphi_0) \cos \varphi - (\lambda \psi - 1) \sin \varphi = 0$$

und die dimensionslose Zustandsgleichung formulieren:

$$\lambda \psi [1 - \mu(\cos \varphi - \cos \varphi_0 + \eta)]^\kappa = 1.$$

Die Regelungsgleichung wird in Form einer Iteration auf Normalenebene realisiert. Mit dem Tangentenvektor \mathbf{t} an den Last-Verschiebungs-Pfad ergibt sich:

$$\begin{aligned}\Xi_{lin} &= \mathbf{t}_t^T (\mathbf{t} - \mathbf{t}_t) \\ &= \varphi_t (\varphi - \varphi_t) + \lambda_t \eta^2 (\lambda - \lambda_t).\end{aligned}$$

Entsprechend der hybriden Darstellung in Gleichung (2.126) berechnen sich die Koeffizienten des Gleichungssystems zu

$$\begin{aligned} {}^{el,\lambda k}K &= -\nu(\sin^2 \varphi_t + \cos^2 \varphi_t + \sin \varphi_t \sin \varphi_0) - (\lambda_t \psi - 1) \cos \varphi_t, \\ {}^{el}f &= \nu(\sin \varphi_t - \sin \varphi_0) \cos \varphi_t + \sin \varphi_t, \quad {}^k f = \psi \sin \varphi_t, \\ z &= \varphi_t, \quad \gamma = \psi^2 \lambda_t. \end{aligned}$$

In Abbildung 2.15 ist der Lastparameter λ und die dimensionslose Kolbenverschiebung η des oberen Kolbens über dem Winkel φ aufgetragen.

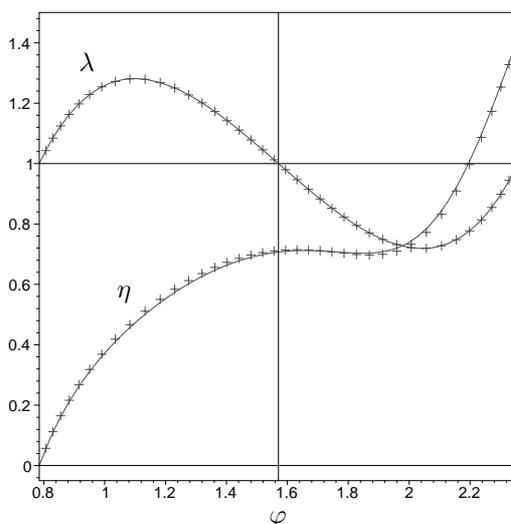


Abbildung 2.15: Indirekte Verschiebungsregelung eines pneumatischen Schub-Kolben-Getriebes; λ Lastniveau über Winkelstellung φ ; η dimensionslose Verschiebung des oberen Kolbens über Winkelstellung φ ; -: analytische Lösung, +: iterative Lösung mit indirekter Verschiebungssteuerung; $\nu = 3$, $\kappa = 1$, $\psi = 1$, $\mu = 1$, $\varphi_0 = \frac{\pi}{4}$

Das Durchlagverhalten des Getriebes ist mit dem Verlauf des Lastparameters λ über der Winkelstellung φ deutlich zu erkennen. Die Änderung der Kolbenverschiebung $\Delta\eta$ im Iterationsprozess kann mit Hilfe der linearisierten Zustandsgleichung berechnet werden:

$$\Delta\eta = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_t \kappa \mu} (1 - \mu(\eta_t - \cos \varphi_0 + \cos \varphi_t)) + \sin \varphi_t \Delta\varphi.$$

2.8 Stabilität

Das Stabilitätsverhalten von gekoppelten Fluid-Struktur-Problemen unterscheidet sich signifikant von ungekoppelten Problemen. Je nach Druckrichtung wirkt das Fluid stabilisierend oder destabilisierend auf die Struktur ein. Wie gezeigt führt die Linearisierung der Volumenänderungsarbeit zu Einträgen im Gleichungssystem, die je nach Vorzeichen zu einer Regularisierung des Gleichungssystems (Stabilisierung der Struktur) oder zu einer Singularität im Gleichungssystem (Destabilisierung der Struktur) im Verlauf der Verformung führen können. Neben den Laststeifigkeitsanteilen der Richtungsabhängigkeit ist besonders der Stabilitätseinfluß durch die dyadische Erweiterung der Steifigkeitsmatrix von Interesse. Ein System befindet sich in einem indifferenten Gleichgewichtszustand, wenn im Verlauf der Iteration bei verschwindendem Residuum $\mathbf{F} = {}^{ex} \mathbf{f} + {}^k \mathbf{f} - {}^{el} \mathbf{f} = \mathbf{0}$ ein Nachbarzustand neben dem Gleichgewichtszustand existiert. Das entstehende homogene Gleichungssystem

$$({}^{el,k} \mathbf{K} + {}^k \alpha \mathbf{a} \mathbf{a}^T) \mathbf{d} = \mathbf{0} \quad (2.138)$$

ist nur dann eindeutig lösbar, wenn die Determinante $\det({}^{el,k} \mathbf{K} + {}^k \alpha \mathbf{a} \mathbf{a}^T) = 0$ identisch Null ist. Gleichwertig zum Determinantenkriterium ist die Lösung des Standard eigenwertproblems

$$({}^{el,k} \mathbf{K} + {}^k \alpha \mathbf{a} \mathbf{a}^T - \bar{\varphi}_i \mathbf{I}) \mathbf{d}_i = \mathbf{0} \quad (2.139)$$

mit $\bar{\varphi}_i = 0$ als Nulleigenwert. Die Stabilitätsgrenze ist mit dem Verschwinden des kleinsten Eigenwertes erreicht.

2.8.1 Determinante

Das Determinantenkriterium ist ein gängiges Verfahren zur Bestimmung von kritischen Lasten und wird im Bogenlängenverfahren begleitend zur Steuerung und Überwachung des Lastparameters eingesetzt. Wechselt die Determinante im Prädiktorschritt das Vorzeichen von positiv auf negativ, ist die Stabilitätsgrenze erreicht. Die Determinante des erweiterten Systems ist durch

$$\det({}^{el,k} \mathbf{K} + {}^k \alpha \mathbf{a} \mathbf{a}^T) = [1 + {}^k \alpha \mathbf{a}^T {}^{el,k} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{a}] \det {}^{el,k} \mathbf{K} \quad (2.140)$$

erklärt, siehe hierzu [Sch89] und [Zie70]. Durch die Produktdarstellung wird der Einfluß der dyadischen Erweiterung auf die Determinante des Gesamtsystems deutlich.

2.8.2 Eigenwert

Der Stabilitätseinfluß der dyadischen Erweiterung ist ebenfalls über eine modale Entwicklung der modifizierten Eigenwerte zu zeigen, siehe hierzu die Arbeiten von [Wei68] und [SNOSA86]. Das Eigenwertproblem des Ausgangssystems ohne dyadische Erweiterung sei

$$({}^{el,k} \mathbf{K} - \varphi \mathbf{I}) \mathbf{r} = \mathbf{0} \quad (2.141)$$

mit Eigenvektor \mathbf{r} und Eigenwert φ . Hat die symmetrische Steifigkeitsmatrix ${}^{el,k}\mathbf{K}$ den Rang n , berechnet sich die Modalmatrix $\mathbf{R} = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n)$ der Eigenvektoren \mathbf{r}_i über die Normierungsvorschrift $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}$. Die entsprechende Spektralmatrix der Eigenwerte $\mathbf{\Lambda}$ des Ausgangssystems ist demnach

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{R}^T {}^{el,k}\mathbf{K} \mathbf{R} = \begin{pmatrix} \varphi_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varphi_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \varphi_n \end{pmatrix}. \quad (2.142)$$

Damit ergibt sich für das Eigenwertproblem mit dyadischer Erweiterung die Form

$$({}^{el,k}\mathbf{K} + {}^k\alpha \mathbf{a} \mathbf{a}^T - \bar{\varphi} \mathbf{I}) \bar{\mathbf{d}} = \mathbf{0}. \quad (2.143)$$

$\bar{\varphi}$ kennzeichnet den modifizierten Eigenwert und $\bar{\mathbf{d}}$ den modifizierten Eigenvektor. Wird der modifizierte Eigenvektor über die Modalmatrix des Ausgangsproblems entwickelt, d.h.

$$\bar{\mathbf{d}} = \mathbf{R} \bar{\mathbf{r}}, \quad (2.144)$$

formuliert sich nach Multiplikation mit \mathbf{R}^T das gekoppelte System des modifizierten Problems

$$(\mathbf{R}^T {}^{el,k}\mathbf{K} \mathbf{R} + {}^k\alpha \mathbf{R}^T \mathbf{a} \mathbf{a}^T \mathbf{R} - \bar{\varphi} \mathbf{R}^T \mathbf{I} \mathbf{R}) \bar{\mathbf{r}} = \mathbf{0} \quad (2.145)$$

$$(\mathbf{\Lambda} + {}^k\alpha \mathbf{s} \mathbf{s}^T - \bar{\varphi} \mathbf{I}) \bar{\mathbf{r}} = \mathbf{0} \quad (2.146)$$

mit $\mathbf{s} = \mathbf{R}^T \mathbf{a}$ als modifiziertem Rangvektor. Die i -te Gleichung des modifizierten Problems ist in folgende Form zu bringen:

$$(\varphi_i - \bar{\varphi}) \frac{\bar{r}_i}{s_i} + {}^k\alpha \sum_{k=1}^n s_k \bar{r}_k = 0. \quad (2.147)$$

Aus Gleichung (2.147) ist abzulesen, daß alle n Gleichungen denselben zweiten Summanden besitzen und daß somit folgende Identität zwischen den Gleichungen k und l besteht:

$$(\varphi_k - \bar{\varphi}) \frac{\bar{r}_k}{s_k} = (\varphi_l - \bar{\varphi}) \frac{\bar{r}_l}{s_l} \quad (2.148)$$

Wird aus (2.148) die k -te Koordinate

$$\bar{r}_k = \frac{s_k}{s_l} \frac{\varphi_l - \bar{\varphi}}{\varphi_k - \bar{\varphi}} \bar{r}_l \quad (2.149)$$

des Vektors \mathbf{r} in Gleichung (2.147) eingesetzt, entsteht die modifizierte Eigenwertgleichung:

$$\sum_{k=1}^n \frac{s_k^2}{\varphi_k - \bar{\varphi}} + \frac{1}{{}^k\alpha} = 0. \quad (2.150)$$

Die modifizierten n Eigenwerte sind über ein Nullstellenverfahren zu bestimmen, wobei folgende Anordnung der Eigenwerte

$$\varphi_1 \leq \bar{\varphi}_1 \leq \varphi_2 \leq \bar{\varphi}_2 \dots \leq \varphi_n \leq \bar{\varphi}_n \quad \text{für } {}^k\alpha > 0 \quad (2.151)$$

und

$$\bar{\varphi}_1 \leq \varphi_1 \leq \bar{\varphi}_2 \leq \varphi_2 \dots \leq \bar{\varphi}_n \leq \varphi_n \quad \text{für } {}^k\alpha < 0 \quad (2.152)$$

zur Berechnung der modifizierten Eigenwerte von Nutzen ist. Die Anordnung der Eigenwerte zeigt deutlich den Einfluß der dyadischen Erweiterung auf die Stabilität des Systems. Für die Bestimmung des modifizierten Eigenvektors kann Gleichung (2.149) mit einem offenen skalaren Faktor β genutzt werden:

$$\bar{r}_k = \frac{\beta s_k}{\varphi_k - \bar{\varphi}}. \quad (2.153)$$

Die k -te Koordinate des Eigenvektors \mathbf{r} zum r -ten Eigenwert ist demnach

$$\bar{r}_{kr} = \frac{\beta_r s_k}{\varphi_k - \bar{\varphi}_r}. \quad (2.154)$$

Der noch offene skalare Parameter β_r ist über die Orthogonalität der Eigenvektoren

$$\bar{\mathbf{r}}_r^T \bar{\mathbf{r}}_s = \begin{cases} 1 & \text{für } r = s, \\ 0 & \text{für } r \neq s \end{cases} \quad (2.155)$$

anzupassen und die modifizierten Eigenvektoren $\bar{\mathbf{d}}$ können rückwirkend berechnet werden.

2.8.3 Pneumatisches System mit zwei Freiheitsgraden

Der Einfluß der dyadischen Erweiterung auf das Stabilitätsverhalten eines pneumatischen Systems kann an einem einfachen Beispiel mit zwei Freiheitsgraden Δu_1 und Δu_2 verdeutlicht werden, siehe Abbildung 2.16. Eine Druckkammer bestehend aus zwei federnd gelagerten starren Kolben (Kolbenflächen: A_1 , A_2 , Federsteifigkeiten: c_1 , c_2) wird mittels eines gesteuerten Kolbens Δu_{ext} unter Druck gesetzt. Der momentane Überdruck in der Kammer sei p_t bei einem Kammer volumen v_t .

Die Gesamtsteifigkeitsmatrix \mathbf{K} des Systems mit ${}^k\alpha_t = -\kappa \frac{p_t}{v_t}$ als Druck-Volumen-Gradient berechnet sich zu

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} + {}^k\alpha_t \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \end{pmatrix}. \quad (2.156)$$

Der einfache Aufbau der dyadischen Erweiterung über die Kolbenflächen A_1 und A_2 und dem Druckvolumengradienten ${}^k\alpha_t$ ist gut zu erkennen. Die Determinante der Gesamtsteifigkeitsmatrix hat somit den Wert

$$\det \mathbf{K} = c_1 c_2 + {}^k\alpha_t (c_1 A_2^2 + c_2 A_1^2), \quad (2.157)$$

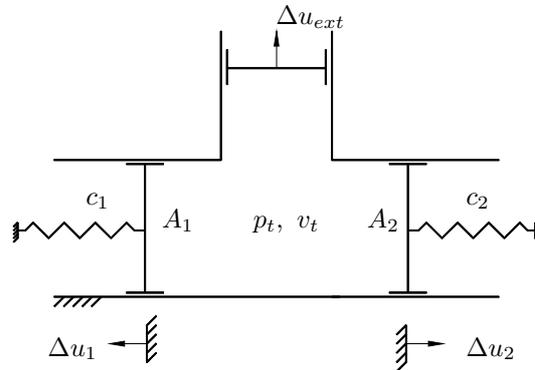


Abbildung 2.16: Pneumatisches System mit zwei Freiheitsgraden

der sich auch über eine Modalanalyse gemäß der Formel (2.140) bestätigen läßt:

$$\det \mathbf{K} = \det \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} \left[1 + k \alpha_t \begin{pmatrix} \frac{1}{c_2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{c_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \right]. \quad (2.158)$$

Wie bereits gezeigt verändern sich durch die Volumenkopplung die Eigenwerte ($\varphi_1 = c_1$, $\varphi_2 = c_2$) des Ausgangssystems. Die charakteristische Gleichung zur Bestimmung der modifizierten Eigenwerte ($\bar{\varphi}_1$, $\bar{\varphi}_2$) kann über die entwickelte Formel aus Gleichung (2.150) angegeben

$$\frac{A_1}{c_1 - \bar{\varphi}} + \frac{A_2}{c_2 - \bar{\varphi}} + \frac{1}{k \alpha_t} = 0. \quad (2.159)$$

und über eine direkte Eigenwertanalyse der Matrix (2.156) überprüft werden.

2.9 Zusammenfassung

Das nichtlineare Gleichgewichtsproblem einer stark deformierten und mit masselosen Fluiden befüllten Hohlkammerstruktur ist über das Prinzip der Stationarität des 1. und 2. Hauptsatzes der Thermodynamik gegeben. Der gleichförmig auf die Struktur wirkende Kompressionsdruck des eingeschlossenen Fluids kann unter Verwendung von Oberflächenintegralen vollständig aus der aktuellen Strukturlage bestimmt werden. Eine Elementierung des Fluids und eine aufwendige Kontaktmodellierung zwischen Fluid und Struktur wird somit umgangen. Die Konservativität der Fluid-Struktur-Kopplung wird durch eine ausführliche Diskussion von Rand- und Übergangsbedingungen auch für große Deformationen nachgewiesen. Es gelingt die gesuchte Gleichgewichtslage nach einer Linearisierung und Diskretisierung der nichtlinearen Gleichgewichtsbedingung iterativ unter Verwendung des Newton-Verfahrens zu bestimmen. Die Volumenabhängigkeit

der Kopplung infolge der Zustandsgleichungen des Fluids zeigt sich besonders in der blockweisen Kopplung aller Knoten im diskretisierten algebraischen Gleichungssystem. Unter Verwendung der Sherman-Morrison-Formel wurde ein effizientes Lösungsverfahren für das voll gekoppelte Gleichungssystem durch Transformation auf schwach gekoppelte Referenzsysteme entwickelt, was zu einer deutlich kürzeren Rechenzeit führt. Zur Bestimmung von kritischen Belastungszuständen und statischen Nachbeulformen der befüllten Hohlkammerstruktur wurde ein Regularisierungsverfahren für technisch relevante Belastungsszenarien entworfen. Über eine Eigenwertuntersuchung und das Determinantenkriterium kann der Stabilitätseinfluß der Fluidfüllung anschaulich interpretiert werden.

Kapitel 3

Deformierbare Strukturen in der Hydrostatik

Bei einer Diskussion von flüssigkeitsbefüllten, stark deformierten Hohlstrukturen spielt die Volumenerhaltung der inkompressiblen Füllung eine zentrale Rolle. Die hydrostatische Druckbelastung nimmt mit der Höhe der Flüssigkeitssäule zu und stellt somit eine nichtgleichförmige Druckbelastung dar. Eine exakte Beschreibung gelingt deshalb nur dann, wenn sich der im Verlauf der Strukturverformung ändernde Flüssigkeitsspiegel berechnet werden kann. Die Konservativität der Flüssigkeit-Struktur-Kopplung ist auch für die im folgenden behandelten großen Deformationen infolge einer Potentialformulierung vorhanden.

3.1 Prinzip der virtuellen Arbeit

Bei inkompressiblen Flüssigkeiten ist die innere Energie der Flüssigkeit identisch null, d.h. $U = 0$. Der Energieaustausch zwischen Flüssigkeit und Struktur findet daher zwischen dem Schwerepotential der Flüssigkeit gV und dem Potential ${}^{el}V$ der Verformungsenergie der Struktur statt. Die Verformungsenergie kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit auch über Verschiebungsfunktionale oder über die schwache Form des Gleichgewichts beschrieben werden. Die nichtlineare Gleichgewichtsbedingung berechnet sich im Fall einer Potentialformulierung aus dem Prinzip der virtuellen Arbeit:

$$\delta^gV + \delta^{el}V = 0. \quad (3.1)$$

3.1.1 Schwerepotential der Flüssigkeit

Die Flüssigkeit wird über ihr Schwerepotential in das Gesamtpotential der Fluid-Struktur-Wechselwirkung eingebettet. Das Schwerepotential ergibt sich durch eine Integration über die Fluidmasse m aus dem Masselement dm der Lage \mathbf{x} unter Einwirkung der Erdbeschleunigung \mathbf{g} . Für ein inkompressibles Fluid mit

konstanter Dichte ρ entspricht dies einer Integration über das Gesamtvolumen v der Flüssigkeit:

$${}^gV = - \int_m \mathbf{g} \cdot \mathbf{x} \, dm + \text{const.} \quad (3.2)$$

$$= - \int_v \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{x} \, dv + \text{const.} \quad (3.3)$$

Infolge der konstanten Dichte kann die verbleibende Integration über das Volumenmoment 1. Grades ${}^g\mathbf{s}$ dargestellt werden:

$${}^gV = -\rho \mathbf{g} \cdot {}^g\mathbf{s} + \text{const.} \quad (3.4)$$

Zur Herleitung des hydrostatischen Drucks aus dem Schwerepotential der Flüssigkeit sind das Volumenmoment 1. Grades und die Volumenerhaltung als Oberflächenintegral zu formulieren. Diese Randintegralbeschreibung führt später zu einer elementfreien Darstellung der Flüssigkeit.

3.1.2 Volumenmoment 1. Grades

Die Oberfläche der Flüssigkeit setzt sich aus der benetzten Strukturoberfläche und der freien Flüssigkeitsoberfläche zusammen. \mathbf{x} bezeichnet den Ortsvektor zur benetzten Strukturoberfläche und ${}^o\mathbf{x}$ den Ortsvektor zu freien Flüssigkeitsoberfläche, siehe Abbildung 3.1. Entsprechend kann das Volumenmoment 1.

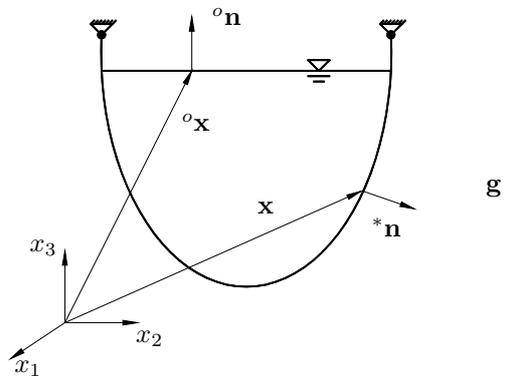


Abbildung 3.1: Struktur- und freie Flüssigkeitsoberfläche in der Hydrostatik

Grades ${}^g\mathbf{s}$ aus dem benetzten Oberflächenanteil \mathbf{s} und dem freien Oberflächenanteil ${}^o\mathbf{s}$ zusammengesetzt werden, siehe hierzu auch [dB82]:

$${}^g\mathbf{s} = \mathbf{s} + {}^o\mathbf{s} \quad (3.5)$$

$$= \frac{1}{4} \int_{\eta} \int_{\xi} \mathbf{x} \mathbf{x} \cdot {}^*\mathbf{n} \, d\xi d\eta + \frac{1}{4} \int_{\eta} \int_{\xi} {}^o\mathbf{x} {}^o\mathbf{x} \cdot {}^o\mathbf{n} \, d^o\xi d^o\eta \quad (3.6)$$

3.1.3 Volumenerhaltung

Wird unter dem Einfluß von Kräften die umgebende Struktur verformt, bleibt das in der Struktur befindliche Flüssigkeitsvolumen konstant. Das konstante Volumen der Flüssigkeit läßt sich ebenfalls aus Oberflächenanteilen der benetzten Strukturfläche und der freien Flüssigkeitsoberfläche beschreiben:

$${}^g v = v + {}^o v = \text{const.} \quad (3.7)$$

$$= \frac{1}{3} \int_{\eta} \int_{\xi} \mathbf{x} \cdot {}^* \mathbf{n} \, d\xi d\eta + \frac{1}{3} \int_{{}^o \eta} \int_{{}^o \xi} {}^o \mathbf{x} \cdot {}^o \mathbf{n} \, d{}^o \xi d{}^o \eta. \quad (3.8)$$

Die nichtlineare Gleichgewichtsbedingung der Flüssigkeit-Struktur-Wechselwirkung ergibt sich über die Stationarität des Gesamtpotentials. Bei der Variation des Flüssigkeitspotentials muß jedoch die Volumenerhaltung der Flüssigkeit gewährleistet bleiben.

3.1.4 Variationsproblem der Hydrostatik

Die Variation des Schwerepotentials der Flüssigkeit reduziert sich durch die Inkompressibilität $\rho = \text{konst.}$ auf eine Variation des Volumenmomentes 1. Grades:

$$\delta^g V = -\rho \mathbf{g} \cdot (\delta \mathbf{s} + \delta^o \mathbf{s}). \quad (3.9)$$

Neben dem Schwerepotential ist auch das Flüssigkeitsvolumen zu variieren. Infolge der Volumenerhaltung folgt für die Variation des Gesamtvolumens der Flüssigkeit

$${}^g \delta v = \delta v + \delta^o v = 0. \quad (3.10)$$

Variation des Volumenmomentes 1. Grades

Die Variation des Volumenmomentes 1. Grades setzt sich aus der Variation zweier Oberflächenanteile, dem der freien Oberfläche und dem der benetzten Strukturfläche zusammen. Beide Anteile unterscheiden sich formal durch die Indizierung. Für eine übersichtliche Darstellung wird nur die Variation des Volumenmomentes der Struktur in Beschleunigungsrichtung \mathbf{g} untersucht. Die Variation der freien Oberfläche ergibt sich entsprechend. Gleichzeitig werden die virtuelle Strukturverschiebung $\delta \mathbf{u}$ und die Variation der Strukturnormalen $\delta {}^* \mathbf{n}$ in nicht normierter Darstellung eingeführt:

$$\mathbf{g} \cdot \delta \mathbf{s} = \frac{1}{4} \int_{\eta} \int_{\xi} \mathbf{g} \cdot \delta \mathbf{u} \, \mathbf{x} \cdot {}^* \mathbf{n} + \mathbf{g} \cdot \mathbf{x} \, \delta \mathbf{u} \cdot {}^* \mathbf{n} + \mathbf{g} \cdot \mathbf{x} \, \mathbf{x} \cdot \delta {}^* \mathbf{n} \, d\xi d\eta. \quad (3.11)$$

Wie im zweiten Kapitel bereits gezeigt, wird durch Produktintegration die Trennung von Feldgleichung und Randwertproblem erreicht. Mit der vollständigen

Transformation auf Randgrößen, siehe Gleichung (2.32), folgt für den Beschleunigungsanteil des Volumenmomentes

$$\begin{aligned} \mathbf{g} \cdot \delta \mathbf{s} &= \frac{1}{4} \int_{\eta} \int_{\xi} [\mathbf{g} \cdot \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} + 3\mathbf{g} \cdot \mathbf{x} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \\ &\quad - \mathbf{g} \cdot \mathbf{e}_{\xi}(\mathbf{e}_{\eta} \times \mathbf{x}) \cdot \delta \mathbf{u} - \mathbf{g} \cdot \mathbf{e}_{\eta}(\mathbf{x} \times \mathbf{e}_{\xi}) \cdot \delta \mathbf{u}] d\xi d\eta \\ &\quad + \frac{1}{4} \int_s \mathbf{g} \cdot \mathbf{x}(\mathbf{x} \times \mathbf{t}^s) \cdot \delta \mathbf{u} ds. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Für die Herleitung des hydrostatischen Drucks aus dem Variationsfunktional ist die vollständige Metrik der Strukturoberfläche gemäß Gleichung (2.38) einzuführen:

$$\begin{aligned} \mathbf{g} \cdot \delta \mathbf{s} &= \frac{1}{4} \int_{\eta} \int_{\xi} 3\mathbf{g} \cdot \mathbf{x} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\xi d\eta + \frac{1}{4} \int_s \mathbf{g} \cdot \mathbf{x}(\mathbf{x} \times \mathbf{t}^s) \cdot \delta \mathbf{u} ds \\ &\quad + \frac{1}{4} \int_{\eta} \int_{\xi} [\delta \mathbf{u} \cdot (\mathbf{g} \otimes \mathbf{n})\mathbf{x} - \mathbf{g} \cdot \mathbf{e}_{\xi}(\mathbf{n} \times \mathbf{e}^{\xi} \times \mathbf{x}) \cdot \delta \mathbf{u} \\ &\quad - \mathbf{g} \cdot \mathbf{e}_{\eta}(\mathbf{x} \times \mathbf{e}^{\eta} \times \mathbf{n}) \cdot \delta \mathbf{u}] d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Eine in [Kne97] eingeführte Umformung erweist sich auch hier als zweckmäßig. Der Integrand wird mit dem identisch verschwindenden Term

$$\mathbf{g} \cdot \mathbf{e}_{\zeta}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{e}^{\zeta} - \mathbf{e}^{\zeta} \otimes \mathbf{n}) = 0 \quad (3.14)$$

erweitert. Der Beschleunigungsanteil des Volumenmomentes 1. Grades ergibt sich damit zu

$$\begin{aligned} \mathbf{g} \cdot \delta \mathbf{s} &= \frac{1}{4} \int_{\eta} \int_{\xi} 3\mathbf{g} \cdot \mathbf{x} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\xi d\eta + \frac{1}{4} \int_s \mathbf{g} \cdot \mathbf{x}(\mathbf{x} \times \mathbf{t}^s) \cdot \delta \mathbf{u} ds \\ &\quad + \frac{1}{4} \int_{\eta} \int_{\xi} \delta \mathbf{u} \cdot [\mathbf{g} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{g} \cdot \mathbf{e}_{\xi}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{e}^{\xi} - \mathbf{e}^{\xi} \otimes \mathbf{n}) \\ &\quad + \mathbf{g} \cdot \mathbf{e}_{\eta}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{e}^{\eta} - \mathbf{e}^{\eta} \otimes \mathbf{n}) \\ &\quad + \mathbf{g} \cdot \mathbf{e}_{\zeta}(\mathbf{n} \otimes \mathbf{e}^{\zeta} - \mathbf{e}^{\zeta} \otimes \mathbf{n})]\mathbf{x} d\xi d\eta \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4} \int_{\eta} \int_{\xi} 3\mathbf{g} \cdot \mathbf{x} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\xi d\eta + \frac{1}{4} \int_s \mathbf{g} \cdot \mathbf{x}(\mathbf{x} \times \mathbf{t}^s) \cdot \delta \mathbf{u} ds \\ &\quad + \frac{1}{4} \int_{\eta} \int_{\xi} \delta \mathbf{u} \cdot [\mathbf{g} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{e}_{\xi} \otimes \mathbf{e}^{\xi} \mathbf{n} \otimes \mathbf{g} - \mathbf{e}_{\xi} \otimes \mathbf{e}^{\xi} \mathbf{g} \otimes \mathbf{n} \\ &\quad + \mathbf{e}_{\eta} \otimes \mathbf{e}^{\eta} \mathbf{n} \otimes \mathbf{g} - \mathbf{e}_{\eta} \otimes \mathbf{e}^{\eta} \mathbf{g} \otimes \mathbf{n} \\ &\quad + \mathbf{e}_{\zeta} \otimes \mathbf{e}^{\zeta} \mathbf{n} \otimes \mathbf{g} - \mathbf{e}_{\zeta} \otimes \mathbf{e}^{\zeta} \mathbf{g} \otimes \mathbf{n}]\mathbf{x} d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Mit dem Einheitsensor

$$\underline{\mathbf{I}} = \mathbf{e}_{\xi} \otimes \mathbf{e}^{\xi} + \mathbf{e}_{\eta} \otimes \mathbf{e}^{\eta} + \mathbf{e}_{\zeta} \otimes \mathbf{e}^{\zeta} \quad (3.17)$$

vereinfacht sich die Darstellung des Beschleunigungsanteils

$$\begin{aligned}
\mathbf{g} \cdot \delta \mathbf{s} &= \frac{1}{4} \int_{\eta} \int_{\xi} 3 \mathbf{g} \cdot \mathbf{x} \delta \mathbf{u} \cdot {}^* \mathbf{n} \, d\xi d\eta + \frac{1}{4} \int_s \mathbf{g} \cdot \mathbf{x} (\mathbf{x} \times \mathbf{t}^s) \cdot \delta \mathbf{u} \, ds \\
&\quad + \frac{1}{4} \int_{\eta} \int_{\xi} \delta \mathbf{u} \cdot ({}^* \mathbf{n} \otimes \mathbf{g}) \mathbf{x} \, d\xi d\eta \\
&= \int_{\eta} \int_{\xi} \mathbf{g} \cdot \mathbf{x} \delta \mathbf{u} \cdot {}^* \mathbf{n} \, d\xi d\eta + \frac{1}{4} \int_s \mathbf{g} \cdot \mathbf{x} (\mathbf{x} \times \mathbf{t}^s) \cdot \delta \mathbf{u} \, ds. \quad (3.18)
\end{aligned}$$

Die entsprechenden Umformungen können ohne Einschränkungen auf den freien Oberflächenanteil $\mathbf{g} \cdot \delta \mathbf{o} \mathbf{s}$ durch Indexaustausch überführt werden. Nach Aufsummation der variierten Anteile aus freier und benetzter Oberfläche eliminieren sich die entsprechenden Randintegrale wegen

$${}^o \mathbf{x}|_s = \mathbf{x}|_s, \quad \mathbf{t}^s = -{}^o \mathbf{t}^s, \quad \delta \mathbf{u}|_s = {}^o \delta \mathbf{u}|_s. \quad (3.19)$$

Das variierte Flüssigkeitspotential setzt sich aus den verbleibenden Beschleunigungsanteilen des freien und des benetzten Volumenmomentes zusammen:

$$\delta^g V = -\rho \int_{\eta} \int_{\xi} \mathbf{g} \cdot \mathbf{x} \delta \mathbf{u} \cdot {}^* \mathbf{n} \, d\xi d\eta - \rho \int_{{}^o \eta} \int_{{}^o \xi} \mathbf{g} \cdot {}^o \mathbf{x} {}^o \delta \mathbf{u} \cdot {}^o \mathbf{n} \, d{}^o \xi d{}^o \eta. \quad (3.20)$$

Variation der Volumenerhaltung

Eine über zwei Oberflächenanteile realisierte Volumenberechnung wurde bereits in Kapitel 2.7.2 für die indirekte Verschiebungsregelung einer kompressiblen Fluid-Struktur-Wechselwirkung eingeführt. Die in den Gleichungen (2.119) - (2.125) durchgeführte Linearisierung kann in die hier benötigte Variation durch einfaches Vertauschen des Operators überführt werden:

$$\delta^g v = \int_{\eta} \int_{\xi} {}^* \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\xi d\eta + \int_{{}^o \eta} \int_{{}^o \xi} {}^o \mathbf{n} \cdot {}^o \delta \mathbf{u} \, d{}^o \xi d{}^o \eta = 0. \quad (3.21)$$

Das im zweiten Summanden der Gleichung (3.20) auftretende Skalarprodukt $\mathbf{g} \cdot {}^o \mathbf{x}$ ist bezüglich des Oberflächenintegrals eine Konstante und kann vor das Integral gezogen werden. Durch Substitution von Gleichung (3.21) in Gleichung (3.20) ergibt sich die bekannte Darstellung des hydrostatischen Drucks mit der Differenz aus Spiegelhöhe ${}^o \mathbf{x}$ und Ortsvektor \mathbf{x} :

$$\delta^g V = \rho \int_{\eta} \int_{\xi} \mathbf{g} \cdot ({}^o \mathbf{x} - \mathbf{x}) {}^* \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\xi d\eta \quad (3.22)$$

$$= \int_{\eta} \int_{\xi} {}^g p {}^* \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\xi d\eta \quad (3.23)$$

mit

$${}^g p = \mathbf{g} \cdot ({}^o \mathbf{x} - \mathbf{x}). \quad (3.24)$$

Für eine formale Darstellung als virtuelle Arbeit ist der eingeführte hydrostatische Druck ${}^g p$ mit -1 zu multiplizieren. Es ist anzumerken, daß die Variationsdarstellung in Gleichung (3.23) nicht einer virtuellen Arbeit einer potentiallosen Kraft entspricht, sondern eine Oberflächendarstellung des Schwerepotentials wiedergibt. Das durch Variation von Volumenerhaltung und Schwerepotential entwickelte nichtlineare hydrostatische Variationspotential ist für eine iterative Lösung mittels Newton-Verfahren in eine mehrdimensionale Taylorreihe mit Abbruch nach dem linearen Term zu entwickeln.

3.2 Linearisierung

Bei der Linearisierung der Modellgleichungen ist neben dem hydrostatischen Variationspotential auch die Volumenerhaltung als zusätzliche Nebenbedingung zu linearisieren. Hier bezeichnen \mathbf{X} die unverformte Strukturlage und ${}^o \mathbf{X}$ die Flüssigkeitsspiegelhöhe in der Ausgangslage. Die im Verlauf des Iterationsprozesses berechnete Zwischenlösung wird als bekannte Lage bezeichnet und durch $\mathbf{x}_t = \mathbf{X} + \mathbf{u}_t$ bzw. ${}^o \mathbf{x}_t = {}^o \mathbf{X} + {}^o \mathbf{u}_t$ beschrieben. \mathbf{u}_t , ${}^o \mathbf{u}_t$ sind die zum Iterationsschritt t berechnete Strukturverschiebung bzw. Flüssigkeitsspiegelverschiebung. Die gesuchten Endlagen von Struktur $\mathbf{x} = \mathbf{x}_t + \Delta \mathbf{u}$ und Flüssigkeitsspiegel ${}^o \mathbf{x} = {}^o \mathbf{x}_t + \Delta {}^o \mathbf{u}$ werden mit der unbekanntenen Strukturverschiebung $\Delta \mathbf{u}$ und der Spiegelhöhenänderung $\Delta {}^o \mathbf{u}$ beschrieben, siehe Abbildung 3.2.

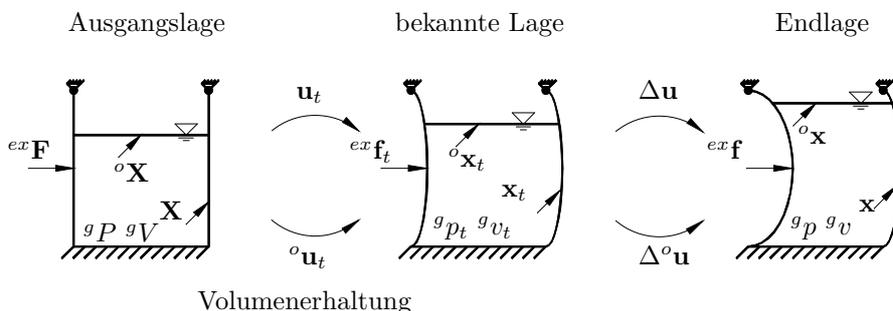


Abbildung 3.2: Definition der Zustandsgrößen für inkrementell iteratives Lösungsverfahren; deformierbare Strukturen in der Hydrostatik

Die sich nach der Linearisierung ergebenden Gleichungen sind weiter mittels Produktintegration in Feldgleichung und Randwertproblem zu separieren. Im Gegensatz zur gleichförmigen Druckbelastung eines kompressiblen Fluids ohne Schwerkräfteinfluß liegt bei der Hydrostatik eine nicht gleichförmige ortsabhängige Druckbelastung vor.

3.2.1 Hydrostatisches Variationspotential

Die Linearisierung des hydrostatischen Variationspotentials führt zu Änderungen im Druckniveau $\delta^g V^{\Delta p}$ und in der Druckrichtung $\delta^g V^{\Delta n}$:

$$\delta^g V_{lin} = \delta^g V_t + \delta^g V^{\Delta p} + \delta^g V^{\Delta n} \quad (3.25)$$

$$= \int_{\eta} \int_{\xi} ({}^g p_t \cdot {}^* \mathbf{n}_t + \Delta^g p_t \cdot {}^* \mathbf{n}_t + {}^g p_t \Delta^g \mathbf{n}) \cdot \delta \mathbf{u} \, d\xi d\eta \quad (3.26)$$

Die Normalenänderung kann direkt in Strukturverschiebungen mit kovarianten Richtungsableitungen der Strukturoberfläche ausgedrückt werden, siehe Gleichung (2.18). Wie auch im kompressiblen Fall liegt hier ein Folgelastproblem vor. Die Linearisierung des hydrostatischen Drucks und der Volumenerhaltung vervollständigen die Modellbeschreibung.

3.2.2 Hydrostatischer Druck und Volumenerhaltung

Der linearisierte hydrostatische Druck zerfällt in zwei Anteile. Der erste Anteil beschreibt die Abhängigkeit des Druckniveaus von der Flüssigkeitsspiegeländerung $\Delta^o \mathbf{u}$, der zweite die Abhängigkeit von der lokalen Strukturverschiebung $\Delta \mathbf{u}$:

$$\Delta^g p = \rho \mathbf{g} \cdot (\Delta^o \mathbf{u} - \Delta \mathbf{u}). \quad (3.27)$$

Die linearisierte Volumenänderung ist mittels einfachem Operatortausch aus den Gleichungen (3.21) bzw. (2.119) - (2.125) abzuleiten. Diese Formulierung wurde bereits als Folge einer Produktintegration in Randwertproblem und Feldgleichung aufgespalten. Das Randwertproblem ist identisch null, da das Fluidvolumen keinen Rand besitzt:

$$\Delta^g v = \int_{\eta} \int_{\xi} {}^* \mathbf{n}_t \cdot \Delta \mathbf{u} \, d\xi d\eta + \int_{o\eta} \int_{o\xi} {}^o \mathbf{n}_t \cdot \Delta^o \mathbf{u} \, d^o \xi d^o \eta = 0 \quad (3.28)$$

Das linearisierte Druckpotential $\delta^g V_{lin}$ wird im folgenden Unterkapitel durch Produktintegration in Feldgleichung und Randwertproblem separiert.

3.3 Konservativität

Eine symmetrische Darstellung der linearisierten Feldgleichung muß sich zwingend ergeben, da es sich bei einer hydrostatischen Druckbelastung um ein konservatives Problem handelt. Zur Konservativität nichtgleichförmiger Druckbelastungen sei auch auf [Sch82], [SR84], [Kne97] verwiesen. Die Symmetrie ergibt sich, wie im folgenden gezeigt wird, durch die Betrachtung von Rand- bzw. Übergangsbedingungen zwischen Struktur und Flüssigkeit. Zu diesem Zweck ist das linearisierte Variationspotential durch Produktintegrationen umzuformen.

3.3.1 Produktintegration der ortsabhängigen Folgelast

Der Folgelastanteil des linearisierten, variierten, hydrostatischen Variationspotentials wird durch Produktintegration analog zu den Umformungen von Gleichung (2.29)-(2.33) in Feldgleichung und Randwertproblem getrennt. Aus der Ortsabhängigkeit der Druckkraft resultierend, ergibt sich bei der Produktintegration einer nicht gleichförmigen Druckbelastung ein zusätzlicher ortsabhängiger Anteil

$$\begin{aligned}
 \delta^g V^{\Delta n} &= \int_{\eta} \int_{\xi} {}^g p_t \Delta^* \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\xi d\eta & (3.29) \\
 &= \int_s {}^g p_t (\Delta \mathbf{u} \times \mathbf{t}_t^s) \cdot \delta \mathbf{u} \, ds \\
 &\quad - \int_{\eta} \int_{\xi} {}^g p_t (\mathbf{e}_{\eta} \times \delta \mathbf{u}_{,\xi} - \mathbf{e}_{\xi} \times \delta \mathbf{u}_{,\eta}) \cdot \Delta \mathbf{u} \, d\xi d\eta \\
 &\quad - \int_{\eta} \int_{\xi} [{}^g p_{t,\xi} (\mathbf{e}_{\eta} \times \delta \mathbf{u}) - {}^g p_{t,\eta} (\mathbf{e}_{\xi} \times \delta \mathbf{u})] \cdot \Delta \mathbf{u} \, d\xi d\eta. & (3.30)
 \end{aligned}$$

Diskussion des Randwertproblems

Das Randintegral $\delta^g V^s$ aus Gleichung (3.30) ist dem aus Kapitel 2, siehe Gleichung (2.34), im Aufbau ähnlich:

$$\delta^g V^s = \int_s {}^g p_t (\Delta \mathbf{u} \times \mathbf{t}_t^s) \cdot \delta \mathbf{u} \, ds. \quad (3.31)$$

Der Schweredruck ${}^g p_t$ ist ortsabhängig und kann daher nicht aus dem Integral gezogen werden. Die in Kapitel 2 diskutierten Randbedingungen können nur mit Einschränkungen übernommen werden.

- Freier Flüssigkeitsspiegel
Die Flüssigkeit bildet an der freien Oberfläche ${}^o \mathbf{x}$ einen Rand mit der Struktur. An dieser Stelle ist der Fluiddruck ${}^g p_t = 0$ identisch null, so daß das Randintegral verschwindet.
- Geschichtete Fluide
Bei geschichteten Fluiden heben sich die Randterme der Fluide gegenseitig auf, wenn sich z.B. Gas- und Flüssigkeitsfüllung in einem deformierbaren Gefäß schichten. In der Trennschicht der Fluide liegt ein Druckgleichgewicht vor. Die Randterme (3.31) sind dabei jeweils entgegengesetzt gleich groß.

Wie im nachfolgenden Kapitel 3.3.3 dargestellt wird, ist für die inkompressible Flüssigkeit im Schwerfeld eine projizierte Berechnung zwingend notwendig, siehe hierzu auch Kapitel 2.3.1. Das für die Erläuterung von Randbedingungen im

kompressiblen Fall verwendete Beispiel kann leicht modifiziert auf die Hydrostatik deformierbarer Strukturen übertragen werden.

Beispiel:

Ein Gefäß mit elastischem Boden wird durch den hydrostatischen Druck einer im Gefäß befindlichen Flüssigkeit belastet. Von Interesse ist die Verformung des elastischen Bodens und die sich im Gefäß einstellende Spiegelhöhe der Flüssigkeit. Die nicht interessierenden Gefäßwände werden über eine Projektion als virtueller Starrkörper integriert. Der verbleibende Boden ist somit über Randbedingungen zu lagern.

Die in Kapitel 2.3.1 diskutierten Randbedingungen für

- Festlager
- zweiwertiges Loslager
- einwertiges Loslager

sind wegen des identischen Ausdrucks im Integral auch hier gültig. Hiermit ist gezeigt, daß das Randintegral auch in diesem Fall unter physikalisch sinnvollen Bedingungen verschwindet. Durch den Aufbau einer vollständigen Metrik gemäß Gleichung (2.38) und mit den schiefsymmetrischen Tensoren aus Gleichung (2.40) ergibt sich das linearisierte Variationsproblem des Folgelastanteils nach Anpassung an physikalisch sinnvolle Randbedingungen zu

$$\begin{aligned}
\delta^g V^{\Delta n} &= -\frac{1}{2} \int_{\eta} \int_{\xi} \delta \mathbf{u} \cdot [{}^g p_{t,\xi} (*\mathbf{n} \otimes \mathbf{e}^{\xi} - \mathbf{e}^{\xi} \otimes *\mathbf{n}) \\
&\quad + {}^g p_{t,\eta} (*\mathbf{n} \otimes \mathbf{e}^{\eta} - \mathbf{e}^{\eta} \otimes *\mathbf{n})] \Delta \mathbf{u} \, d\xi d\eta \\
&\quad + \int_{\eta} \int_{\xi} \frac{{}^g p_t}{2} \begin{pmatrix} \delta \mathbf{u} \\ \delta \mathbf{u}_{,\xi} \\ \delta \mathbf{u}_{,\eta} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \underline{\mathbf{W}}^{\xi} & \underline{\mathbf{W}}^{\eta} \\ \underline{\mathbf{W}}^{\xi T} & 0 & 0 \\ \underline{\mathbf{W}}^{\eta T} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{u} \\ \Delta \mathbf{u}_{,\xi} \\ \Delta \mathbf{u}_{,\eta} \end{pmatrix} \, d\xi d\eta.
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Für eine vollständige Verschiebungsdarstellung der Feldgleichung über Strukturverschiebungen muß die noch verbleibende Spiegelhöhenänderung ${}^o \Delta \mathbf{u}$ im linearisierten Variationspotential der Flüssigkeit aus Gleichung (3.27) durch die Strukturverschiebung $\Delta \mathbf{u}$ dargestellt werden. Hierzu ist die Volumenerhaltung der Flüssigkeit entsprechend umzuformen.

3.3.2 Spiegelhöhenänderung

Die linearisierte Volumenänderung aus Gleichung (3.28) setzt sich aus einem Gebietsanteil der benetzten Struktur Δv und einem Anteil der freien Flüssigkeitsoberfläche $\Delta^o v$ zusammen:

$$\begin{aligned}
\Delta^g v &= \Delta v + \Delta^o v \\
&= \int_{\eta} \int_{\xi} *\mathbf{n}_t \cdot \Delta \mathbf{u} \, d\xi d\eta + \int_{{}^o \eta} \int_{{}^o \xi} {}^o \mathbf{n}_t \cdot \Delta^o \mathbf{u} \, d^o \xi d^o \eta = 0. \tag{3.33}
\end{aligned}$$

Die Normale ${}^o\mathbf{n}$ und die Verschiebung $\Delta^o\mathbf{u}$ der freien Flüssigkeitsoberfläche haben nur Komponenten in Richtung der Erdbeschleunigung $\frac{\mathbf{g}}{|\mathbf{g}|}$ mit den Koordinaten ${}^o n_t$ und $\Delta^o u$, die sich mit Hilfe des Cosinussatzes bestimmen lassen:

$${}^o n_t = {}^o\mathbf{n}_t \cdot \frac{\mathbf{g}}{|\mathbf{g}|}, \quad (3.34)$$

$$\Delta^o u = \Delta^o\mathbf{u} \cdot \frac{\mathbf{g}}{|\mathbf{g}|}. \quad (3.35)$$

Das innere Produkt zwischen Oberflächennormale und Spiegelhöhenchwankung kann deshalb direkt in Koordinaten angegeben werden:

$${}^o\mathbf{n}_t \cdot \Delta^o\mathbf{u} = {}^o n_t \Delta^o u. \quad (3.36)$$

Für spätere Umformungen kann die Volumenänderung $\Delta^o v$ auch mit den Gleichungen (3.34) und (3.35) angegeben werden:

$$\Delta^o v = \int_{{}^o\eta} \int_{{}^o\xi} {}^o\mathbf{n}_t \cdot \frac{\mathbf{g}}{|\mathbf{g}|} \Delta^o\mathbf{u} \cdot \frac{\mathbf{g}}{|\mathbf{g}|} d^o\xi d^o\eta. \quad (3.37)$$

Die Verschiebungskoordinate $\Delta^o\mathbf{u} \cdot \frac{\mathbf{g}}{|\mathbf{g}|}$ des Flüssigkeitsspiegels ist im gesamten Integrationsgebiet konstant und kann aus dem Integral gezogen werden. Das verbleibende Integral beschreibt die Fläche S_t der freien Flüssigkeitsoberfläche. Diese ist wiederum über die benetzte Strukturoberfläche bestimmbar. Hierzu ist die benetzte Struktur in Richtung der Erdbeschleunigung zu projizieren. Eine korrekte Berechnung der freien Flüssigkeitsoberfläche über eine diskretisierte Struktur gelingt, wenn die Normalen der benetzten finiten Elemente konsistent angeordnet sind:

$$-S_t = \underbrace{\int_{{}^o\eta} \int_{{}^o\xi} {}^o\mathbf{n}_t \cdot \frac{\mathbf{g}}{|\mathbf{g}|} d^o\xi d^o\eta}_{\text{freie Flüssigkeitsfläche}} \stackrel{!}{=} - \underbrace{\int_{\eta} \int_{\xi} {}^*\mathbf{n}_t \cdot \frac{\mathbf{g}}{|\mathbf{g}|} d\xi d\eta}_{\text{proji. benetzte Strukturfläche}}. \quad (3.38)$$

Mit Hilfe dieser Umformung ist eine elementfreie Darstellung der Flüssigkeit im Finite-Element-Programm gewährleistet. Der Volumenänderungsanteil infolge der Spiegelhöhenchwankung läßt sich knapp formulieren zu

$$\Delta^o v = -\Delta^o\mathbf{u} \cdot \frac{\mathbf{g}}{|\mathbf{g}|} S_t. \quad (3.39)$$

Gleichung (3.39) mit Gleichung (3.33) erlaubt schließlich eine explizite Darstellung der Flüssigkeitsspiegeländerung $\Delta^o u|\mathbf{g}| = \Delta^o\mathbf{u} \cdot \mathbf{g}$ als Funktion der Verformung $\Delta\mathbf{u}$ der benetzten Struktur und der Fläche der freien Flüssigkeit:

$$\Delta^o\mathbf{u} \cdot \mathbf{g} = \Delta^o u|\mathbf{g}| = \frac{|\mathbf{g}|}{S_t} \int_{\eta} \int_{\xi} {}^*\mathbf{n}_t \cdot \Delta\mathbf{u} d\xi d\eta. \quad (3.40)$$

Die hydrostatischen Druckänderung aus Gleichung (3.27) kann nach Elimination der Spiegelhöhenänderung $\Delta^o\mathbf{u} \cdot \mathbf{g}$ in Gleichung (3.40) vollständig über

Strukturgrößen angegeben werden:

$$\Delta^g p = \rho \frac{|\mathbf{g}|}{S_t} \int_{\eta} \int_{\xi} {}^* \mathbf{n}_t \cdot \Delta \mathbf{u} \, d\xi d\eta - \rho \mathbf{g} \cdot \Delta \mathbf{u}. \quad (3.41)$$

Mit der Änderung des Druckniveaus aus Gleichung (3.41) folgt für die Änderung des linearisierten Druckpotentials $\delta^g V^{\Delta p}$ in Gleichung (3.26)

$$\begin{aligned} \delta^g V^{\Delta p} &= \rho \frac{|\mathbf{g}|}{S_t} \int_{\eta} \int_{\xi} \delta \mathbf{u} \cdot {}^* \mathbf{n}_t \, d\xi d\eta \int_{\eta} \int_{\xi} {}^* \mathbf{n}_t \cdot \Delta \mathbf{u} \, d\xi d\eta \\ &\quad - \rho \int_{\eta} \int_{\xi} \delta \mathbf{u} \cdot {}^* \mathbf{n}_t \mathbf{g} \cdot \Delta \mathbf{u} \, d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (3.42)$$

3.3.3 Symmetrienachweis

Für das linearisierte hydrostatische Variationspotential aus Gleichung (3.26) ergibt sich nach Berücksichtigung der Randbedingungen, siehe Gleichung (3.32), und mit der expliziten Darstellung der Spiegelhöhenänderung in der Strukturverschiebung $\Delta \mathbf{u}$ aus Gleichung (3.42) folgende Form:

$$\begin{aligned} \delta^g V_{lin} &= \delta^g V_t \\ &+ \rho \frac{|\mathbf{g}|}{S_t} \int_{\eta} \int_{\xi} \delta \mathbf{u} \cdot {}^* \mathbf{n}_t \, d\xi d\eta \int_{\eta} \int_{\xi} {}^* \mathbf{n}_t \cdot \Delta \mathbf{u} \, d\xi d\eta \\ &- \rho \int_{\eta} \int_{\xi} \delta \mathbf{u} \cdot {}^* \mathbf{n}_t \mathbf{g} \cdot \Delta \mathbf{u} \, d\xi d\eta \\ &+ \frac{\rho}{2} \int_{\eta} \int_{\xi} \delta \mathbf{u} \cdot [\mathbf{g} \cdot \mathbf{e}_{\xi} ({}^* \mathbf{n} \otimes \mathbf{e}^{\xi} - \mathbf{e}^{\xi} \otimes {}^* \mathbf{n}) \\ &\quad + \mathbf{g} \cdot \mathbf{e}_{\eta} ({}^* \mathbf{n} \otimes \mathbf{e}^{\eta} - \mathbf{e}^{\eta} \otimes {}^* \mathbf{n})] \Delta \mathbf{u} \, d\xi d\eta \\ &+ \int_{\eta} \int_{\xi} \frac{g p_t}{2} \begin{pmatrix} \delta \mathbf{u} \\ \delta \mathbf{u}_{,\xi} \\ \delta \mathbf{u}_{,\eta} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{W}^{\xi} & \mathbf{W}^{\eta} \\ \mathbf{W}^{\xi T} & 0 & 0 \\ \mathbf{W}^{\eta T} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{u} \\ \Delta \mathbf{u}_{,\xi} \\ \Delta \mathbf{u}_{,\eta} \end{pmatrix} \, d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Die durch Produktintegration entstehenden Druckgradienten entlang den kovarianten Richtungen sind in obiger Darstellung bereits impliziert:

$$\begin{aligned} {}^g p_{t,\xi} &= -\rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{e}_{\xi}, \\ {}^g p_{t,\eta} &= -\rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{e}_{\eta}. \end{aligned}$$

Der zunächst formal unsymmetrische Aufbau des linearisierten hydrostatischen Druckpotentials ist typisch für ungleichmäßige Druckbelastungen, siehe hierzu [Sch82] und [Kne97]. Die Symmetrie der Anteile $\delta^g V^{\diamond}$ wird erst nach weiteren Tensorumformungen deutlich.

$$\begin{aligned}
\delta^g V^\diamond &= -\rho \int_\eta \int_\xi \mathbf{g} \cdot \Delta \mathbf{u} \cdot {}^* \mathbf{n}_t \cdot \delta \mathbf{u} \, d\xi d\eta \\
&\quad + \frac{\rho}{2} \int_\eta \int_\xi \delta \mathbf{u} \cdot [\mathbf{g} \cdot \mathbf{e}_\xi ({}^* \mathbf{n} \otimes \mathbf{e}^\xi - \mathbf{e}^\xi \otimes {}^* \mathbf{n}) \\
&\quad \quad + \mathbf{g} \cdot \mathbf{e}_\eta ({}^* \mathbf{n} \otimes \mathbf{e}^\eta - \mathbf{e}^\eta \otimes {}^* \mathbf{n})] \Delta \mathbf{u} \, d\xi d\eta \quad (3.44)
\end{aligned}$$

Durch eine Erweiterung mit Gleichung (3.14) ergibt sich in tensorieller Darstellung zunächst

$$\begin{aligned}
\delta^g V^\diamond &= -\frac{\rho}{2} \int_\eta \int_\xi [2 \, {}^* \mathbf{n}_t \otimes \mathbf{g} \\
&\quad - \mathbf{g} \cdot \mathbf{e}_\xi ({}^* \mathbf{n} \otimes \mathbf{e}^\xi - \mathbf{e}^\xi \otimes {}^* \mathbf{n}) \\
&\quad - \mathbf{g} \cdot \mathbf{e}_\eta ({}^* \mathbf{n} \otimes \mathbf{e}^\eta - \mathbf{e}^\eta \otimes {}^* \mathbf{n}) \\
&\quad - \mathbf{g} \cdot \mathbf{e}_\zeta ({}^* \mathbf{n} \otimes \mathbf{e}^\zeta - \mathbf{e}^\zeta \otimes {}^* \mathbf{n})] \Delta \mathbf{u} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\xi d\eta. \quad (3.45)
\end{aligned}$$

Der unsymmetrische Summand aus Gleichung (3.45) kann in einen symmetrischen und einen schiefsymmetrischen Anteil zerlegt werden:

$$\underbrace{2 \, {}^* \mathbf{n}_t \otimes \mathbf{g}}_{\text{unsymm.}} = \underbrace{{}^* \mathbf{n}_t \otimes \mathbf{g} + \mathbf{g} \otimes {}^* \mathbf{n}_t}_{\text{symm.}} + \underbrace{{}^* \mathbf{n}_t \otimes \mathbf{g} - \mathbf{g} \otimes {}^* \mathbf{n}_t}_{\text{schief symm.}}. \quad (3.46)$$

Nach weiteren Umformungen unter Verwendung von Gleichung (3.17) zeigt sich die symmetrische Darstellung

$$\Delta^g V^\diamond = -\frac{\rho}{2} \int_\eta \int_\xi \delta \mathbf{u} \cdot ({}^* \mathbf{n}_t \otimes \mathbf{g} + \mathbf{g} \otimes {}^* \mathbf{n}_t) \Delta \mathbf{u} \, d\xi d\eta \quad (3.47)$$

der ungleichförmigen Druckbelastung. Es ergibt sich schließlich der erwartete symmetrische Aufbau eines linearisierten hydrostatischen Variationspotentials

$$\begin{aligned}
\delta^g V_{lin} &= \delta^g V_t \\
&\quad + \rho \frac{|\mathbf{g}|}{S_t} \int_\eta \int_\xi \delta \mathbf{u} \cdot {}^* \mathbf{n}_t \, d\xi d\eta \int_\eta \int_\xi {}^* \mathbf{n}_t \cdot \Delta \mathbf{u} \, d\xi d\eta \quad \text{Term I} \\
&\quad - \frac{\rho}{2} \int_\eta \int_\xi \delta \mathbf{u} \cdot ({}^* \mathbf{n}_t \otimes \mathbf{g} + \mathbf{g} \otimes {}^* \mathbf{n}_t) \Delta \mathbf{u} \, d\xi d\eta \quad \text{Term II} \\
&\quad + \int_\eta \int_\xi \frac{g p_t}{2} \begin{pmatrix} \delta \mathbf{u} \\ \delta \mathbf{u}_{,\xi} \\ \delta \mathbf{u}_{,\eta} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \underline{\mathbf{W}}^\xi & \underline{\mathbf{W}}^\eta \\ \underline{\mathbf{W}}^{\xi T} & 0 & 0 \\ \underline{\mathbf{W}}^{\eta T} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{u} \\ \Delta \mathbf{u}_{,\xi} \\ \Delta \mathbf{u}_{,\eta} \end{pmatrix} \, d\xi d\eta. \quad \text{Term III} \\
&\hspace{15em} (3.48)
\end{aligned}$$

Term I zeigt die Volumenerhaltung über die Kopplung der benetzten Struktur an. In Term II findet sich der linearisierte Anteil der nichtgleichförmigen hydrostatischen Druckbelastung wieder. Term III beschreibt das linearisierte Folgelastproblem der hydrostatischen Druckbelastung.

3.4 Hybride Formulierung

Analog zu kompressiblen masselosen Fluiden ist auch für inkompressible Flüssigkeiten im Schwerfeld eine hybride Darstellung der Modellgleichungen zweckmässig. Neben der Strukturverschiebung $\Delta \mathbf{u}$ wird die Druckänderung $\Delta^o p$ der Flüssigkeit durch die Spiegelhöhenänderung $\Delta^o \mathbf{u}$ als zusätzliche Unbekannte eingeführt, siehe Gleichung (3.40):

$$\begin{aligned} \delta^g V_{lin} &= \delta^g V_t \\ &+ \Delta^o p \int_{\eta} \int_{\xi} {}^* \mathbf{n}_t \cdot \delta \mathbf{u} \, d\xi d\eta \\ &- \frac{\rho}{2} \int_{\eta} \int_{\xi} \delta \mathbf{u} \cdot ({}^* \mathbf{n}_t \otimes \mathbf{g} + \mathbf{g} \otimes {}^* \mathbf{n}_t) \Delta \mathbf{u} \, d\xi d\eta \\ &+ \int_{\eta} \int_{\xi} \frac{g p_t}{2} \begin{pmatrix} \delta \mathbf{u} \\ \delta \mathbf{u}_{,\xi} \\ \delta \mathbf{u}_{,\eta} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \underline{\mathbf{W}}^{\xi} & \underline{\mathbf{W}}^{\eta} \\ \underline{\mathbf{W}}^{\xi T} & 0 & 0 \\ \underline{\mathbf{W}}^{\eta T} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{u} \\ \Delta \mathbf{u}_{,\xi} \\ \Delta \mathbf{u}_{,\eta} \end{pmatrix} d\xi d\eta, \end{aligned} \quad (3.49)$$

$$\Delta^o p - \frac{\rho |\mathbf{g}|}{S_t} \int_{\eta} \int_{\xi} \Delta \mathbf{u} \cdot {}^* \mathbf{n}_t \, d\xi d\eta = 0. \quad (3.50)$$

Wie in Kapitel 2 gezeigt, eignet sich die hybride Darstellung für eine Erweiterung auf Mehrkammerprobleme.

3.5 Diskretisierung

Das Gesamtpotential der Flüssigkeit-Struktur-Wechselwirkung setzt sich aus dem Verformungspotential der Struktur ${}^{el}V$ und dem Schwerpotential gV der Flüssigkeit zusammen und wird durch die virtuelle Arbeit der potentiallosen Kräfte $\delta^{ex}W$ ergänzt. Die nichtlineare Gleichgewichtsbedingung für Struktur und Flüssigkeit ergibt sich nach Variation der Potentialdarstellung über das Prinzip der virtuellen Arbeit $\delta \Pi = 0$,

$$\delta \Pi = \delta {}^{el}V + \delta {}^gV - \delta^{ex}W = 0. \quad (3.51)$$

Die Gleichgewichtslage wird iterativ über das Newton-Verfahren ermittelt. Hierzu ist das nichtlineare Funktional entsprechend den Ausführungen im Kapitel 3.2 zu linearisieren. Durch den isoparametrischen Ansatz (2.55) wird die Flüssigkeit-Struktur-Wechselwirkung approximiert und in einen Finite-Element-Formalismus eingebettet. Das resultierende algebraische Gleichungssystem besteht aus einer symmetrischen globalen Steifigkeitsmatrix ${}^{el}V_{,xx} + {}^gV_{,xx}$ und einem Residuum aus inneren Kräften ${}^{el}V_{,x}$, Wechselwirkungskräften zwischen Struktur und Flüssigkeit ${}^gV_{,x}$ und externen Kräften ${}^{ex}W_{,x}$:

$$({}^{el}V_{,\mathbf{xx}} + {}^gV_{,\mathbf{xx}}) \mathbf{d} = -({}^{el}V_{,\mathbf{x}} + {}^gV_{,\mathbf{x}} - {}^{ex}W_{,\mathbf{x}}). \quad (3.52)$$

Durch Integration des hybriden Modells aus Gleichung (3.49) und (3.50) in das Prinzip vom stationären Wert des Gesamtpotentials läßt sich die Problemstellung leicht auf Mehrkammerprobleme erweitern. Das hybride Mehrkammerproblem mit $i = 1..n$ Kammern ergibt sich dann zu

$$\begin{pmatrix} {}^{el,g}\mathbf{K} & \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \dots & \mathbf{a}_n \\ \mathbf{a}_1^T & -g\alpha_1^{-1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \mathbf{a}_2^T & 0 & -g\alpha_2^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ \mathbf{a}_3^T & 0 & 0 & -g\alpha_3^{-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a}_n^T & 0 & 0 & 0 & \dots & -g\alpha_n^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{d} \\ \Delta^o p_1 \\ \Delta^o p_2 \\ \Delta^o p_3 \\ \vdots \\ \Delta^o p_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^g\mathbf{F} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.53)$$

Neben der Knotenverschiebung \mathbf{d} der Struktur werden die Druckänderungen $\Delta^o p_i$ infolge Spiegelhöhenchwankungen der Flüssigkeiten i als zusätzliche Unbekannte eingeführt. Auf die Steifigkeitsmatrix der Struktur ${}^{el}\mathbf{K}$ addieren sich die nichtgleichförmigen Folgelastanteile der Flüssigkeitslasten ${}^g\mathbf{K}_i$, gemäß Gleichung (3.54). Das Residuum wird entsprechend um Wechselwirkungskräfte ${}^g\mathbf{f}_i$ zwischen Struktur und den mit Flüssigkeit befüllten i Kammern erweitert:

$${}^{el,g}\mathbf{K} = {}^{el}\mathbf{K} + {}^g\mathbf{K}_1 + {}^g\mathbf{K}_2 + {}^g\mathbf{K}_3 \dots + {}^g\mathbf{K}_n, \quad (3.54)$$

$${}^g\mathbf{F} = {}^{ex}\mathbf{f} - {}^g\mathbf{f}_1 - {}^g\mathbf{f}_2 - {}^g\mathbf{f}_3 \dots - {}^g\mathbf{f}_n - {}^{el}\mathbf{f}. \quad (3.55)$$

Infolge der i -ten Flüssigkeitsfüllung kommt es zu folgenden diskretisierten Einträgen im Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} {}^g\mathbf{K}_i &= -\frac{\rho_i}{2} \sum_{e_i} \int_{\eta} \int_{\xi} \mathbf{N}^T (*\mathbf{n}\mathbf{g}^T + \mathbf{g} * \mathbf{n}^T) \mathbf{N} \, d\xi d\eta \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{e_i} \int_{\eta} \int_{\xi} {}^g p_{ti} \begin{pmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{N}_{,\xi} \\ \mathbf{N}_{,\eta} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{W}^{\xi} & \mathbf{W}^{\eta} \\ \mathbf{W}^{\xi T} & 0 & 0 \\ \mathbf{W}^{\eta T} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{N}_{,\xi} \\ \mathbf{N}_{,\eta} \end{pmatrix} \, d\xi d\eta, \end{aligned} \quad (3.56)$$

$$\mathbf{a}_i = \sum_{e_i} \int_{\eta} \int_{\xi} \mathbf{N}^T * \mathbf{n}_t \, d\xi d\eta, \quad (3.57)$$

$${}^g\mathbf{f}_i = \sum_{e_i} \int_{\eta} \int_{\xi} {}^g p_{ti} \mathbf{N}^T * \mathbf{n}_t \, d\xi d\eta, \quad (3.58)$$

$${}^g p_{ti} = \rho_i \mathbf{g}^T ({}^o \mathbf{x}_{ti} - \mathbf{x}_{ti}), \quad (3.59)$$

$${}^g \alpha_i = \frac{\rho_i |\mathbf{g}|}{S_{ti}} \quad (3.60)$$

mit

$$S_{ti} = \sum_{e_i} \int_{\eta} \int_{\xi} \frac{|\mathbf{g}|}{|\mathbf{g}|} * \mathbf{n}_t \, d\xi d\eta. \quad (3.61)$$

Die Lastanteile der Flüssigkeit auf die Steifigkeitsmatrix und auf den Lastvektor fallen nur bei den jeweils benetzten Elementen an. Im Unterschied zu kompressiblen masselosen Fluiden ist das nichtgleichförmige Druckniveau ${}^g p_{ti}$ für jeden einzelnen Gaußpunkt eines Elementes zu berechnen. Schneidet der Flüssigkeitsspiegel ein benetztes Element nur teilweise, kommt es zu einer reduzierten Gaußpunktintegration für dieses Element. Dies führt dazu, daß bei groben Netzen der Druckverlauf in der Nähe des Flüssigkeitsspiegels nur näherungsweise wiedergegeben wird. Eine Beeinträchtigung des Konvergenzverhaltens des nichtlinearen Problems ist hierdurch aber nur in Einzelfällen zu erwarten. Nach der Kondensation auf eine reine Verschiebungsform entsteht ein zu Kapitel 2 identischer Aufbau:

$$({}^{el}\mathbf{K} + \sum_{i=1}^n ({}^g\mathbf{K}_i + {}^g\alpha_i \mathbf{a}_i \mathbf{a}_i^T)) \mathbf{d} = {}^{ex}\mathbf{f} - \sum_{i=1}^n {}^g\mathbf{f}_i - {}^{el}\mathbf{f}. \quad (3.62)$$

Auf die Struktursteifigkeit ${}^{el}\mathbf{K}$ wird für jede Flüssigkeit i ein Laststeifigkeitsanteil ${}^g\mathbf{K}_i$ der nicht gleichförmigen Folgelast addiert. Weiter werden über eine Dyade vom Rang eins ${}^g\alpha_i \mathbf{a}_i \mathbf{a}_i^T$ alle benetzten Knoten einer Kammer i gekoppelt. n Kammern führen dann zu n Dyaden vom Rang eins mit der jeweils entsprechenden Kopplung. Wird durch den Einfluß von äußeren Kräften oder durch die Befüllung eines Gefäßes der Flüssigkeitsspiegel in einem geschlossenen Gefäß derart angehoben, daß die freie Flüssigkeitsoberfläche verschwindet ($S_{ti} = 0$), dann ist im weiteren Verlauf der Simulation die Flüssigkeit als kompressibel anzunehmen, siehe hierzu Kapitel 4 und [RS03a], [RS03c].

3.6 Lösungsalgorithmus

Wie mehrfach gezeigt kann mit dem mehrmaligen Anwenden der Sherman-Morrison-Formel das gekoppelte Gleichungssystem in dünnbesetzte Gleichungssysteme ausschließlich für Strukturfreiheitsgrade überführt werden, siehe hierzu Kapitel 2.6 und [SM49], [Zie68]. Das Vorgehen ist dann völlig analog. Neben der Strukturverschiebung ist im Algorithmus die Spiegelhöhe der Flüssigkeit i mittels einer Nachlaufrechnung zu ermitteln. Die unbekannte Spiegelhöhe berechnet sich im jeweiligen Iterationsschritt zu

$${}^o\mathbf{x}_i = {}^o\mathbf{x}_{ti} + {}^o\Delta\mathbf{u}_i, \quad (3.63)$$

mit der Änderung der Spiegelhöhe in Kammer i gemäß Gleichung (3.40)

$${}^o\Delta u_i = {}^o\Delta\mathbf{u}_i \cdot \frac{\mathbf{g}}{|\mathbf{g}|} = \frac{\mathbf{a}_i^T \mathbf{d}}{S_i}. \quad (3.64)$$

3.7 Bogenlängenverfahren

Analog zu Kapitel 2.7 wird das für die praktische Anwendung sehr wichtige Bogenlängenverfahren auf die Berechnung von deformierbaren Strukturen in der

Hydrostatik erweitert. Mit einer zusätzlichen Regelungsgleichung wird die auftretende Singularität der Steifigkeitsmatrix in der Umgebung der kritischen Last eliminiert, siehe auch [Sch89], [Rik79]. Für praxisrelevante Belastungsfälle wird eine direkte Kraftregelung, eine indirekte Verschiebungsregelung durch einen starren Kolben bzw. eine indirekte Regelung des Flüssigkeitspiegels mittels einer direkten Druckregelung entwickelt.

3.7.1 Kraftregelung

Das Variationsfunktional der Flüssigkeit-Struktur-Kopplung wird durch die virtuelle Arbeit einer geregelten richtungstreuen externen Last erweitert:

$$\delta\Pi = \delta^{el}V + \delta^gV - \delta^{\lambda f}W \quad (3.65)$$

mit

$$\delta^{\lambda f}W = \lambda^{ex} \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{u}. \quad (3.66)$$

Die mit einer Iteration auf Normalenebene realisierte Regelung, siehe Gleichung (2.90), bewirkt für ein Einkammerproblem nach Linearisierung und Diskretisierung eine zweifache dyadische Erweiterung der Steifigkeitsmatrix vom Rang eins. Die Kopplung der benetzten Knoten infolge Volumenerhaltung ${}^g\alpha\mathbf{a}\mathbf{a}^T$ und Regelungsgleichung $\frac{1}{\gamma} {}^{ex}\mathbf{f} \mathbf{z}^T$ führt auf

$$({}^{el,g}\mathbf{K} + {}^g\alpha\mathbf{a}\mathbf{a}^T + \frac{1}{\gamma} {}^{ex}\mathbf{f} \mathbf{z}^T) \mathbf{d} = \lambda^g \mathbf{F} - \frac{\Xi}{\gamma} {}^{ex}\mathbf{f}. \quad (3.67)$$

Das Gleichungssystem ist im Aufbau identisch zu Gleichung (2.95). Das Residuum setzt sich aus einem geregelten Kraftvektor $\lambda^{ex}\mathbf{f}$, der Wechselwirkungskraft ${}^g\mathbf{f}$ und dem Vektor der inneren Strukturkräfte ${}^{el}\mathbf{f}$ zusammen:

$$\lambda^g \mathbf{F} = \lambda^{ex}\mathbf{f} - {}^g\mathbf{f} - {}^{el}\mathbf{f}. \quad (3.68)$$

Der hierauf angepaßte Lösungsalgorithmus unter Verwendung der Sherman-Morrison-Formel findet sich in Kapitel 2.7.1 von Gleichung (2.97) bis Gleichung (2.105).

3.7.2 Indirekte Verschiebungsregelung

Neben der Kraftregelung sind die Verschiebungsregelung von Strukturbereichen und die damit eventuell einhergehenden Spiegelhöhenchwankungen von praktischem Interesse. Die Höhe des Flüssigkeitsspiegels hängt von Strukturverschiebungen ab und ist aus der Volumenerhaltung zu bestimmen, siehe Abbildung 3.3. Entstehende Strukturinstabilitäten und die damit verbundene Singularität im Gleichungssystem sind mit einer zusätzliche Regelungsgleichung zu umgehen. Damit ist die Berechnung von kritischen Belastungen und postkritischen Verformungszuständen möglich.

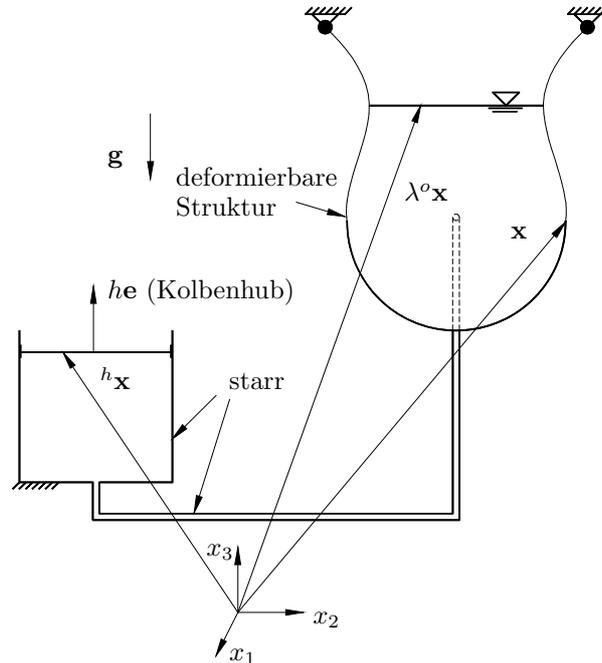


Abbildung 3.3: Indirekte Verschiebungsregelung für inkompressible Flüssigkeiten; h Kolbenhub; \mathbf{e} Einheitsvektor in Richtung des Kolbenhubs; starrer Kolben in starrem Zylinder mit starrer Druckleitung zur deformierbaren Struktur; $\lambda^o \mathbf{x}$ Lage des Flüssigkeitsspiegels (Endlage)

Wird z.B. eine Steuerung über ein Kolbensystem vorgenommen so muß die starre Verbindungsleitung zwischen Hydraulikzylinder und deformierbarer Struktur bei einer Abbildung der Aufgabenstellung nicht mit finiten Elementen diskretisiert werden, da das Flüssigkeitsvolumen in der Leitung konstant bleibt.

Geregeltes hydrostatisches Variationsproblem

Das beschreibende Variationsproblem der Flüssigkeit-Struktur-Kopplung enthält das Variationsfunktional der deformierbaren Struktur $\delta^{el}V$ und des direkt geregelten hydrostatischen Variationspotentials $\delta^{\lambda g}V$. Das Druckniveau ${}^{\lambda g}p$, respektive die Flüssigkeitsspiegelhöhe ${}^o \mathbf{x}$ wird direkt über den Regelparameter λ gesteuert:

$$\delta \Pi = \delta^{el}V + \delta^{\lambda g}V, \quad (3.69)$$

$$\delta^{\lambda g}V = \int_{\eta} \int_{\xi} \rho \mathbf{g} \cdot (\lambda {}^o \mathbf{x} - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\xi d\eta. \quad (3.70)$$

Die Regelung wird entsprechend den Ausführungen in Kapitel 2.7.1 durch eine algebraische Nebenbedingung im Last-Verschiebungsraum realisiert, siehe Gleichung (2.85).

Volumenerhaltung für indirekte Verschiebungsregelung

Das gesamte Flüssigkeitsvolumen kann über Oberflächenintegrale aus einem starren, einem deformierbaren Strukturbereich sowie der freien Flüssigkeitsoberfläche bestimmt werden, siehe Abbildung 3.3. Entsprechend den Gleichungen (3.8) und (2.111) ergibt sich für das konstante Flüssigkeitsvolumen ${}^{\lambda g}v$ die Beziehung

$${}^{\lambda g}v = v + {}^o v + {}^h v = \text{konst.} \quad (3.71)$$

Der Oberflächenanteil des Kolbens wird gemäß Gleichung (2.111) berücksichtigt.

Linearisierung

Die nichtlineare Modellbeschreibung, bestehend aus dem Variationsfunktional (3.69), der Volumenerhaltung (3.71) und der Regelungsgleichung (2.85), ist für einen iterativen Lösungsprozeß zu linearisieren. Für das Funktional ergibt sich

$$\begin{aligned} \delta^{\lambda g} V_{lin} &= \delta^{\lambda g} V_t \\ &+ \int_{\eta} \int_{\xi} (\Delta \lambda {}^o p - \rho \mathbf{g} \cdot \Delta \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}_t \cdot \delta \mathbf{u} \, d\xi d\eta \\ &+ \int_{\eta} \int_{\xi} {}^{\lambda g} p_t \Delta^* \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Die linearisierte Volumenerhaltung läßt sich in drei Terme aufteilen, siehe hierzu auch Gleichungen (2.119) - (2.124) und Gleichungen (3.33) - (3.40):

$$\Delta^{\lambda g} v = \int_{\eta} \int_{\xi} \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, d\xi d\eta + \Delta \lambda {}^o \mathbf{x} \cdot \frac{\mathbf{g}}{|\mathbf{g}|} S_t + \Delta h {}^h S = 0. \quad (3.73)$$

Die Volumenerhaltung wird durch die Strukturverschiebungen $\Delta \mathbf{u}$, die Spiegelhöhenchwankung $\Delta \lambda {}^o \mathbf{x} \cdot \frac{\mathbf{g}}{|\mathbf{g}|}$ und die Änderung im Kolbenhub Δh beschrieben.

Diskretisierung

Nach der Diskretisierung der Modellgleichungen kann das hybride Gleichungssystem, bestehend aus dem linearisierten Variationsfunktional ($\delta \Pi_{lin} = 0$) und der linearisierten Regelungsgleichung ($\Xi_{lin} = 0$), z.B. für ein Einkammerproblem aufgestellt werden:

$$\begin{pmatrix} {}^{el, \lambda g} \mathbf{K} & {}^o \mathbf{f} \\ \mathbf{z}^T & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{d} \\ \Delta \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -{}^{\lambda g} \mathbf{f} - {}^{el} \mathbf{f} \\ -\Xi \end{pmatrix}. \quad (3.74)$$

Nachdem die diskretisierte Feldgleichung und die Regelungsgleichung simultan gelöst worden sind, wird in einer Nachlaufrechnung mittels Volumenerhaltung die zur Spiegelhöhenänderung $\Delta \lambda \frac{\mathbf{g}}{|\mathbf{g}|} \cdot {}^o \mathbf{x}$ korrespondierende Änderung Δh des Kolbenhubs berechnet. Die Teilsteifigkeitsmatrix ${}^{el, \lambda g} \mathbf{K} = {}^{el} \mathbf{K} + {}^{\lambda g} \mathbf{K}$ setzt sich

aus der Steifigkeitsmatrix ${}^{el}\mathbf{K}$ der deformierbaren Struktur und der geregelten Laststeifigkeitsmatrix ${}^{\lambda g}\mathbf{K}$ zusammen. Die Laststeifigkeitsmatrix ${}^{\lambda g}\mathbf{K}$ und der Lastvektor ${}^{\lambda g}\mathbf{f}$ unterscheiden sich bezüglich des unregulierten Falls durch das geregelte Lastniveau $\lambda_t^g p$, das über die linearisierte Regelungsgleichung (2.87) bestimmt wird. Nach der Kondensation auf eine Verschiebungsform ergibt sich wegen der Regelungsgleichung eine dyadische Erweiterung der Teilsteifigkeitsmatrix ${}^{el,\lambda g}\mathbf{K}$ vom Rang eins:

$$({}^{el,\lambda g}\mathbf{K} - \frac{1}{\gamma} {}^o\mathbf{f} \mathbf{z}^T) \mathbf{d} = {}^{\lambda g}\mathbf{R} + \frac{\Xi}{\gamma} {}^o\mathbf{f}. \quad (3.75)$$

Der Aufbau des Gleichungssystems entspricht, bis auf ein Vorzeichen, der indirekten Verschiebungsregelung von kompressiblen masselosen Fluiden in deformierbaren Strukturen, siehe Gleichung (2.128). Das Residuum ${}^{\lambda g}\mathbf{R} = -{}^{\lambda g}\mathbf{f} - {}^{el}\mathbf{f}$ wird durch einen Korrekturanteil $\frac{\Xi}{\gamma} {}^o\mathbf{f}$ mit dem Residuum Ξ der Regelungsgleichung erweitert. Der Lastvektor ${}^o\mathbf{f}$ beschreibt den Arbeitsdruck der Spiegelhöhe:

$${}^o\mathbf{f} = \sum_e \rho \mathbf{g}^T {}^o\mathbf{x} \int_{\eta} \int_{\xi} \mathbf{N}^T * \mathbf{n}_t d\xi d\eta. \quad (3.76)$$

Analog zur indirekten Verschiebungsregelung von kompressiblen Fluiden führt eine simultane Erfüllung von Regelungsgleichung und Volumenerhaltung zu einem überbestimmten Gleichungssystem. Infolgedessen wird die Volumenerhaltung in der Nachlaufrechnung berücksichtigt. Die Spiegelhöhe der Flüssigkeit wird zunächst über die Regelungsgleichung ermittelt und im Nachlauf die korrespondierende Kolbenstellung aus der geforderten Volumenerhaltung bestimmt.

Lösungsalgorithmus

Der Lösungsvektor der Knotenverschiebungen \mathbf{d} berechnet sich laut Sherman-Morrison-Formel zu

$$\mathbf{d} = \frac{\Xi + \mathbf{z}^T {}^2\mathbf{d}}{\gamma - \mathbf{z}^T {}^1\mathbf{d}} {}^1\mathbf{d} + {}^2\mathbf{d}. \quad (3.77)$$

Das Gleichungssystem ist demnach zweimal pro Iterationsschritt zu lösen:

$${}^1\mathbf{d} = {}^{el,\lambda g}\mathbf{K}^{-1} {}^o\mathbf{f}, \quad (3.78)$$

$${}^2\mathbf{d} = {}^{el,\lambda g}\mathbf{K}^{-1} {}^{\lambda g}\mathbf{R}. \quad (3.79)$$

Der Lastfaktor $\lambda = \lambda_t + \Delta\lambda$ zur Anpassung der Spiegelhöhe $\lambda^o\mathbf{x}$ ergibt sich aus der Regelungsgleichung (2.87) durch Einsetzen in die Lösung (3.77) mit

$$\Delta\lambda = -\frac{\Xi + \mathbf{z}^T {}^2\mathbf{d}}{\gamma - \mathbf{z}^T {}^1\mathbf{d}}. \quad (3.80)$$

Der zur Spiegelhöhe korrespondierende Kolbenhub $h = h_t + \Delta h$ ist entsprechend Gleichung (3.73) über die Änderung im Hub erklärt:

$$\Delta h = -\frac{1}{hS} \left(\mathbf{a}^T \mathbf{d} + \Delta\lambda {}^o\mathbf{x}^T \frac{\mathbf{g}}{|\mathbf{g}|} S_t \right). \quad (3.81)$$

Indirekte Regelung der Eintauchtiefe

Von praktischem Interesse ist auch die alleinige Regelung des Flüssigkeitsspiegels. Wird eine deformierbare Struktur in ein unendlich ausgedehntes Becken gesenkt, so kann die Flüssigkeitsbelastung zu Instabilitäten führen. Eine Einbettung der Flüssigkeits-Struktur-Wechselwirkung in ein Bogenlängenverfahren ermöglicht die Berechnung der kritischen Einsinktiefe und von postkritischen Strukturverformungen, siehe Abbildung 3.4.

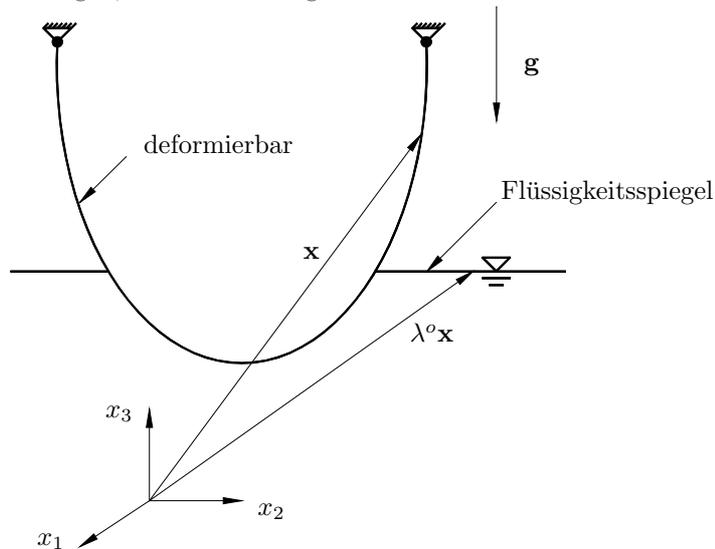


Abbildung 3.4: Indirekte Regelung der Eintauchtiefe; deformierbare Struktur wird in unendliches Flüssigkeitsbecken getaucht; $\lambda^o \mathbf{x}$ geregelte Eintauchtiefe

Die gezeigte Problemstellung ist ein Sonderfall der indirekten Druckregelung. Die Gewährleistung einer Volumenerhaltung ist hier nicht erforderlich. Bis auf die Formulierung der Volumenerhaltung können alle formulierten Gleichungen ohne Modifizierung übernommen werden. Die geregelte Eintauchtiefe bestimmt sich aus Gleichung (3.80). Die Regelung der Kolbenstellung in der Nachlaufrechnung nach Gleichung (3.81) entfällt.

3.8 Stabilität

Wegen des formal gleichen Aufbaus der Gesamtsteifigkeitsmatrix sind die in Kapitel 2.8 gemachten Aussagen ohne Einschränkung, auch auf das Stabilitätsverhalten von deformierbaren Strukturen unter hydrostatischer Belastung zu übertragen. In einem einfache Beispiel wird dies deutlich.

Ein befülltes System (Dichte der Flüssigkeit ρ) ist über zwei federnd gelagerte Kolben (Kolbenflächen: A_1 , A_2 , Federsteifigkeiten: c_1 , c_2) abgeschlossen, siehe Abbildung 3.5. Der sich einstellende Flüssigkeitsspiegel hat die konstante freie Fläche S .

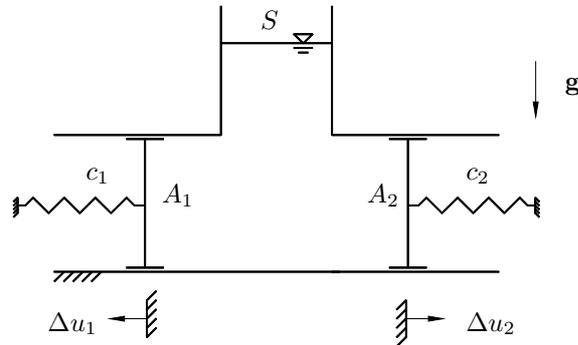


Abbildung 3.5: Federnd gelagerter Kolben unter hydrostatischer Belastung

Die Gesamtsteifigkeitsmatrix \mathbf{K} des Systems ergibt sich unter Berücksichtigung der Volumenerhaltung nach kurzer Rechnung zu

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} + {}^g\alpha \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \end{pmatrix}, \quad (3.82)$$

mit ${}^g\alpha = \frac{\rho|\mathbf{g}|}{S}$ als Druckvolumengradient. Der Einfluß der Volumenerhaltung auf die Stabilität des Systems kann analog zu Kapitel 2.8.3 beispielhaft, durch die Änderung der Determinante oder über eine Modalanalyse gezeigt werden. Die Gleichungen unterscheiden sich einzig im Druckvolumengradienten (Hydrostatik: ${}^g\alpha$, Pneumatik: ${}^k\alpha$).

3.9 Zusammenfassung

Das vorgestellte Verfahren zur Berechnung der Gleichgewichtslage einer stark deformierten Hohlstruktur und einer inkompressiblen Flüssigkeit kommt ohne Diskretisierung der Flüssigkeit aus. Eine Kontaktmodellierung zwischen Flüssigkeit und Struktur ist daher nicht notwendig. Die Gewährleistung der Volumenerhaltung der Flüssigkeit macht auch bei großen Strukturverschiebungen eine Bestimmung der sich einstellenden Spiegelhöhe möglich. Die Volumenkopplung des Problems zeigt sich in der blockweisen Kopplung aller benetzten Knoten im Gleichungssystem. Durch die Anwendung der Sherman-Morrison-Formel kann das gekoppelte Gleichungssystem in ein bandstrukturiertes Referenzproblem mit ausschließlich Strukturfreiheitsgraden überführt werden. Die gesuchten Knotenverschiebungen lassen sich durch wenige zusätzliche Vorwärts-Rückwärts-Substitutionen berechnen. Das vollständig durch die Form und das Volumen der benetzten Struktur beschriebene Flüssigkeits-Struktur-Problem ist in der vorgestellten Form bezüglich eines komplett diskretisierten Verfahrens effizienter in der Rechenzeit, und die Effekte bzgl. Stabilität sind klar überschaubar.

Wegen des identischen Aufbaus der beschreibenden Gleichungssysteme sind die in Kapitel 2 gemachten Aussagen zur Stabilität ohne Einschränkung auf deformierbare Strukturen unter hydrostatischer Belastung übertragbar.

Kapitel 4

Hydraulik deformierbarer Strukturen im Schwerfeld

Große deformierbare, komplett mit Flüssigkeit gefüllte Strukturen lassen sich durch eine Synthese der Modelle aus den Kapiteln 2 und 3 beschreiben. Die hier vorgestellten Gleichungen können als allgemeiner Ansatz einer Fluid-Struktur-Kopplung betrachtet werden. Aus didaktischen Gründen ist diese allgemeine Beschreibung am Ende der Arbeit zu finden. Ist eine deformierbare Struktur komplett mit einer inkompressiblen Flüssigkeit befüllt, führt dies auf ein überbestimmtes Gleichungssystem. Die Bestimmung einer eindeutigen Gleichgewichtslage ist nicht möglich. Wird hingegen die Flüssigkeit als kompressibel betrachtet, kann die Gleichgewichtslage berechnet werden.

4.1 Prinzip der virtuellen Arbeit

Flüssigkeit und Struktur stehen miteinander im Gleichgewicht, wenn die Variation des elastischen Potentials der Struktur $\delta^{el}V$ und des Flüssigkeitspotentials $\delta^{kg}\Pi$ identisch verschwindet:

$$\delta^{kg}\Pi + \delta^{el}V = 0. \quad (4.1)$$

Das Flüssigkeitspotential $^{kg}\Pi$ setzt sich aus der inneren Energie ^{kg}U und dem Schwerepotential der Flüssigkeit ^{kg}V zusammen:

$$\delta^{kg}\Pi = \delta^{kg}U + \delta^{kg}V. \quad (4.2)$$

Der Index kg kennzeichnet eine kompressible schwere Flüssigkeit. Nach dem 2. Hauptsatz der Thermodynamik ist die Variation der Entropie $\delta^{kg}S$ eines reversiblen, adiabatischen Systems null:

$$\delta^{kg}S = \delta^{kg}U + {}^k p \delta v = 0. \quad (4.3)$$

Für das Flüssigkeitspotential einer kompressiblen schweren Flüssigkeit ergibt sich daraus

$$\delta^{kg}\Pi = \delta^{kg}V - {}^k p \delta v, \quad (4.4)$$

$$\delta^{kg}\Pi = \delta^{kg}V - \delta^k W. \quad (4.5)$$

$\delta^k W$ entspricht der Änderung der inneren Energie und wird entsprechend zu Kapitel 2 als Variation der Volumenänderungsarbeit der Kompressionsdruckkraft eingeführt. Der Kompressionsdruck ${}^k p$ ist über die Massenerhaltung der Flüssigkeit mit der Dichte gekoppelt. Das Schwerepotential und die Variation der Volumenänderungsarbeit können durch Oberflächenintegrale analog zu Kapitel 2 und 3 dargestellt werden, siehe auch [RS03a], [RS03c]. Die Verformungsenergie der Struktur kann alternativ auch über Verschiebungsfunktionale oder über die schwache Form des Gleichgewichts formuliert werden.

4.1.1 Schwerepotential eines kompressiblen Fluids

Das Schwerepotential eines kompressiblen Fluids ergibt sich durch Integration über das Gesamtvolumen v der Flüssigkeit. In einer kompressiblen Flüssigkeit ist die Dichte $\rho(\mathbf{x})$ vom Ort abhängig:

$${}^{kg}V = - \int_v \rho(\mathbf{x}) \mathbf{g} \cdot \mathbf{x} dv + \text{const.} \quad (4.6)$$

Für technische Anwendungen wird hier vereinfachend angenommen, daß die Dichte über die globale Massenerhaltung der Flüssigkeit gegeben ist. Dies ist insoweit gerechtfertigt, da sich die Dichte bei realistischen Strukturabmessungen faktisch kaum ändert. Das vereinfachte Potential kann dann verkürzt über das Volumenmoment 1. Grades dargestellt werden. Das Schwerepotential der Flüssigkeit, unabhängig davon ob inkompressibel oder kompressibel, ist durch Form und Volumen der eingeschlossenen Flüssigkeit gegeben:

$${}^{kg}V = -\rho(v) \int_v \mathbf{g} \cdot \mathbf{x} dv + \text{const.} \quad (4.7)$$

$$= -\rho(v) \mathbf{g} \cdot \mathbf{s} + \text{const.} \quad (4.8)$$

4.1.2 Massenerhaltung

Die Masse der eingeschlossenen Flüssigkeit ist bei geschlossenen Strukturen konstant. Bei technischen Anwendungen ist eine globale Beschreibung der Dichte über die Volumenänderung der Flüssigkeit realistisch:

$$\rho(v) = \rho_0 \frac{V}{v}. \quad (4.9)$$

ρ_0 und V kennzeichnen Referenzdichte und Referenzvolumen der Flüssigkeit. v ist das aktuelle Volumen der eingeschlossenen Flüssigkeit.

Für kompressible Fluide im Schwerfeld wird im Allgemeinen ein exponentieller Dichtezuwachs mit der Flüssigkeitstiefe h angenommen:

$$\frac{\Delta\rho}{\rho_0} = \exp\left(\frac{|\mathbf{g}|\rho_0}{K}h\right) - 1. \quad (4.10)$$

In einer Wassersäule von $h = 10 \text{ m}$ und einem Kompressionsmodul von $K = 2 \cdot 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ berechnet sich die relative Dichteänderung zu $\frac{\Delta\rho}{\rho_0} = 4.9 \cdot 10^{-5}$ bei einer Ausgangsdichte von $\rho_0 = \frac{1 \text{ kg}}{\text{dm}^3}$. Die globale Beschreibung der Dichte nach Gleichung (4.9) ist somit für technische Fragestellungen gerechtfertigt.

4.1.3 Variation des Schwerpotentials eines kompressiblen Fluids

Bei Einbettung der Flüssigkeit in das Prinzip der Stationarität ist die Variation des Schwerpotentials für kompressible Fluide unter Berücksichtigung der Massenerhaltung zu formulieren:

$$\delta^{kg}V = -\delta\rho(v)\mathbf{g} \cdot \mathbf{s} - \rho(v)\mathbf{g} \cdot \delta\mathbf{s}. \quad (4.11)$$

Die Variation der Dichte läßt sich über die Variation der Massenerhaltung auf die Variation des Flüssigkeitsvolumens δv zurückführen:

$$\delta\rho(v) = -\frac{\rho(v)}{v}\delta v. \quad (4.12)$$

Die Variation des Flüssigkeitsvolumens läßt sich wiederum durch Operatoraustausch aus der linearisierten Volumenberechnung (4.12), (2.15) bzw. dem Flächensatz [dB82] ableiten. Somit ist die Variation des Volumens δv bzw. der Dichte $\delta\rho$ als Funktion der virtuellen Strukturverschiebung $\delta\mathbf{u}$ explizit gegeben:

$$\delta v = \int_{\eta} \int_{\xi} {}^*\mathbf{n} \cdot \delta\mathbf{u} \, d\xi d\eta. \quad (4.13)$$

Für das Volumenmomentes 1. Grades ist die Variation $\delta\mathbf{s}$ aus der Herleitung des hydrostatischen Variationspotentials für inkompressible Flüssigkeiten bekannt, siehe Gleichungen (3.11) - (3.19). Die Variation der Flüssigkeitsform $\delta\mathbf{s}$ ist folglich vollständig als Funktion der virtuellen Strukturverschiebung $\delta\mathbf{u}$ darstellbar:

$$\mathbf{g} \cdot \delta\mathbf{s} = \int_{\eta} \int_{\xi} \mathbf{x} \cdot \mathbf{g} \, {}^*\mathbf{n} \cdot \delta\mathbf{u} \, d\xi d\eta. \quad (4.14)$$

Nach Substitution der Gleichungen (4.12) und (4.14) in die Variation des Schwerpotentials und mit der Definition des Volumenschwerpunktes

$$\mathbf{c} = \frac{\mathbf{s}}{v}, \quad (4.15)$$

der Flüssigkeit folgt für die Variation des kompressiblen Schwerpotentials

$$\delta^{kg}V = \rho(v) \int_{\eta} \int_{\xi} \mathbf{g} \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{x}) \, {}^*\mathbf{n} \cdot \delta\mathbf{u} \, d\xi d\eta. \quad (4.16)$$

Der prinzipielle Aufbau des Schwerepotentials für kompressible Fluide unterscheidet sich nicht vom bekannten hydrostatischen Druckpotential, siehe Gleichung (3.23). Beim kompressiblen Fall ist das Gewicht der Flüssigkeitssäule zwischen Volumenschwerpunkt \mathbf{c} und Struktur Lage \mathbf{x} , beim inkompressiblen Fall das totale Gewicht der Flüssigkeitssäule über der Struktur Lage \mathbf{x} zu bestimmen. Für Strukturbereiche oberhalb des Volumenschwerpunktes der Flüssigkeit wirkt im kompressiblen Fall das Flüssigkeitsgewicht gegen die stets aus der Struktur herauszeigende Normale ${}^*\mathbf{n}$. Neben dem Schwereanteil der Flüssigkeit wird analog zu Kapitel 2 die Kompressibilität der Flüssigkeit über die Variation der Volumenänderungsarbeit bzw. der Variation der negativen inneren Energie $-\delta^{kg}U$ in das Variationsproblem eingebettet.

4.1.4 Variation der Volumenänderungsarbeit

Die Kompressibilität der Flüssigkeit wird unter der Annahme einer globalen Volumenabhängigkeit des Kompressionsdrucks durch das Hookesche Gesetz beschrieben:

$${}^k p(v) = -K \frac{v - V}{V}. \quad (4.17)$$

Demnach ist die Variation der Volumenänderungsarbeit der Kompressionsdruckkraft gegeben durch

$$\delta^{kg}W = {}^k p(v) \int_{\eta} \int_{\xi} {}^*\mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\xi d\eta. \quad (4.18)$$

4.1.5 Variationsdarstellung der kompressiblen schweren Flüssigkeit

Die Variationsdarstellung der kompressiblen Flüssigkeit setzt sich additiv aus der Variation des Schwerepotentials einer kompressiblen Flüssigkeit (4.16) und der Variation der Volumenänderungsarbeit (4.18) zusammen:

$$\delta^{kg}\Pi = \rho(v) \int_{\eta} \int_{\xi} \mathbf{g} \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{x}) {}^*\mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\xi d\eta - {}^k p(v) \int_{\eta} \int_{\xi} {}^*\mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\xi d\eta. \quad (4.19)$$

Für weitere Umformungen ist es zweckmäßig eine Unterteilung in Teildruckwerte ${}^x p$ auf der Struktur Oberfläche \mathbf{x} und ${}^c p$ im Volumenschwerpunkt \mathbf{c} in das Variationsproblem einzuführen:

$${}^x p = \rho(v) \mathbf{g} \cdot \mathbf{x}, \quad (4.20)$$

$${}^c p = \rho(v) \mathbf{g} \cdot \mathbf{c}. \quad (4.21)$$

Die Darstellung des Variationsfunktionals verkürzt sich dann zu

$$\delta^{kg}\Pi = \int_{\eta} \int_{\xi} ({}^c p - {}^x p - {}^k p) {}^* \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\xi d\eta \quad (4.22)$$

$$= \int_{\eta} \int_{\xi} {}^{kg} p {}^* \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\xi d\eta \quad (4.23)$$

mit

$${}^{kg} p = {}^c p - {}^x p - {}^k p. \quad (4.24)$$

Für die physikalische Interpretation der Variationsdarstellung ist das Funktional in eine virtuelle Arbeit durch Multiplikation mit -1 umzuschreiben. Der hieraus abgeleitete Flüssigkeitsdruck $-{}^{kg} p$ setzt sich aus einem über der Flüssigkeitshöhe H linearen Schwerkraftanteil ${}^x p - {}^c p$ und einem konstanten Kompressionsanteil ${}^k p$ zusammen, siehe Abbildung 4.1. Das Bildungsgesetz gibt gleich-

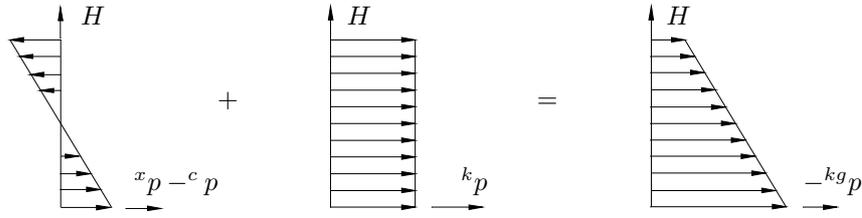


Abbildung 4.1: Additiver Aufbau des kompressiblen hydrostatischen Drucks

zeitig den Wertebereich des Modells an. Ist in der Flüssigkeit der Kompressionsdruck kleiner als das Gewicht der Flüssigkeitssäule zwischen dem höchsten Punkt und dem Volumenschwerpunkt der Flüssigkeit, so bildet sich eine freie Flüssigkeitsoberfläche in der Struktur aus. In diesem Fall kann die Flüssigkeit als inkompressibel betrachtet werden, siehe Kapitel 3.

4.2 Linearisierung

Im Rahmen der Linearisierung für eine Lösung mit dem Newton-Verfahren ist die nichtlineare Variationsdarstellung (4.23) unter Berücksichtigung der Massenerhaltung (4.9) und des Hookeschen Gesetzes (4.17) durch eine mehrdimensionale Taylorreihe bis zum ersten Glied zu entwickeln. Die gesuchte Gleichgewichtslage kann anschließend iterativ ermittelt werden. Für den Flüssigkeitsanteil ergibt sich

$$\delta^{kg}\Pi_{lin} = \delta^{kg}\Pi_t + \delta^{kg}\Pi^{\Delta p} + \delta^{kg}\Pi^{\Delta n} \quad (4.25)$$

$$= \int_{\eta} \int_{\xi} ({}^{kg} p_t {}^* \mathbf{n}_t + \Delta {}^{kg} p_t {}^* \mathbf{n}_t + {}^{kg} p_t \Delta {}^* \mathbf{n}_t) \cdot \delta \mathbf{u} \, d\xi d\eta. \quad (4.26)$$

Die linearisierte Funktionaldarstellung läßt sich in einen Druckanteil $\delta^{kg}\Pi^{\Delta p}$ und einen Folgelastanteil $\delta^{kg}\Pi^{\Delta n}$ aufspalten. Die für den Druckanteil maßgebliche Änderung im Druckniveau ergibt sich als Folge von Gleichung (4.22) über eine Summe von drei Druckanteilen:

$$\Delta^{kg}p = \Delta^c p - \Delta^x p - \Delta^k p. \quad (4.27)$$

Für die Änderung der Arbeitsdrücke und des Kompressionsdrucks folgt mit den Gleichungen (4.20) und (4.21)

$$\Delta^c p = \Delta \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{c}_t + \rho_t \mathbf{g} \cdot \Delta \mathbf{c}, \quad (4.28)$$

$$\Delta^x p = \Delta \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{x}_t + \rho_t \mathbf{g} \cdot \Delta \mathbf{u}, \quad (4.29)$$

$$\Delta^k p = -\frac{K}{V} \Delta v. \quad (4.30)$$

Die Dichteänderung $\Delta \rho$ ist durch die linearisierte Massenerhaltung (4.9) und die Lageänderung des beschleunigten Schwerpunktes $\mathbf{g} \cdot \Delta \mathbf{c}$ durch die Linearisierung der Schwerpunktformel (4.15) gegeben:

$$\Delta \rho = -\frac{\rho_t}{v_t} \Delta v, \quad (4.31)$$

$$\mathbf{g} \cdot \Delta \mathbf{c} = \frac{1}{v_t} (\mathbf{g} \cdot \Delta \mathbf{s} - \mathbf{g} \cdot \mathbf{c}_t \Delta v). \quad (4.32)$$

Diese Formulierung erlaubt die Änderung des Druckniveaus ausschließlich über die Änderung von Form und Volumen der Flüssigkeit auszudrücken. Die Form und das Volumen der Flüssigkeit sind über die Oberflächenintegrale (2.15) bzw. (3.6) gegeben, was zu einer elementfreien Darstellung der Flüssigkeit in einer Finite-Element-Analyse führt. Die linearisierten Ausdrücke ergeben sich gemäß den Ausführungen in Kapitel 2 und 3 aus den Gleichungen (4.12) und (3.18). Aus der anfallenden Produktintegration folgt das korrespondierende Randwertproblem. Für geschlossene Strukturen entfällt das Randintegral aus Gleichung (3.18) gänzlich. Der Beschleunigungsanteil des linearisierten Volumenmomentes verkürzt sich damit auf

$$\mathbf{g} \cdot \Delta \mathbf{s} = \int_{\eta} \int_{\xi} \mathbf{g} \cdot \mathbf{x} \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\xi d\eta. \quad (4.33)$$

Die Substitution der Gleichungen (4.31) - (4.33) in die linearisierten Arbeitsdrücke (4.28) und (4.29) sowie in den linearisierten Kompressionsdruck (4.30) liefert

$$\Delta^c p = -2 \frac{c p_t}{v_t} \int_{\eta} \int_{\xi} \mathbf{n}_t \cdot \Delta \mathbf{u} d\xi d\eta + \int_{\eta} \int_{\xi} \frac{x p_t}{v_t} \mathbf{n}_t \cdot \Delta \mathbf{u} d\xi d\eta, \quad (4.34)$$

$$\Delta^x p = -\frac{x p_t}{v_t} \int_{\eta} \int_{\xi} \mathbf{n}_t \cdot \Delta \mathbf{u} d\xi d\eta + \rho_t \mathbf{g} \cdot \Delta \mathbf{u}, \quad (4.35)$$

$$\Delta^k p = -\frac{K}{V} \int_{\eta} \int_{\xi} \mathbf{n}_t \cdot \Delta \mathbf{u} d\xi d\eta. \quad (4.36)$$

Die Änderung des Druckniveaus $\Delta^{kg}p = \Delta^c p - \Delta^x p - \Delta^k p$ ist somit fast vollständig über Oberflächenintegrale gegeben. Die Linearisierung der ungleichförmigen Folgelast $\delta^{kg}\Pi^{\Delta n}$ kann direkt aus Kapitel 3 übernommen werden. Nach Anpassung an die Randbedingungen folgt für den ungleichförmigen Folgelastanteil entsprechend Gleichung (3.49)

$$\begin{aligned} \delta^{kg}\Pi^{\Delta n} &= -\frac{\rho_t}{2} \int_{\eta} \int_{\xi} \delta \mathbf{u} \cdot (*\mathbf{n}_t \otimes \mathbf{g} + \mathbf{g} \otimes *\mathbf{n}_t) \Delta \mathbf{u} \, d\xi d\eta \\ &+ \int_{\eta} \int_{\xi} \frac{kg p_t}{2} \begin{pmatrix} \delta \mathbf{u} \\ \delta \mathbf{u}_{,\xi} \\ \delta \mathbf{u}_{,\eta} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \underline{\mathbf{W}}^{\xi} & \underline{\mathbf{W}}^{\eta} \\ \underline{\mathbf{W}}^{\xi T} & 0 & 0 \\ \underline{\mathbf{W}}^{\eta T} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{u} \\ \Delta \mathbf{u}_{,\xi} \\ \Delta \mathbf{u}_{,\eta} \end{pmatrix} \, d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Für die weiteren Umformungen ist folgendes festzuhalten:

- Das durch die partielle Integration des Folgelastanteils entstehende Randintegral in Gleichung (3.30) entfällt vollständig bei einer geschlossenen Struktur.
- Die in den Kapiteln 2 und 3 diskutierte Berechnungsvariante, eventuelle Starrkörpergebiete über eine projizierte Darstellung einzubinden, ist auf kompressible schwere Flüssigkeiten nicht anwendbar. Die Schwerpunktsbestimmung gemäß der Gleichung (3.6) setzt eine vollständig geschlossene Struktur voraus.

Der linearisierte Flüssigkeitsanteil $\delta^{kg}\Pi_{lin}$ verkürzt sich nach Anpassung an physikalisch sinnvolle Randbedingungen auf

$$\begin{aligned} \delta^{kg}\Pi_{lin} &= \delta^{kg}\Pi_t \\ &+ \left(\frac{K}{V} - 2\frac{c p_t}{v_t}\right) \int_{\eta} \int_{\xi} \delta \mathbf{u} \cdot *\mathbf{n}_t \, d\xi d\eta \int_{\eta} \int_{\xi} *\mathbf{n}_t \cdot \Delta \mathbf{u} \, d\xi d\eta \quad \text{Term I} \\ &+ \int_{\eta} \int_{\xi} \frac{x p_t}{v_t} \delta \mathbf{u} \cdot *\mathbf{n}_t \, d\xi d\eta \int_{\eta} \int_{\xi} *\mathbf{n}_t \cdot \Delta \mathbf{u} \, d\xi d\eta \\ &+ \int_{\eta} \int_{\xi} \delta \mathbf{u} \cdot *\mathbf{n}_t \, d\xi d\eta \int_{\eta} \int_{\xi} \frac{x p_t}{v_t} *\mathbf{n}_t \cdot \Delta \mathbf{u} \, d\xi d\eta \quad \text{Term II} \\ &- \frac{\rho_t}{2} \int_{\eta} \int_{\xi} \delta \mathbf{u} \cdot (*\mathbf{n}_t \otimes \mathbf{g} + \mathbf{g} \otimes *\mathbf{n}_t) \Delta \mathbf{u} \, d\xi d\eta \quad \text{Term III} \\ &+ \int_{\eta} \int_{\xi} \frac{kg p_t}{2} \begin{pmatrix} \delta \mathbf{u} \\ \delta \mathbf{u}_{,\xi} \\ \delta \mathbf{u}_{,\eta} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \underline{\mathbf{W}}^{\xi} & \underline{\mathbf{W}}^{\eta} \\ \underline{\mathbf{W}}^{\xi T} & 0 & 0 \\ \underline{\mathbf{W}}^{\eta T} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{u} \\ \Delta \mathbf{u}_{,\xi} \\ \Delta \mathbf{u}_{,\eta} \end{pmatrix} \, d\xi d\eta. \end{aligned} \quad \text{Term IV} \quad (4.38)$$

Wie erwartet zeigt sich bei Berücksichtigung der Randbedingungen ein symmetrischer Aufbau. Term I stellt die Volumenabhängigkeit des Kompressionsdrucks $^k p$ und des Volumenschwerpunktes \mathbf{c} dar. Term II gibt die Abhängigkeit

des lokalen Arbeitsdrucks ${}^x p$ von der lokalen Strukturverschiebung $\Delta \mathbf{u}$ und der Änderung des Volumenschwerpunktes $\Delta \mathbf{c}$ wieder. Der Folgelastanteil in Term IV wird für nichtgleichförmige Folgelasten, d.h. hier dem hydrostatischen Anteil, durch Term III ergänzt.

4.3 Hybride Formulierung

Das auf virtuelle und reale Strukturverschiebungen zurückgeführte linearisierte Variationsproblem der Flüssigkeitslast kann für eine Analyse der Feldgleichung in Anlehnung an Kapitel 2.4 und Kapitel 3.4 in hybrider Schreibweise formuliert werden. Als zusätzliche Unbekannte neben der Strukturverschiebung $\Delta \mathbf{u}$ wurden die Änderung des Kompressionsdrucks $\Delta^k p$, die Änderung des Arbeitsdrucks $\Delta^c p$ im Volumenschwerpunkt \mathbf{c} und die dimensionslose Dichteänderung $\frac{\Delta \rho}{\rho_t}$ eingeführt. Das linearisierte Variationsproblem der Flüssigkeit hat in hybrider Form folgenden Aufbau:

$$\begin{aligned}
\delta^{kg} \Pi_{lin} &= \delta^{kg} \Pi_t \\
&- \Delta^k p \int_{\eta} \int_{\xi} {}^* \mathbf{n}_t \cdot \delta \mathbf{u} \, d\xi d\eta \\
&+ \Delta^c p \int_{\eta} \int_{\xi} {}^* \mathbf{n}_t \cdot \delta \mathbf{u} \, d\xi d\eta \\
&+ \frac{\Delta \rho}{\rho_t} \int_{\eta} \int_{\xi} \frac{{}^x p_t}{v_t} {}^* \mathbf{n}_t \cdot \delta \mathbf{u} \, d\xi d\eta \\
&- \frac{\rho_t}{2} \int_{\eta} \int_{\xi} \delta \mathbf{u} \cdot ({}^* \mathbf{n}_t \otimes \mathbf{g} + \mathbf{g} \otimes {}^* \mathbf{n}_t) \Delta \mathbf{u} \, d\xi d\eta \\
&+ \int_{\eta} \int_{\xi} \frac{{}^{kg} p_t}{2} \begin{pmatrix} \delta \mathbf{u} \\ \delta \mathbf{u}_{,\xi} \\ \delta \mathbf{u}_{,\eta} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \underline{\mathbf{W}}^{\xi} & \underline{\mathbf{W}}^{\eta} \\ \underline{\mathbf{W}}^{\xi T} & 0 & 0 \\ \underline{\mathbf{W}}^{\eta T} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{u} \\ \Delta \mathbf{u}_{,\xi} \\ \Delta \mathbf{u}_{,\eta} \end{pmatrix} \, d\xi d\eta.
\end{aligned} \tag{4.39}$$

Bei der hybriden Darstellung ergeben sich folgende, für ein Newton-Verfahren ebenfalls linearisierte Nebenbedingungen, zur vollständigen Beschreibung der kompressiblen schweren Flüssigkeit:

$$\frac{V}{K} \Delta^k p + \int_{\eta} \int_{\xi} {}^* \mathbf{n}_t \cdot \Delta \mathbf{u} \, d\xi d\eta = 0, \tag{4.40}$$

$$v_t \Delta^c p - 2 \frac{{}^c p_t v_t}{\rho_t} - \int_{\eta} \int_{\xi} \frac{{}^x p_t}{v_t} {}^* \mathbf{n}_t \cdot \Delta \mathbf{u} \, d\xi d\eta = 0, \tag{4.41}$$

$$v_t \frac{\Delta \rho}{\rho_t} + \int_{\eta} \int_{\xi} {}^* \mathbf{n}_t \cdot \Delta \mathbf{u} \, d\xi d\eta = 0. \tag{4.42}$$

Gleichung (4.40) stellt das linearisierte Hookesche Gesetz zur Beschreibung der Kompressibilität der Flüssigkeit über ein Oberflächenintegral dar. Die Druckänderung im Schwerpunkt $\Delta^c p$ ist durch die Dichteänderung und die Struktur-

verschiebung in Gleichung (4.41) beschrieben. Gleichung (4.42) gibt die Dichteänderung der Flüssigkeit durch die Strukturverschiebung $\Delta \mathbf{u}$ unter Berücksichtigung der Massenerhaltung wieder.

4.4 Diskretisierung

Die Wechselwirkung der kompressiblen schweren Flüssigkeit mit der Struktur ist vollständig über die Variation des Gesamtpotentials

$$\delta \Pi = \delta^{el} V + \delta^{kg} \Pi - \delta^{ex} W = 0 \quad (4.43)$$

erklärt. D.h. über das Prinzip der virtuellen Arbeit läßt sich die nichtlineare Gleichgewichtsbedingung der Flüssigkeit-Struktur-Kopplung bestimmen. Die Flüssigkeit geht über die Variation des Schwerepotentials einer kompressiblen Flüssigkeit und die Variation der Volumenänderungsarbeit der resultierenden Kompressionsdruckkraft in die Variation des Gesamtpotentials ein. $\delta^{el} V$ beschreibt das Funktional der deformierbaren, umgebenden Struktur; $\delta^{ex} W$ die virtuelle Arbeit der potentiallosen Kräfte. Das nichtlineare Variationsproblem (4.43) wird mittels Newtonverfahren iterativ gelöst. Hierzu ist die Gleichgewichtsbedingung über eine mehrdimensionale Taylorreihe in stückweise stetige Anteile mit Abbruch nach dem linearen Term aufzulösen. Mit den entwickelten Gleichungen und einer anschließenden Diskretisierung mit einem isoparametrischen Ansatz (2.55) ergibt sich das algebraische Gleichungssystem

$$({}^{el}V_{,xx} + {}^{kg}\Pi_{,xx}) \mathbf{d} = -({}^{el}V_{,x} + {}^{kg}\Pi_{,x} - {}^{ex}W_{,x}). \quad (4.44)$$

Für ein Einkammersystem läßt sich die globale Steifigkeitsmatrix aus den linearisierten Anteilen ${}^{el}V_{,xx}$ der deformierbaren Struktur und dem linearisierten Anteil der Flüssigkeitsbelastung ${}^{kg}\Pi_{,xx}$ bestimmen. Das Residuum des Gleichungssystems setzt sich aus inneren Strukturkräften ${}^{el}V_{,x}$, Wechselwirkungskräften zwischen Struktur und Flüssigkeit ${}^{kg}\Pi_{,x}$ und externen richtungstreuen Kräften ${}^{ex}W_{,x}$ zusammen. Wird die hybride Beschreibung mit den zusätzlichen Unbekannten: Änderung des Kompressionsdrucks $\Delta^k p$, Änderung des Arbeitsdrucks im Volumenschwerpunkt $\Delta^c p$ und der dimensionslosen Dichteänderung $\frac{\Delta \rho}{\rho}$ neben den Knotenverschiebungen \mathbf{d} gewählt, so zeigt sich wie auch in den Kapiteln 2 und 3 ein symmetrischer Aufbau

$$\begin{pmatrix} {}^{el,kg}\mathbf{K} & -\mathbf{a} & -\mathbf{b} & \mathbf{a} \\ -\mathbf{a}^T & -\frac{V}{K} & 0 & 0 \\ -\mathbf{b}^T & 0 & -2 {}^c p v & v \\ \mathbf{a}^T & 0 & v & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{d} \\ \Delta^k p \\ \frac{\Delta \rho}{\rho} \\ \Delta^c p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^{kg}\mathbf{F} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.45)$$

des hybriden Gleichungssystems, siehe auch Gleichungen (4.39) - (4.42). Die Teilsteifigkeitsmatrix ${}^{el,kg}\mathbf{K}$ setzt sich aus der Struktursteifigkeitsmatrix ${}^{el}\mathbf{K}$

und der Teillaststeifigkeitsmatrix ${}^{kg}\mathbf{K}$ der im allgemeinen nicht gleichförmigen Folgelast der Flüssigkeit zusammen; der Lastvektor ist additiv aus inneren Kräften ${}^{el}\mathbf{f}$, externen Kräften ${}^{ex}\mathbf{f}$ und Wechselwirkungskräften ${}^{kg}\mathbf{f}$ aufgebaut:

$${}^{el,kg}\mathbf{K} = {}^{el}\mathbf{K} + {}^{kg}\mathbf{K}, \quad (4.46)$$

$${}^{kg}\mathbf{F} = {}^{ex}\mathbf{f} - {}^{kg}\mathbf{f} - {}^{el}\mathbf{f}. \quad (4.47)$$

Nach Kondensation auf Verschiebungsform zeigt sich in der Folge der linearisierten Zusatzgleichungen (4.40) - (4.42) eine symmetrische dyadische Erweiterung der Teillaststeifigkeitsmatrix ${}^{el,kg}\mathbf{K}$ vom Rang drei:

$$[{}^{el,kg}\mathbf{K} + {}^{kg}\alpha\mathbf{a}\mathbf{a}^T + \mathbf{b}\mathbf{a}^T + \mathbf{a}\mathbf{b}^T]\mathbf{d} = {}^{kg}\mathbf{F}. \quad (4.48)$$

Neben dem Vektor \mathbf{a} ist ein weiterer Kopplungsvektor \mathbf{b} aufzubauen. Die einzelnen Anteile unterscheiden sich gegenüber den Ausführungen in den Kapiteln 2 und 3 durch skalare Vorfaktoren. Die Einträge für Steifigkeitsmatrix und Lastvektor berechnen sich zu

$$\begin{aligned} {}^{kg}\mathbf{K} &= -\frac{\rho_t}{2} \sum_e \int_{\eta} \int_{\xi} \mathbf{N}^T (*\mathbf{n}\mathbf{g}^T + \mathbf{g} * \mathbf{n}^T) \mathbf{N} \, d\xi d\eta \\ &+ \frac{1}{2} \sum_e \int_{\eta} \int_{\xi} {}^{kg}p_t \begin{pmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{N}_{,\xi} \\ \mathbf{N}_{,\eta} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{W}^{\xi} & \mathbf{W}^{\eta} \\ \mathbf{W}^{\xi T} & 0 & 0 \\ \mathbf{W}^{\eta T} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{N}_{,\xi} \\ \mathbf{N}_{,\eta} \end{pmatrix} d\xi d\eta, \end{aligned} \quad (4.49)$$

$$\mathbf{a} = \sum_e \int_{\eta} \int_{\xi} \mathbf{N}^T * \mathbf{n}_t \, d\xi d\eta, \quad (4.50)$$

$$\mathbf{b} = \sum_e \int_{\eta} \int_{\xi} x p_t \mathbf{N}^T * \mathbf{n}_t \, d\xi d\eta, \quad (4.51)$$

$${}^{kg}\mathbf{f} = \sum_e \int_{\eta} \int_{\xi} {}^{kg}p_t \mathbf{N}^T * \mathbf{n}_t \, d\xi d\eta, \quad (4.52)$$

$${}^{kg}\alpha = \frac{K}{V} - 2 \frac{c p_t}{v_t}, \quad (4.53)$$

$${}^{kg}p_t = c p - x p - k p. \quad (4.54)$$

Der wesentliche Unterschied zu den Matrizen in den Fällen kompressibler schwerer Fluiden und der inkompressiblen Hydrostatik ist die dyadische Erweiterung vom Rang drei. In den Kapiteln 2 und 3 wird die physikalische Eigenschaft des Fluids durch eine zusätzliche Gleichung beschrieben. Im kompressiblen Fall wird das Fluid über das Hookesche Gesetz bzw. die thermische Zustandsgleichung beschrieben. Die Volumenerhaltung ist hingegen für die inkompressible Flüssigkeit die zusätzlich geforderte Nebenbedingung. Diese Nebenbedingungen führen zu jeweils einer symmetrischen, dyadischen Erweiterung des algebraischen Gleichungssystems. Die Darstellung einer kompressiblen schweren Flüssigkeit gelingt mit drei Nebenbedingungen, dem Hookeschen Gesetz, der Massenerhaltung der Flüssigkeit und der Tatsache, daß die Gewichtskraft der Flüssigkeit

im Schwerpunkt angreift. Diese Nebenbedingungen führen demzufolge zu einer symmetrischen, dyadischen Erweiterung des Gleichungssystems vom Rang drei.

4.5 Lösungsalgorithmus

Die wiederholte Anwendung der Sherman-Morrison-Formel, siehe Gleichung (2.64) - (2.74) führt, wie in Kapitel 2 bereits gezeigt, auf ein explizites Lösungsschema zur Berechnung der resultierenden Verschiebungen:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{d} &= {}^1\mathbf{d} - {}^1\beta {}^2\mathbf{d}^T {}^{kg}\mathbf{F} {}^3\mathbf{d}, \\
 {}^1\mathbf{d} &= {}^4\mathbf{d} - {}^2\beta {}^6\mathbf{d}^T {}^{kg}\mathbf{F} {}^5\mathbf{d}, \\
 {}^2\mathbf{d} &= {}^5\mathbf{d} - {}^2\beta {}^6\mathbf{d}^T \mathbf{a} {}^5\mathbf{d}, \\
 {}^3\mathbf{d} &= {}^6\mathbf{d} - {}^2\beta {}^6\mathbf{d}^T \mathbf{b} {}^5\mathbf{d}, \\
 {}^4\mathbf{d} &= {}^7\mathbf{d} - {}^3\beta {}^8\mathbf{d}^T {}^{kg}\mathbf{F} {}^8\mathbf{d}, \\
 {}^5\mathbf{d} &= {}^8\mathbf{d} - {}^3\beta {}^8\mathbf{d}^T \mathbf{a} {}^8\mathbf{d}, \\
 {}^6\mathbf{d} &= {}^9\mathbf{d} - {}^3\beta {}^8\mathbf{d}^T \mathbf{b} {}^8\mathbf{d}.
 \end{aligned} \tag{4.55}$$

Die skalaren Faktoren sind

$$\begin{aligned}
 {}^1\beta &= \frac{1}{1 + \mathbf{b}^T {}^2\mathbf{d}}, \\
 {}^2\beta &= \frac{1}{1 + \mathbf{a}^T {}^6\mathbf{d}}, \\
 {}^3\beta &= \frac{{}^{kg}\alpha}{1 + {}^{kg}\alpha \mathbf{a}^T {}^8\mathbf{d}}.
 \end{aligned} \tag{4.56}$$

Für jeden Iterationsschritt innerhalb eines Lastschrittes ist das Gleichungssystem mit drei verschiedenen rechten Seiten, dem Lastvektor ${}^{kg}\mathbf{F}$, sowie den beiden Rangvektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} zu lösen:

$$\begin{aligned}
 {}^7\mathbf{d} &= {}^{el,kg}\mathbf{K}^{-1} {}^{kg}\mathbf{F}, \\
 {}^8\mathbf{d} &= {}^{el,kg}\mathbf{K}^{-1} \mathbf{a}, \\
 {}^9\mathbf{d} &= {}^{el,kg}\mathbf{K}^{-1} \mathbf{b}.
 \end{aligned} \tag{4.57}$$

Bei einer Erweiterung auf n mit Flüssigkeit gefüllten Kammern ist in jedem Iterationsschritt das Gleichungssystem mit dem Lastvektor ${}^{kg}\mathbf{F}$ und mit den n Rangvektoren \mathbf{a}_i und \mathbf{b}_i zu lösen.

Numerische Stabilität

Haben in der praktischen Anwendung der Elastizitätsmodul und der Kompressionsmodul die gleiche Größenordnung, ist wegen der hohen „Steifigkeit“ der kompressiblen Flüssigkeit mit numerischen Problemen, d.h. Konvergenzproblemen zu rechnen. Eine Kopplung von Kompressionsmodul und externer Laststeuerung verbessert das Konvergenzverhalten deutlich.

4.6 Bogenlängenverfahren

Die Integration des Bogenlängenverfahrens für die Bestimmung von kritischen Belastungen ist für eine direkte Kraftregelung möglich. Eine Implementierung der indirekten Verschiebungsregelung ist hingegen problematisch. Für die indirekte Verschiebungsregelung sind drei gekoppelte Nebenbedingungen auf eine Regelungsgleichung abzustimmen. Daher wird dieser Ansatz in der vorliegenden Arbeit nicht weiter verfolgt.

4.6.1 Kraftregelung

Für die direkte Kraftregelung wird das Variationsproblem (4.19) um die geregelte virtuelle Arbeit $\delta^{\lambda f} W$ einer raumfesten externen Kraft erweitert, siehe auch Gleichung (3.66):

$$\delta \Pi = \delta^{el} V + \delta^{kg} \Pi - \delta^{\lambda f} W. \quad (4.58)$$

Zusammen mit dem Funktional der deformierbaren Struktur wird über das Prinzip der virtuellen Arbeit die nichtlineare Gleichgewichtsbedingung vervollständigt. Nach anschließender Linearisierung und Diskretisierung läßt sich folgendes Gleichungssystem aufbauen:

$$[{}^{el,kg} \mathbf{K} + {}^{kg} \alpha \mathbf{a} \mathbf{a}^T + \mathbf{b} \mathbf{a}^T + \mathbf{a} \mathbf{b}^T + \frac{1}{\gamma} {}^{ex} \mathbf{f} \mathbf{z}^T] \mathbf{d} = \lambda {}^{kg} \mathbf{F} - \frac{\Xi}{\gamma} {}^{ex} \mathbf{f}. \quad (4.59)$$

Die Teilsteifigkeitsmatrix ${}^{el,kg} \mathbf{K}$ wird durch vier dyadische Erweiterungen vom Rang eins zur Gesamtsteifigkeitsmatrix vervollständigt. Die ersten drei Erweiterungen repräsentieren die Flüssigkeit-Struktur-Kopplung, siehe in Gleichung (4.38) die Terme I und II; die vierte Erweiterung gibt die linearisierten Anteile der Regelungsgleichung wieder, siehe Gleichungen (2.87) und (2.93). Der aus einem geregelten Anteil $\lambda {}^{kg} \mathbf{F}$ bestehende Lastvektor wird durch einen Korrekturanteil $-\frac{\Xi}{\gamma} {}^{ex} \mathbf{f}$ ergänzt. Der Aufbau des geregelten Lastvektors ist analog zu Gleichung (2.96) und (3.68):

$$\lambda {}^{kg} \mathbf{F} = \lambda {}^{ex} \mathbf{f} - {}^{kg} \mathbf{f} - {}^{el} \mathbf{f}. \quad (4.60)$$

Wie in Kapitel 2 und 3 wird die vollständige Kopplung der Freiheitsgrade mit Hilfe der Sherman-Morrison-Formel aufgelöst.

Lösungsalgorithmus

In der Folge der Linearisierung der Regelungsgleichung ergeben sich zusätzliche Anteile auf die Gesamtsteifigkeitsmatrix des unregulierten Falls, siehe Gleichung (4.48). Der in Kapitel 4.5 vorgestellte Lösungsalgorithmus kann durch Substitution auf den geregelten Fall erweitert werden. Mit der unregulierten Steifigkeitsmatrix

$$*\mathbf{K} = {}^{el,kg} \mathbf{K} + {}^{kg} \alpha \mathbf{a} \mathbf{a}^T + \mathbf{b} \mathbf{a}^T + \mathbf{a} \mathbf{b}^T \quad (4.61)$$

ergibt sich der Lösungsalgorithmus für eine direkte Regelung zu

$$\mathbf{d} = \Delta\lambda \mathbf{d}^1 + \mathbf{d}^2, \quad (4.62)$$

$$\Delta\lambda = -\frac{\Xi + \mathbf{z}^T \mathbf{d}^2}{\gamma + \mathbf{z}^T \mathbf{d}^1}, \quad (4.63)$$

$$\mathbf{d}^1 = {}^* \mathbf{K}^{-1} \text{ex} \mathbf{f}, \quad (4.64)$$

$$\mathbf{d}^2 = {}^* \mathbf{K}^{-1} \lambda^{kg} \mathbf{F}. \quad (4.65)$$

Die hierfür benötigten Zwischenlösungen \mathbf{d}^1 und \mathbf{d}^2 sind durch einfache Substitution der Lastvektoren gemäß Gleichung (4.55) bis (4.57) gegeben.

4.7 Stabilität

Die Berücksichtigung von drei Nebenbedingungen in einem Gleichungssystem und die daraus resultierende dyadische Erweiterung beeinflusst das Stabilitätsverhalten des gekoppelten Fluid-Struktur-Problems erheblich.

4.7.1 Determinante

Die Determinantenänderung ergibt sich entsprechend den Gleichungen (2.140) und (2.73) zu

$$\begin{aligned} \det \left({}^{el,kg} \mathbf{K} + {}^{kg} \alpha \mathbf{a} \mathbf{a}^T + \mathbf{b} \mathbf{a}^T + \mathbf{a} \mathbf{b}^T \right) = \\ \left[1 + {}^{kg} \alpha \mathbf{a}^T {}^{el,kg} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{a} + \mathbf{a}^T {}^{el,kg} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{b} + \mathbf{b}^T {}^{el,kg} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{a} \right] \det {}^{el,kg} \mathbf{K}. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Die Produktdarstellung der modifizierten Determinanten zeigt deutlich den Einfluß der Kopplung infolge der dyadischen Erweiterung des Gleichungssystems und damit die stabilisierende Wirkung des Fluids auf das gekoppelte System.

4.7.2 Eigenwert

Anschließend an die Ausführungen im Kapitel 2.8.2 ergibt sich nach einfacher dyadischer Erweiterung vom Typ

$$\left({}^{el,k} \mathbf{K} + {}^k \alpha \mathbf{a} \mathbf{a}^T - \bar{\varphi} \mathbf{I} \right) \bar{\mathbf{d}} = \mathbf{0} \quad (4.67)$$

eine modifizierte Modalmatrix $\bar{\mathbf{R}} = (\bar{\mathbf{d}}_1, \bar{\mathbf{d}}_2, \dots, \bar{\mathbf{d}}_n)$. Nach der Normierung (2.155) folgt für die entsprechende Spektralmatrix

$$\bar{\mathbf{\Lambda}} = \bar{\mathbf{R}}^T \left({}^{el,k} \mathbf{K} + {}^k \alpha \mathbf{a} \mathbf{a}^T \right) \bar{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} \bar{\varphi}_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \bar{\varphi}_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\varphi}_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \bar{\varphi}_n \end{pmatrix}. \quad (4.68)$$

Darauf aufbauend ist die Bestimmung einer weiteren Eigenwertverschiebung infolge der zweifachen symmetrischen dyadischen Erweiterung vom Typ $\mathbf{ba}^T + \mathbf{ab}^T$ möglich. Das entsprechende Eigenwertproblem

$$({}^{el,k}\mathbf{K} + {}^k\alpha\mathbf{aa}^T + \mathbf{ba}^T + \mathbf{ab}^T - \varphi^*\mathbf{I})\mathbf{d}^* = \mathbf{0}. \quad (4.69)$$

ist mit den Ergebnissen aus Kapitel 2.8.2 über eine modalen Entwicklung gemäß

$$\mathbf{d}^* = \bar{\mathbf{R}}\mathbf{r}^* \quad (4.70)$$

zu lösen. Nach Multiplikation mit $\bar{\mathbf{R}}^T$ folgt

$$[\bar{\mathbf{R}}^T({}^{el,k}\mathbf{K} + {}^k\alpha\mathbf{aa}^T)\bar{\mathbf{R}} + \bar{\mathbf{R}}^T(\mathbf{ba}^T + \mathbf{ab}^T)\bar{\mathbf{R}} - \varphi^*\bar{\mathbf{R}}^T\mathbf{I}\bar{\mathbf{R}}]\mathbf{r}^* = \mathbf{0} \quad (4.71)$$

$$(\bar{\Lambda} + \mathbf{uv}^T + \mathbf{vu}^T - \varphi^*\mathbf{I})\mathbf{r}^* = \mathbf{0} \quad (4.72)$$

mit $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{R}}^T\mathbf{b}$ und $\mathbf{v} = \bar{\mathbf{R}}^T\mathbf{a}$ als modifizierte Rangvektoren. Auch hier kann eine beliebige Gleichung i des Systems (4.72) in folgende Form gebracht werden

$$(\bar{\varphi}_i - \varphi^*)\frac{r_i^*}{u_i v_i} + \sum_{k=1}^n u_k v_k r_k^* = 0. \quad (4.73)$$

Entsprechend den Umformungen von Gleichung (2.147) bis Gleichung (2.150) folgt analog die Eigenwertgleichung für kompressible Fluide im Schwerfeld zu

$$\sum_{k=1}^n \frac{(u_k v_k)^2}{\bar{\varphi}_k - \varphi^*} + 1 = 0. \quad (4.74)$$

Hieraus lassen sich mit Hilfe eines gängigen numerischen Verfahrens, z.B. mit Bisektion, die modifizierten Eigenwerte φ^* und Eigenvektoren \mathbf{d}^* berechnen. Für die Anordnung der modifizierten Eigenwerte gilt entsprechend [Wei68]

$$\bar{\varphi}_1 \leq \varphi_1^* \leq \bar{\varphi}_2 \leq \varphi_2^* \dots \leq \bar{\varphi}_n \leq \varphi_n^*. \quad (4.75)$$

Die Abfolge der Eigenwerte zeigt klar den stabilisierenden Einfluß der Rangvektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} auf das Stabilitätsverhalten des gekoppelten Systems.

4.8 Zusammenfassung

Auch für kompressible schwere Flüssigkeiten in geschlossenen Kammern läßt sich der Einfluß der Flüssigkeit auf die Struktur mit der Synthese von Kompressibilität und Gewichtseinfluß durch Oberflächenintegrale elementfrei darstellen. Damit muß der Kontakt zwischen Struktur und Fluid nicht gesondert modelliert werden. Die Kopplung von Kompression und Eigengewicht führt auf eine dyadische Erweiterung vom Rang drei der globalen Steifigkeitsmatrix, die mit Hilfe der Sherman-Morrison-Formel bei der Lösung effizient genutzt werden kann. Die Bestimmung von externen kritischen Belastungen / Stabilitätspunkten und sogenannten postkritischen Verformungen gelingt mit einem modifizierten Bogenlängenverfahren. Der stabilisierende Einfluß der Fluidfüllung kann mittels Determinantenkriterium oder Modalanalyse analytisch interpretiert werden.

Kapitel 5

Numerische Beispiele

Die nachfolgenden Beispiele zeigen die Breite des vorgestellten Ansatzes zur Beschreibung von verschiedenen Fluid-Struktur-Problemen bei großen Deformationen. Nach Beispielen zur Pneumatik werden Fragestellungen in der Hydrostatik angesprochen. Anschließend wird kurz auf die Hydraulik deformierbarer Strukturen im Schwerfeld eingegangen. Stabilitätsuntersuchungen von Fluid-Struktur-Kopplungen sind an das Ende des Kapitels gestellt.

5.1 Pneumatik

Die Notwendigkeit, daß Druckniveau und Druckrichtung im Verlauf der Verformung anzupassen sind, um die Fluid-Struktur-Kopplung korrekt zu erfassen, soll in den nachfolgenden Beispielen aufgezeigt werden.

5.1.1 Extraktion einer pneumatischen Struktur

Die elementfreie Darstellung von Fluid und starren Strukturbereichen ermöglicht die Simulation von sehr großen Strukturverschiebungen ohne aufwendige Kontaktmodelle zwischen Fluid und Struktur sowie Netzadaptionen im Fluidgebiet. Ein deformierbarer Zylinder mit einer gefalteten Außenwand (Materialgesetz: St.-Venant Kirchhoff, Elastizitätsmodul $E = 2.5 \cdot 10^5 \frac{N}{cm^2}$, Querkontraktionszahl $\nu = 0.3$, Wandstärke $t = 0.05 \text{ cm}$) ist an einen starren Zylinder angeflanscht. Der deformierbare Teilbereich wird über 1147 Solid Shell Elemente modelliert. Der starre Teilbereich kann elementfrei über eine projizierte Volumenberechnung eingebettet werden. Über einen konsistenten Kolbenvorschub von $u_{ext} = 74.5 \text{ cm}$ (50 Lastschritte) im starren Teilkörper (Länge $b = 75 \text{ cm}$) wird im Inneren der Struktur ein Kompressionsdruck aufgebaut, siehe Abbildung 5.1.

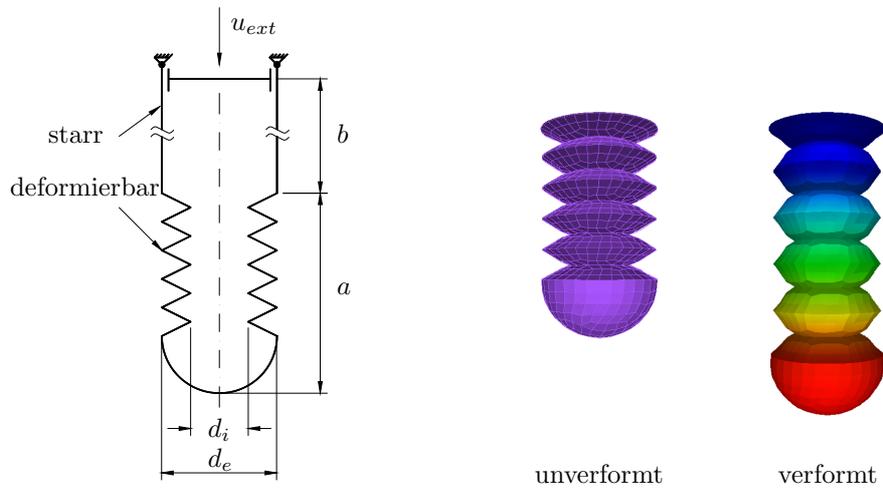


Abbildung 5.1: Extraktion einer pneumatischen Struktur; geometrische Daten: $a = 15 \text{ cm}$, $b = 75 \text{ cm}$, $d_i = 5 \text{ cm}$, $d_e = 10 \text{ cm}$, $u_{ext} = 74.5 \text{ cm}$; unverformte Struktur und verformter Endzustand

Infolge des Kolbenvorschubs steigt der Überdruck in der Struktur von anfangs 1 bar auf 11 bar an, gleichzeitig verringert sich das Volumen von $6.5 \cdot 10^3$ auf $1.1 \cdot 10^3 \text{ cm}^3$, siehe Abbildung 5.2. Die sich hierbei einstellende Gastemperatur kann ebenfalls über die adiabatische Zustandsgleichung

$$T v^{\kappa-1} = \text{const.} \quad (5.1)$$

berechnet werden und steigt in einer isolierten Struktur von 10°C auf 290°C an.

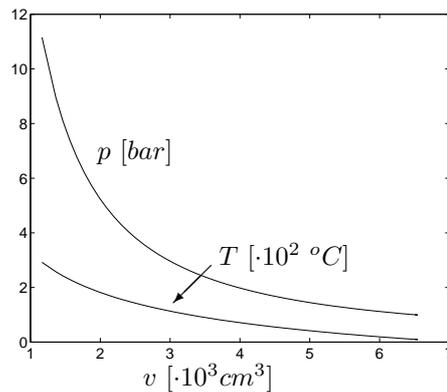


Abbildung 5.2: Extraktion einer pneumatischen Struktur; Überdruck p in der Struktur und Gastemperatur T über Gasvolumen v

Aus der quadratischen Konvergenz aller Lastschritte ist ersichtlich, daß die entwickelten Modellgleichungen korrekt im Programm [SM91] integriert sind, siehe beispielhaft das Konvergenzverhalten im letzten Lastschritt $u_{ext} = 74.5 \text{ cm}$ in der Tabelle 5.1.

Iterationsschritt	1	2	3	4
Energie	$4.73 \cdot 10^{+2}$	$5.42 \cdot 10^{-2}$	3.37	$3.02 \cdot 10^{-1}$
Iterationsschritt	5	6	7	8
Energie	$4.83 \cdot 10^{-4}$	$2.12 \cdot 10^{-6}$	$3.39 \cdot 10^{-10}$	$1.53 \cdot 10^{-14}$

Tabelle 5.1: Extraktion einer pneumatischen Struktur; Konvergenzverhalten im letzten Lastschritt ($u_{ext} = 74.5 \text{ cm}$)

5.1.2 Pneumatisches Mehrkammersystem unter Torsionsbelastung

Die vorgestellte hybride Darstellung führt direkt auf die Behandlung von deformierbaren Mehrkammerproblemen. Eine pneumatische Mehrkammerstruktur, bestehend aus zwei Kammern mit unterschiedlichem Innendruck (links $p_{l0} = 0.01 \text{ bar}$, rechts $p_{r0} = 1 \text{ bar}$), Materialgesetz: St.-Venant Kirchhoff, Elastizitätsmodul $E = 2.4 \cdot 10^4 \frac{\text{N}}{\text{cm}^2}$, Querkontraktionszahl $\nu = 0.3$, Wandstärke $t = 0.1 \text{ cm}$, wird nach einem Druckaufbau im 1. Lastschritt um die Längsachse tordiert ($\varphi_{ext} = 45^\circ$). Die Torsion wird über eine Verschiebungssteuerung der Eckknoten in 20 konsistenten Schritten aufgebracht. Die Kammern sind mit 2300 Solid Shell Elementen diskretisiert, siehe Abbildung 5.3.

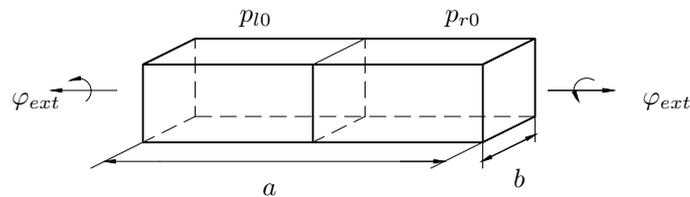


Abbildung 5.3: Pneumatisches Mehrkammersystem bei unterschiedlichem Innendruck und Torsionsbelastung; geometrische Daten: $a = 10 \text{ cm}$, $b = 2 \text{ cm}$, $\varphi_{ext} = 45^\circ$, $p_{l0} = 0.01 \text{ bar}$, $p_{r0} = 1 \text{ bar}$

Die rechte Hochdruckkammer zeigt im Verlauf der Torsion annähernd Starrkörperverhalten. Die linke Niederdruckkammer wird stark deformiert, was folglich zu einem Anstieg des Innendrucks führt, siehe Abbildungen 5.4 und 5.5. Die deformierbare Zwischenwand gibt den Druckanstieg in der linken Kammer an die rechte Kammer weiter; dies erklärt den geringfügigen Druckanstieg in der rechten Kammer.

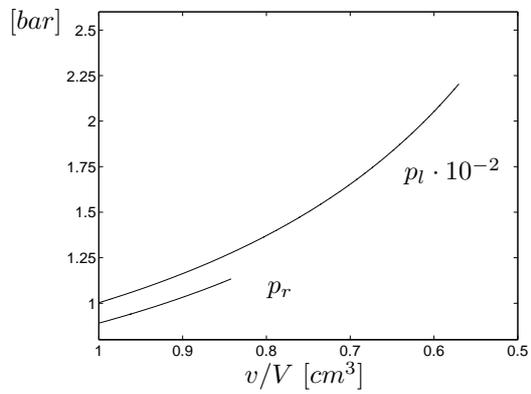


Abbildung 5.4: Pneumatisches Mehrkammersystem unter Torsionsbelastung; Druck über relative Volumenänderung

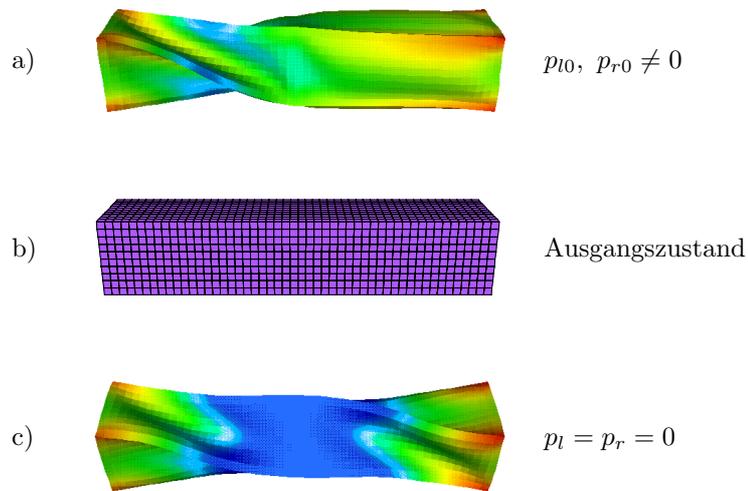


Abbildung 5.5: Pneumatisches Mehrkammersystem unter Torsionsbelastung; a) verformte Hoch- und Niederdruckkammer, b) unverformte Struktur, c) verformte Struktur ohne Innendruck

Die im Verlauf der Torsion entstehenden Falten sind keine Folge eines Stabilitätsproblems und die Deformationszustände können ohne Bogenlängenverfahren ermittelt werden. Die dyadische Erweiterung regularisiert das Gleichungssystem und verhindert Konvergenzprobleme. Dies ist an der quadratischen Konvergenz der jeweils letzten Iterationsschritte im Verlauf dieser Rechnung abzulesen, siehe hierzu beispielhaft das Konvergenzverhalten im letzten Lastschritt ($\varphi_{ext} = 45^\circ$) in Tabelle 5.2.

Iterationsschritt	1	2	3	4
Energie	$7.09 \cdot 10^{+1}$	$4.09 \cdot 10^{-1}$	$2.49 \cdot 10^{-3}$	$1.16 \cdot 10^{-4}$
Iterationsschritt	5	6	7	8
Energie	$3.52 \cdot 10^{-6}$	$9.07 \cdot 10^{-8}$	$2.09 \cdot 10^{-9}$	$4.64 \cdot 10^{-11}$

Tabelle 5.2: Pneumatisches Mehrkammersystem unter Torsionsbelastung; Konvergenzverhalten im letzten Lastschritt ($\varphi_{ext} = 45^\circ$)

5.2 Deformierbare Strukturen in der Hydrostatik

Aufgrund der elementfreien Darstellung der Flüssigkeit können auch Füllvorgänge ohne Kontaktmodelle zwischen Struktur und Flüssigkeit abgebildet werden. Die Gewährleistung der Volumenerhaltung der Flüssigkeit ermöglicht bei großen Deformationen die Berechnung des resultierenden Flüssigkeitsspiegels und damit auch des aktuellen Belastungszustandes der angrenzenden Strukturteile. Die Simulation von deformierbaren Mehrkammersystemen ist wegen des modularen Aufbaus der Steifigkeitsmatrix ohne große Modifikation der Programmstruktur möglich.

5.2.1 Hydrostatik eines gekrümmten mit Flüssigkeit gefüllten Rohres

Die elementfreie Darstellung der inkompressiblen Flüssigkeit wird im wesentlichen über die projizierte Berechnung der freien Flüssigkeitsoberfläche erreicht. Bei stark gekrümmten Hohlstrukturen kommt es während des Füllvorganges zu sehr starken Schwankungen, was die Fläche der freien Flüssigkeitsoberfläche betrifft. Das nachfolgende Beispiel zeigt diesen Sachverhalt deutlich. Ein hohles hakenförmig gekrümmtes Rohr (Materialgesetz: St.-Venant Kirchhoff, Elastizitätsmodul $E = 1.0 \cdot 10^5 \frac{N}{cm^2}$, Querkontraktionszahl $\nu = 0.3$) wird durch stetige konstante Flüssigkeitszugabe (Wichte der Flüssigkeit $\rho g = 0.1 \frac{N}{cm^3}$) befüllt.

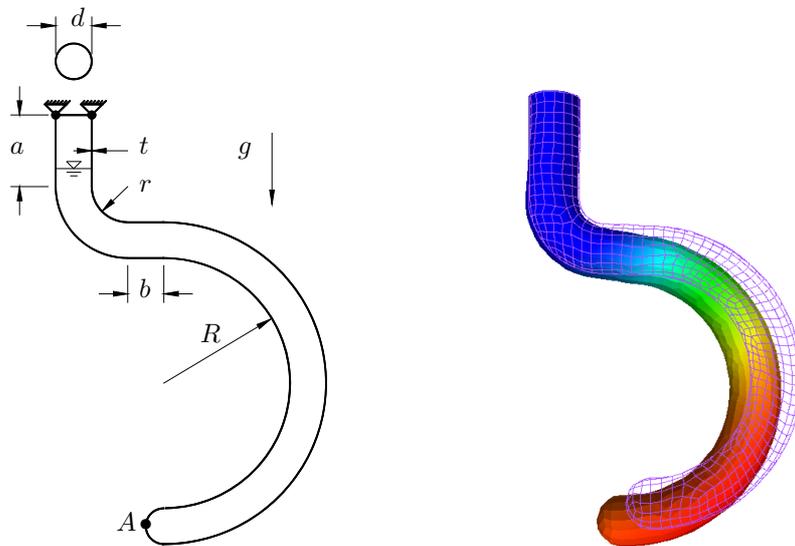


Abbildung 5.6: Hydrostatik eines gekrümmten mit Flüssigkeit gefüllten Rohres; geometrische Daten: $a = 20\text{cm}$, $b = 10\text{cm}$, $r = 10\text{cm}$, $R = 25\text{cm}$, $d = 10\text{cm}$, $t = 0.2\text{cm}$ (links); unverformte Struktur und verformte Struktur

Das gekrümmte Rohr ist mit 1122 Solid Shell Elementen diskretisiert, siehe Abbildung 5.6. In 60 Lastschritten wird jeweils ein Flüssigkeitsvolumen von $V^* = 135\text{ cm}^3$ zugegeben. Die sich hierdurch im 1. Iterationsschritt einstellende neue Füllhöhe ${}^o x = {}^o x_t + \Delta u$ wird über die Fläche der freien Flüssigkeitsoberfläche mit $\Delta u = \frac{V^*}{S_t}$ extrapoliert. Bei sehr stark gekrümmten Gefäßwänden muß deshalb die Volumenzugabe V^* entsprechend klein gewählt werden. Mit zunehmendem Flüssigkeitsspiegel verformt sich die Struktur. In Abbildung 5.7 ist die Fläche der freien Flüssigkeitsoberfläche S und die Verschiebung $|\mathbf{d}_A|$ des Punktes A am unteren Ende der Struktur über der absoluten Füllhöhe aufgetragen. Aus dem Konvergenzverhalten kann die korrekte Implementierung auch dieser Modellgleichungen überprüft werden, siehe Tabelle 5.3.

Iterationsschritt	1	2	3
Energie	$1.38 \cdot 10^{-1}$	$1.68 \cdot 10^{-5}$	$5.05 \cdot 10^{-8}$
Iterationsschritt	4	5	6
Energie	$1.34 \cdot 10^{-9}$	$1.49 \cdot 10^{-12}$	$5.01 \cdot 10^{-14}$

Tabelle 5.3: Hydrostatik eines gekrümmten mit Flüssigkeit gefüllten Rohres; Konvergenzverhalten im letzten Lastschritt

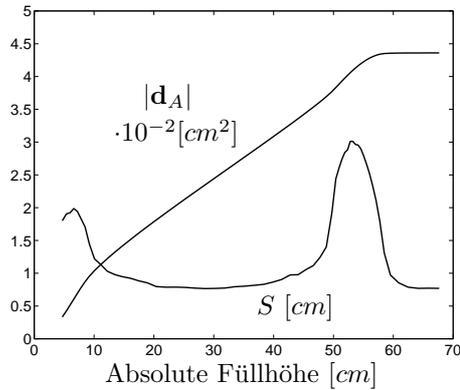


Abbildung 5.7: Hydrostatik eines gekrümmten mit Flüssigkeit gefüllten Rohres; Fläche der freien Flüssigkeitsoberfläche S über Füllhöhe; Verschiebung $|\mathbf{d}_A|$ des Punktes A über Füllhöhe

5.2.2 Hydrostatik einer teilweise befüllten Struktur unter externer Zug- und Torsionsbelastung

In diesem Beispiel wird die Wechselwirkung von großen Strukturverformungen auf den hydrostatischen Belastungszustand illustriert. Infolge der dyadischen Erweiterung der Steifigkeitsmatrix ist die Simulation von moderaten Faltenbildungen ohne die Anwendung eines Bogenlängenverfahrens möglich. Die hexaederförmige deformierbare Struktur (Materialgesetz: St.-Venant Kirchhoff, Elastizitätsmoduli $E_1 = 0.75 \cdot 10^5 \frac{N}{cm^2}$, $E_2 = 1.0 \cdot 10^6 \frac{N}{cm^2}$, Querkontraktionszahl $\nu = 0.3$) wird in einem ersten Lastschritt mit einer Flüssigkeit (Wichte $\rho g = 0.1 \frac{N}{cm^3}$, Volumen $V = 375 cm^3$) befüllt. Anschließend wird eine Torsions- (φ_{ext}) und Zugverformung (u_{ext}) über 40 konsistente Lastschritte an den Eckknoten aufgebracht, siehe Abbildung 5.8.

Kopf- und Fußplatten der Struktur haben eine höhere Steifigkeit, um Stabilitätsprobleme in den Abschlußplatten auszuschließen, siehe hierzu die Tabelle 5.4 mit einem repräsentativen quadratischen Konvergenzverhalten bei einem Torsionswinkel von $\varphi_{ext} = 15^\circ$. Die Hohlstruktur ist mit 2600 Solid Shell Elementen diskretisiert. Infolge der Entlüftungsöffnung in der oberen Abschlußplatte kann sich kein interner Überdruck aufbauen. Mit zunehmender Verformung steigt hierbei der Füllstand in der Struktur an, während die freie Flüssigkeitsfläche abnimmt, siehe Abbildungen 5.9 und 5.10.

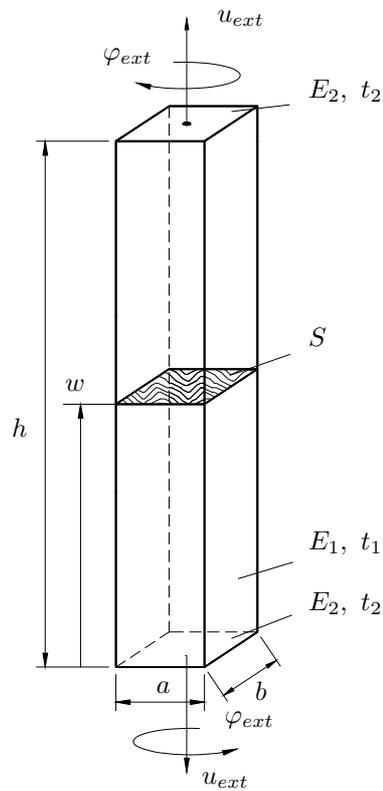


Abbildung 5.8: Hydrostatik einer elastischen Struktur unter Zug- und Torsionsbelastung; geometrische Daten: $a = 5\text{cm}$, $b = 5\text{cm}$, $h = 30\text{cm}$, $t_1 = 0.1\text{cm}$, $t_2 = 1\text{cm}$, Füllhöhe w , Belastungsgrößen: $u_{ext} = 1.25\text{cm}$, $\varphi_{ext} = 45^\circ$

Iterationsschritt	1	2	3
Energie	$1.38 \cdot 10^{-1}$	$1.68 \cdot 10^{-5}$	$5.05 \cdot 10^{-8}$
Iterationsschritt	4	5	6
Energie	$1.34 \cdot 10^{-9}$	$1.49 \cdot 10^{-12}$	$5.01 \cdot 10^{-14}$

Tabelle 5.4: Hydrostatik einer teilweise befüllten Struktur unter externer Zug- und Torsionsbelastung; Konvergenzverhalten im letzten Lastschritt

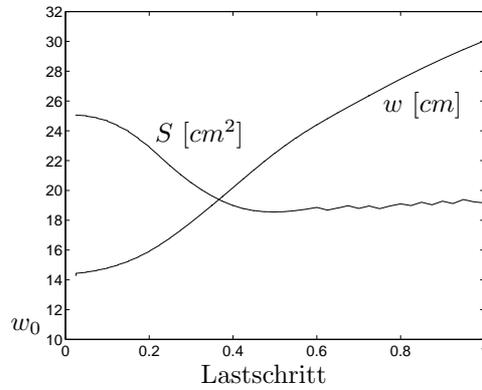


Abbildung 5.9: Hydrostatik einer teilweise befüllten Struktur unter externer Zug- und Torsionsbelastung; Flüssigkeitsspiegel w über Lastfortschritt; Flüssigkeitsspiegel w_0 vor Zug- und Torsionsbelastung; Fläche der freien Flüssigkeitsoberfläche S über Lastfortschritt

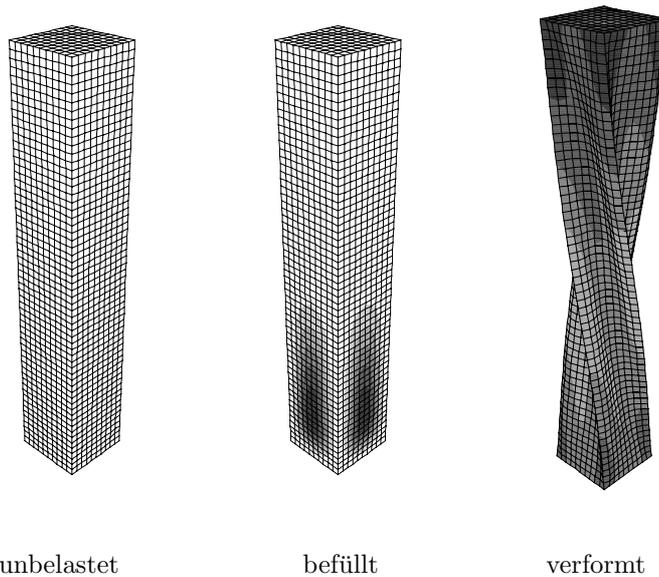


Abbildung 5.10: Hydrostatik einer teilweise befüllten Struktur unter externer Zug- und Torsionsbelastung; unbelastete Struktur (links), teilweise befüllte Struktur ohne externe Belastung (mitte), teilweise befüllte Struktur unter Zug- und Torsionsbelastung (rechts); die Graustufen zeigen die Norm der totalen Strukturverschiebung an

5.2.3 Hydrostatik von befüllten Mehrkammersystemen mit gegenseitiger Interaktion

In befüllten Mehrkammerstrukturen findet eine Wechselwirkung zwischen den Flüssigkeiten und der deformierbaren Struktur und damit auch zwischen den Kammern statt. Eine offene Tankstruktur, bestehend aus zwei deformierbaren, durch eine Zwischenwand getrennten dünnwandigen Kammern (Materialgesetz: St.-Venant Kirchhoff, Elastizitätsmodul $E = 2.0 \cdot 10^4 \frac{N}{cm^2}$, Querkontraktionszahl $\nu = 0.3$, Wanddicke $t = 0.1cm$, Wichte der Flüssigkeit $\rho g = 0.1 \frac{N}{cm^3}$), wird befüllt, siehe Abbildung 5.11.

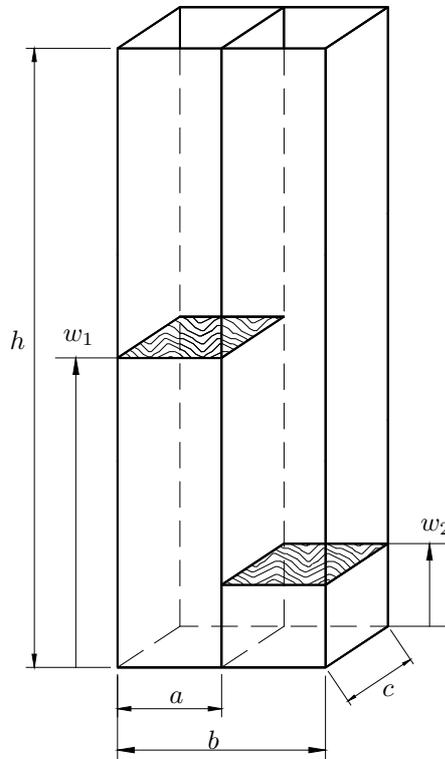


Abbildung 5.11: Hydrostatik von befüllten Mehrkammersystemen mit Interaktion; geometrische Daten: $a = 5cm$, $b = 10cm$, $c = 5cm$, $h = 30cm$

Die gesamte Struktur ist mit 1100 finiten Elementen aufgebaut. Im ersten Lastschritt erfolgt eine Teilfüllung der linken Kammer bis zu einer Füllhöhe w_{10} ($V_1 = 375cm^3$). Anschließend wird die rechte Kammer über 30 gleiche Volumenzugaben von $V_2^* = 25 cm^3$ ausgehend von $w_{20} = 0$ befüllt.

Über die Interpolation im 1. Iterationsschritt ergibt sich die neue Füllhöhe in der rechten Kammer ${}^o x_2 = {}^o x_{t2} + \Delta u_2$ mit $\Delta u_2 = \frac{V_2^*}{S_{t2}}$ über die Fläche S_{t2} der freien Flüssigkeitsoberfläche. Die Kammerstruktur verformt sich während des Füllvorgangs und auch der Flüssigkeitsspiegel w_1 in der linken Kammer ändert sich als Folge der Befüllung der rechten Kammer, siehe Abbildungen 5.12 und 5.13.

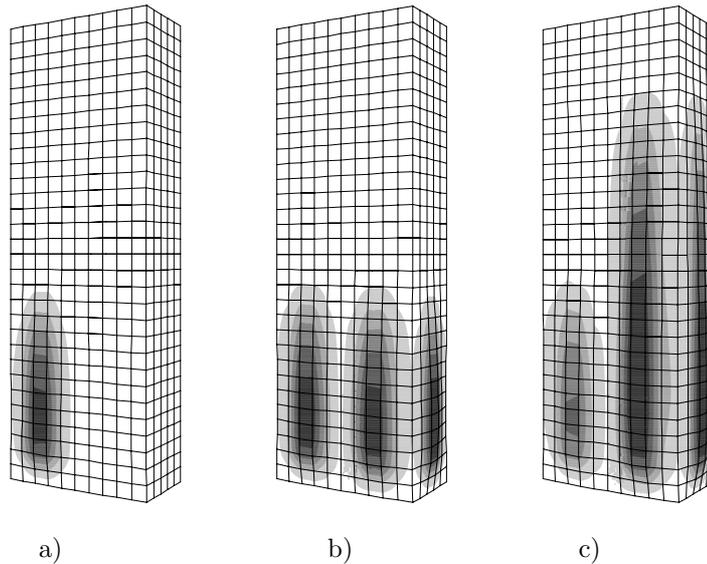


Abbildung 5.12: Hydrostatik von befüllten Mehrkammersystemen mit Interaktion; Belastungszustand: a) linke Kammer bis bis w_{10} , rechte Kammer leer, b) rechts teilweise befüllt und c) nach letztem Lastschritt (voll befüllt)

Die quadratischen Konvergenz belegt auch in diesem Beispiel den korrekten Einbau der entwickelten Gleichungen in das Rechenprogramm, siehe Tabelle 5.5.

Iterationsschritt	1	2	3
Energie	$5.03 \cdot 10^{-1}$	$3.79 \cdot 10^{-2}$	$8.94 \cdot 10^{-5}$
Iterationsschritt	4	5	6
Energie	$4.19 \cdot 10^{-8}$	$3.84 \cdot 10^{-11}$	$4.48 \cdot 10^{-14}$

Tabelle 5.5: Hydrostatik von befüllten Mehrkammersystemen mit Interaktion; Konvergenzverhalten im letzten Lastschritt

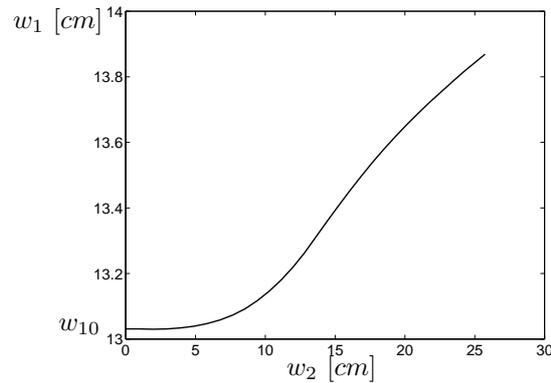


Abbildung 5.13: Hydrostatik von befüllten Mehrkammersystemen mit Interaktion; w_{10} Flüssigkeitsspiegel in der linken Kammer vor Füllung der rechten Kammer; Flüssigkeitsspiegel w_1 in der linken Kammer über Flüssigkeitsspiegel w_2 in der rechten Kammer

5.3 Hydraulik deformierbarer Strukturen im Schwerfeld

Mit diesem Beispiel soll die Interaktion zwischen einer kompressiblen schweren Flüssigkeit und einer dünnwandigen vollständig gefüllten Struktur im Schwerfeld vorgeführt werden. Ein dünnwandiger zylindrischer Kessel aus St.-Venant Kirchhoff Material (gewichtlos, Elastizitätsmodul $E = 21 \cdot 10^{10} \frac{N}{m^2}$, Querkontraktionszahl $\nu = 0.3$, Wandstärke $t = 1cm$) wird in einem 1. Lastschritt komplett mit Wasser gefüllt (Dichte $\rho = 1000 \frac{kg}{m^3}$, Kompressionsmodul $K = 0.5 \cdot 10^9 \frac{N}{m^2}$) und gleichzeitig mit dem Eigengewicht eines starren oben fest aufliegenden Kolbens belastet, siehe Abbildung 5.14.

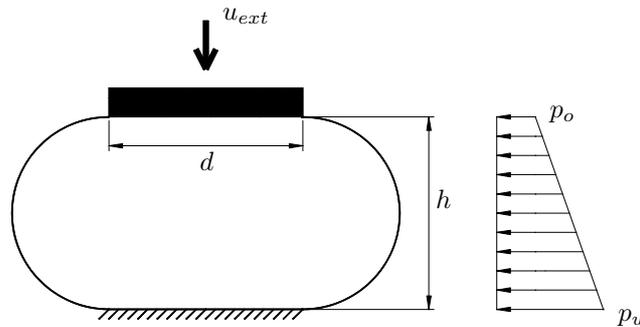


Abbildung 5.14: Wassergefüllter zylindrischer Kessel mit Kolbenverschiebung; geometrische Daten: $h = 10m$, $d = 10m$; Belastungsgrößen: $p_o = 1 bar$, $p_u = 2 bar$, $u_{ext} = 4m$

Dieser Ausgangszustand kann in der Praxis durch Befüllen und anschließendes Entlüften der Struktur erreicht werden. Infolge des Gewichts liegt am höchst-

ten Punkt der Flüssigkeit ein Überdruck von $p_o = 1 \text{ bar}$ vor. In weiteren 29 Lastschritten wird die Struktur über eine vorgegebene Verschiebung u_{ext} komprimiert, siehe Abbildungen 5.14 und 5.15.

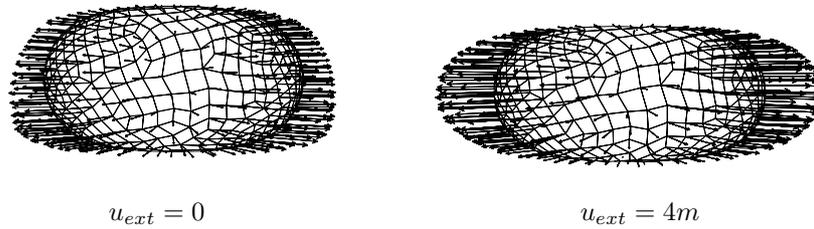


Abbildung 5.15: Wassergefüllter zylindrischer Kessel mit Kolbenverschiebung; radiale Verschiebungsvektoren - im ersten Lastschritt (links), radiale Verschiebungsvektoren - nach letztem Lastschritt in vergrößerter Darstellung (rechts)

Es wird angenommen, daß alle am Kolben angreifenden Punkte der Struktur sich nur in Richtung und mit dem Betrag von u_{ext} verschieben. Die anderen Lagerpunkte am Boden des Kessels werden in allen Richtungen festgehalten. Der Kessel ist mit 1006 Solid Shell Elementen diskretisiert. Als Folge des Kolbenvorschubs ändern sich bei Gewährleistung der Massenerhaltung sowohl Dichte als auch Volumen der Flüssigkeit, siehe Abbildung 5.16.

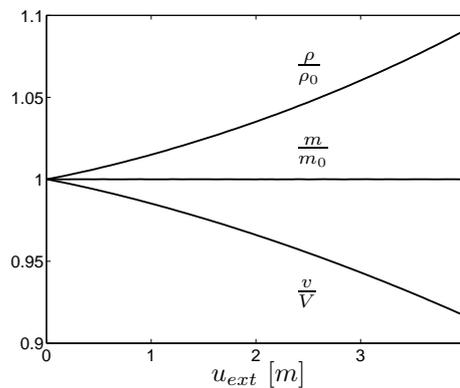


Abbildung 5.16: Wassergefüllter zylindrischer Kessel mit Kolbenverschiebung; relative Dichte- und Volumenänderung über Kolbenverschiebung u_{ext} ; Massenerhaltung gewährleistet

Die Abnahme des Volumens impliziert gleichzeitig eine Zunahme des Kompressionsdrucks $^k p$, siehe Abbildung 5.17. Eine Vergleichsuntersuchung zeigt, daß der Druckanstieg in einer Flüssigkeit um den Faktor 10^3 höher liegt als in einer Gasfüllung. Als Zwischenergebnis ist im Verlauf der Simulation die Position des Schwerpunktes zu berechnen, siehe Abbildung 5.18.

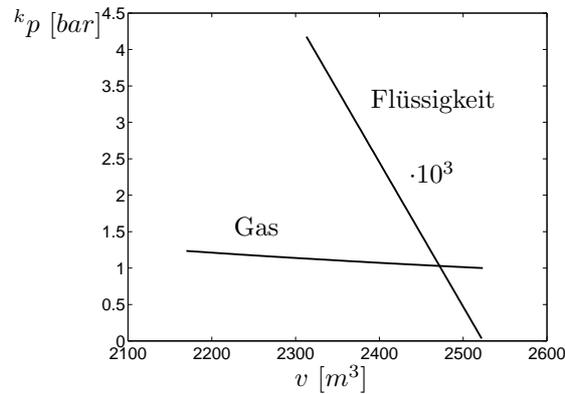


Abbildung 5.17: Wassergefüllter zylindrischer Kessel mit Kolbenverschiebung; Kompressionsdruck von Flüssigkeit ${}^k p$ und Gas über Flüssigkeitsvolumen v

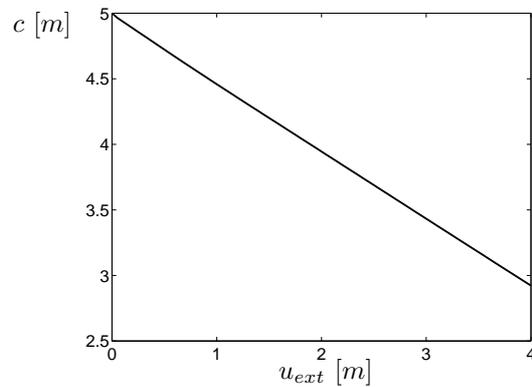


Abbildung 5.18: Wassergefüllter zylindrischer Kessel mit Kolbenverschiebung; Position des Volumenschwerpunktes c über Kolbenverschiebung u_{ext}

Wie in Kapitel 4 angedeutet kann es bei stark kompressiblen Fluiden in steifen Strukturen zu Konvergenzproblemen kommen. Im vorliegenden Beispiel liegen Kompressionsmodul und Elastizitätsmodul sehr eng beieinander. Mit einer Auflösung der aufgebrachten Verschiebung u_{ext} in 30 Lastschritte gelingt es, dennoch eine quadratische Konvergenz zu erzeugen. Jedoch sind hierfür bei fast allen Lastschritten bis zu 13 Iterationsschritte notwendig. In der Konvergenztabelle 5.6 ist die quadratische Konvergenz im letzten Lastschritt für die letzten 8 Iterationsschritte abzulesen.

Iterationsschritt	7	8	9	10
Energie	$6.29 \cdot 10^{-3}$	$1.59 \cdot 10^{-4}$	$4.03 \cdot 10^{-6}$	$1.02 \cdot 10^{-7}$
Iterationsschritt	11	6	12	13
Energie	$2.58 \cdot 10^{-9}$	$6.54 \cdot 10^{-11}$	$1.65 \cdot 10^{-12}$	$4.22 \cdot 10^{-14}$

Tabelle 5.6: Wassergefüllter zylindrischer Kessel mit Kolbenverschiebung; Konvergenzverhalten im letzten Lastschritt

5.4 Einsatz des Bogenlängenverfahrens bei Fluid-Struktur-Problemen

Die folgenden Beispiele zeigen an einer einfachen Schalenstruktur die vielfältigen Anwendungsmöglichkeiten des Bogenlängenverfahrens in Verbindung mit praktischen Fragestellungen der Fluid-Struktur-Mechanik.

5.4.1 Pneumatisch gestützte Schale unter Einzellast

Ein starrer Druckkessel ist durch eine dünnwandige deformierbare Schale (Materialgesetz: St.-Venant Kirchhoff, Elastizitätsmodul $E = 2.0 \cdot 10^5 \frac{N}{cm^2}$, Querkontraktionszahl $\nu = 0.3$, Wandstärke $t = 0.15 \text{ cm}$) abgeschlossen, die durch eine exzentrisch angreifende äußere Einzellast belastet wird, siehe Abbildung 5.19. Die Schale ist entlang den geraden Rändern der Schale fest eingespannt und an den anderen seitlich geführt, so daß nur eine Gleitbewegung entlang der starren Wände möglich ist. Die Diskretisierung der Schale erfolgt mit 220 Solid Shell Elementen.

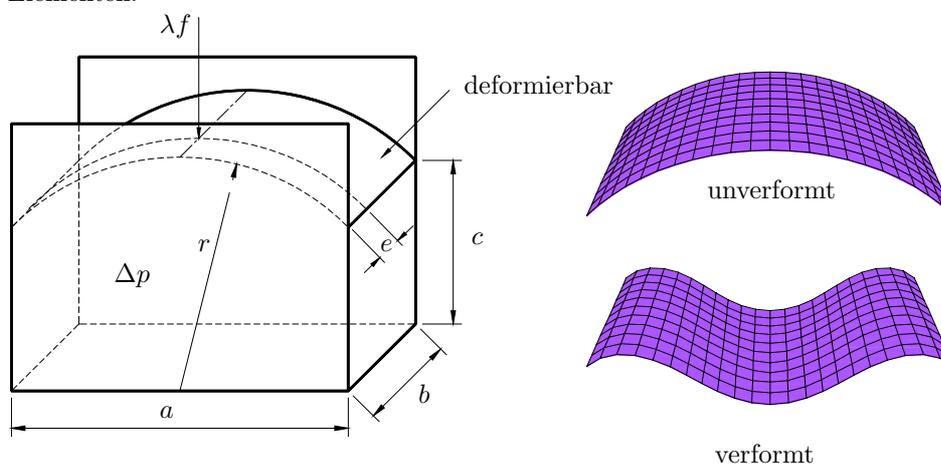


Abbildung 5.19: Pneumatisch gestützte Schale unter Einzellast; geometrische Daten: $a = 10 \text{ cm}$, $b = 5 \text{ cm}$, $c = 5 \text{ cm}$, $r = 7 \text{ cm}$, $e = 2 \text{ cm}$; externe Belastung $f = 300 \text{ N}$, λ Regelgröße, Δp Innendruck (relativ zum Umgebungsdruck); verformte ($\lambda = 0.46$) und unverformte ($\lambda = 0$) Schale

Mit der projizierten Volumenberechnung wird eine Diskretisierung der starren Volumenwände umgangen. Die äußere Last wird über das Bogenlängenverfahren gesteuert. Ein Verzweigungsproblem wird über die Annahme eines exzentrischen Lastangriffspunktes umgangen. Infolge der Verformung der Schale erhöht sich der Innendruck im Kessel, was wiederum zu einem Anstieg der kritischen Belastung verglichen mit einem leeren Kessel führt, siehe Abbildung 5.20.

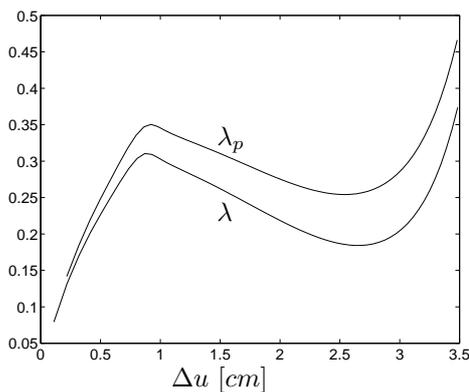


Abbildung 5.20: Pneumatisch gestützte Schale unter Einzellast; λ_p Lastfaktor über vertikale Verschiebung Δu des Lastangriffpunktes bei pneumatischer Stützung der Schale, λ Lastfaktor über vertikale Verschiebung Δu ohne pneumatische Stützung

Abbildung 5.21 zeigt den Druckanstieg im Kessel während des Belastungsvorgangs. Das Durchschlagverhalten der Schale ist klar erkennbar und die versagenskritische Last $f_{krit} = 0.35 \cdot 300 \text{ N}$ kann bestimmt werden.

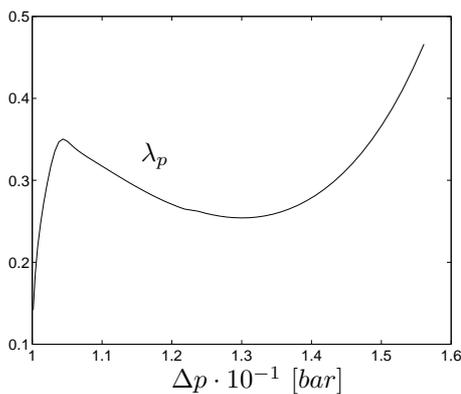


Abbildung 5.21: Pneumatisch gestützte Schale unter Einzellast; λ_p Lastfaktor über Innendruck Δp

Wie schon in Kapitel 2.7 angemerkt, berücksichtigt das entwickelte Bogenlängenverfahren keine Massenkräfte. Insofern kann das postkritische Verhalten der Fluid-Struktur-Kopplung nur für leichte Strukturen und fast masselose Gase gut abgebildet werden. Tabelle 5.7 zeigt das sehr gute Konvergenzverhalten der Fluid-Struktur-Kopplung im versagenskritischen Lastschritt $\lambda = 0.35$.

Iterationsschritt	1	2	3	4	5
Energie	4.06	$3.45 \cdot 10^{-1}$	$4.15 \cdot 10^{-4}$	$2.62 \cdot 10^{-8}$	$1.45 \cdot 10^{-16}$

Tabelle 5.7: Pneumatisch gestützte Schale unter Einzellast; Konvergenzverhalten im kritischen Lastschritt $\lambda = 0.35$

5.4.2 Indirekte Verschiebungsregelung in der Pneumatik

Neben der direkten Kraftregelung wurde in Kapitel 2.7.2 die indirekte Verschiebungsregelung entwickelt, die hier an einem Beispiel vorgeführt wird. Die indirekte Verschiebungsregelung kommt zum Einsatz, wenn über Strukturverschiebungen ein Druckaufbau realisiert werden soll.

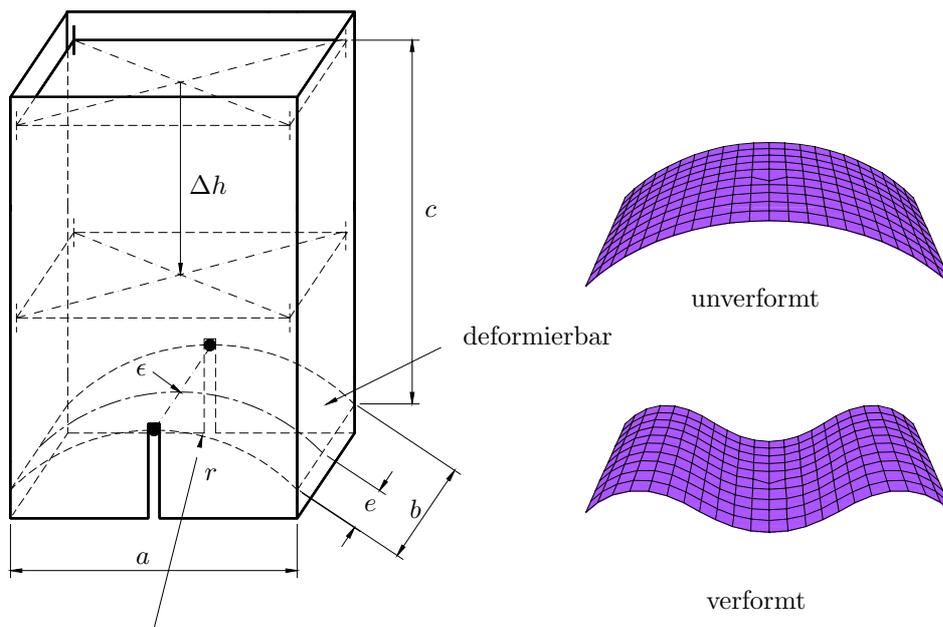


Abbildung 5.22: Indirekte Verschiebungsregelung in der Pneumatik; geometrische Daten: $a = 10 \text{ cm}$, $b = 5 \text{ cm}$, $c = 10 \text{ cm}$, $r = 7 \text{ cm}$, $e = 2.5 \text{ cm}$, Kolbenhub Δh , ϵ Störung; unverformte ($\Delta h = 0 \text{ cm}$) und verformte ($\Delta h = 9.36 \text{ cm}$) Schale

Kommt es im Verlauf des Prozesses zu Stabilitätsproblemen, kann dann der Druckaufbau über das modifizierte Bogenlängenverfahren geregelt werden, so daß bei Durchschlagproblemen die entstehenden Singularitäten im Gleichungssystem nicht zum Tragen kommen. Ein starrer Pneumatikzylinder wird am unteren Ende durch eine dünnwandige, deformierbare, zylindrische Schale (Materialgesetz: St.-Venant Kirchhoff, Elastizitätsmodul $E = 1.0 \cdot 10^5 \frac{N}{cm^2}$, Querkontraktionszahl $\nu = 0.3$, Wandstärke $t = 0.2 \text{ cm}$) abgeschlossen, siehe Abbildung 5.22. Die geraden Ränder der Schale sind fest eingespannt, die anderen sind entlang der Seitenwände gleitend gelagert. An zwei Punkten der gekrümmten Schalenränder wird durch Führungen ein seitliches Auswandern der Schale in der Wandebene unterbunden. Ein Verzweigungsverhalten wurde durch das Einbringen einer kleinen geometrischen Imperfektion ϵ ausgeschlossen. Die Diskretisierung der Schale erfolgt über 220 Solid Shell Elemente. Der verschiebungsgesteuerte starre Kolben wird durch ein einziges Element abgebildet. Als Folge der projizierten Volumenberechnung entfällt eine Diskretisierung der starren Seitenwände. Ausgehend von einem Überdruck von $p_0 = 0.1 \text{ bar}$ und einem Ausgangsvolumen von $V_0 = 450 \text{ cm}^3$ wird über den herunterfahrenden Kolben ein Kompressionsdruck im Zylinder aufgebaut. Mit der indirekten Verschiebungssteuerung innerhalb des Bogenlängenverfahrens ist sowohl eine Bestimmung der kritischen Kolbenverschiebung als auch des kritischen Drucks möglich, siehe Abbildung 5.23.

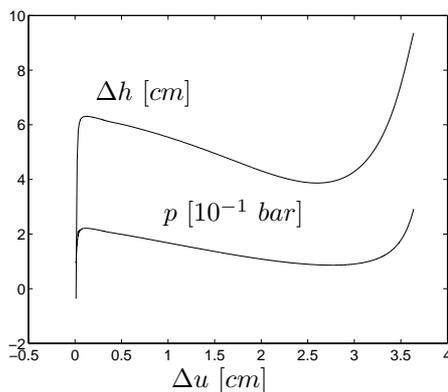


Abbildung 5.23: Indirekte Verschiebungsregelung in der Pneumatik; Innendruck $p [10^{-1} \text{ bar}]$ über vertikale Verschiebung $\Delta u [cm]$ der Störung ϵ ; Kolbenverschiebung $\Delta h [cm]$ über vertikale Verschiebung $\Delta u [cm]$ der Störung ϵ

Hierzu wird mit einem Überdruck von 1 bar das Lastniveau im Prädiktorschritt skaliert und in den Korrektorschritten angepaßt. Die zum Kompressionsdruck entsprechende Kolbenstellung wird *indirekt* in der Nachlaufrechnung mit der isentropen Zustandsgleichung bestimmt. In Abbildung 5.24 ist der Verlauf des Kompressionsvolumens über der vertikalen Verschiebung der Störung dargestellt. Im Gegensatz zur Einzellast kommt es bei einer gleichförmigen Druckbelastung je nach Größe der Störung zu einem fast unstetigen Versagensverhalten.

Durch die stets normal wirkende Druckkraft wird die Schale zunächst versteift und versagt unvermittelt bei Überschreitung der kritischen Druckkraft. Infolge des hohen Prädiktordrucks konvergieren alle Lastschritte nach 2 Iterationen im Korrektorschritt.

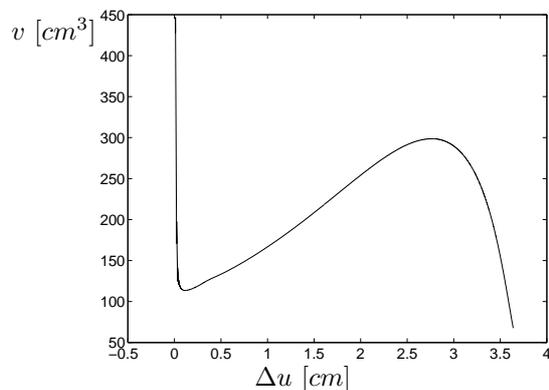


Abbildung 5.24: Indirekte Verschiebungsregelung in der Pneumatik; Volumen v [cm³] über vertikale Verschiebung der Störung Δu [cm]

5.4.3 Schale unter hydrostatischer Belastung mit einer zusätzlich geregelten Einzellast

Ein Behälter, bestehend aus starren Seitenwänden und einem deformierbaren, dünnen, zylindrischen Schalenboden (Materialgesetz: St.-Venant Kirchhoff, $E = 2.0 \cdot 10^5 \frac{N}{cm^2}$, $\nu = 0.3$, $\rho g = 0.1 \frac{N}{cm^3}$ $t = 0.15cm$), wird durch eine hydrostatische Belastung und eine zusätzlich geregelte Einzellast λf mit $f = 300 N$ verformt, siehe Abbildung 5.25. Die Schale ist an ihren geraden Rändern fest eingespannt und entlang den starren Wänden gleitend verschieblich gelagert. Der benetzte Schalenboden wird über 220 Solid Shell Elemente modelliert. Die exzentrisch angreifende Last wird mit dem Bogenlängenverfahren geregelt. Ausgehend von einem Lastniveau von $\Lambda = 1$ wird in jedem Prädiktorschritt die Last skaliert und in den folgenden Korrektorschritten ausiteriert. In Abbildung 5.26 ist der geregelte Kraftverlauf der Einzellast über der horizontalen Verschiebung des Kraftangriffpunktes aufgetragen. Der Einfluß der Flüssigkeitsbelastung auf die kritische Last wird beim Vergleich mit einer Untersuchung ohne Flüssigkeit deutlich. Als Folge der starken Verformung der Bodenschale kommt es unter Berücksichtigung der Volumenerhaltung der Flüssigkeit zu einer deutlichen Verschiebung des Flüssigkeitspiegels und somit auch zu einer Belastungsänderung durch die Flüssigkeit, siehe Abbildung 5.27.

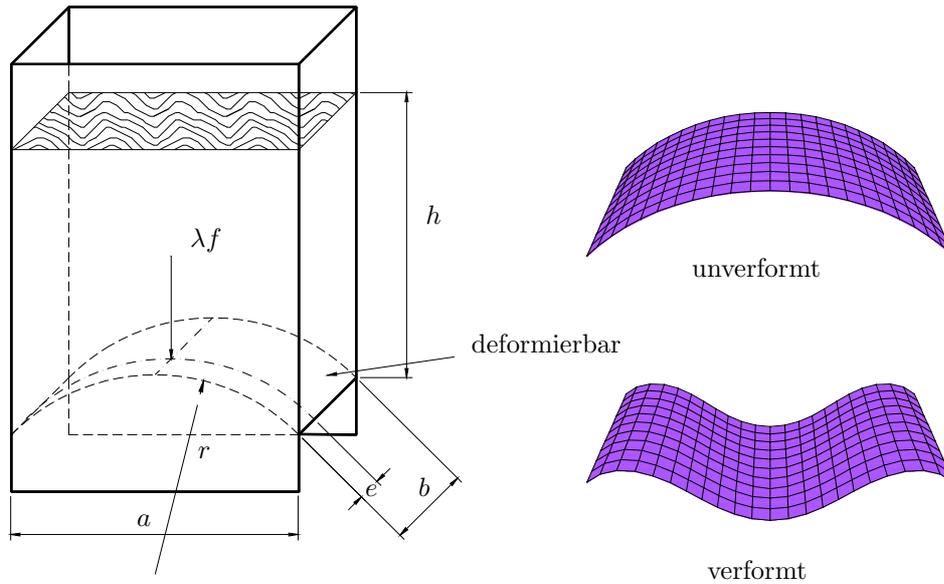


Abbildung 5.25: Schale unter hydrostatischer Belastung mit einer zusätzlichen geregelten Einzellast; geometrische Daten: $a = 10 \text{ cm}$, $b = 5 \text{ cm}$, $h = 10 \text{ cm}$, $r = 7 \text{ cm}$, $e = 2 \text{ cm}$; verformte und unverformte Schale (rechts)

Tabelle 5.8 zeigt das günstige Konvergenzverhalten bei der versagenskritischen Belastung von $\lambda_{krit} f = 0.28 \cdot 300 \text{ N}$.

Iterationsschritt	1	2	3	4	5
Energie	3.99	$4.01 \cdot 10^{-1}$	$7.89 \cdot 10^{-4}$	$1.04 \cdot 10^{-7}$	$1.47 \cdot 10^{-14}$

Tabelle 5.8: Schale unter hydrostatischer Belastung mit einer zusätzlich geregelten Einzellast; Konvergenzverhalten im kritischen Lastschritt

Ob mit der quasi-statischen Betrachtung des Nachlaufpfades eine sinnvolle Aussage zur Stabilisierung der Schale ermöglicht wird, bleibt offen. Es stellt sich eine sehr niedrige Nachbeullast ein. Dies bedeutet gleichzeitig eine hohe Sensitivität der Durchschlagslast gegenüber kleinen Änderungen der Geometrie und der Belastung.

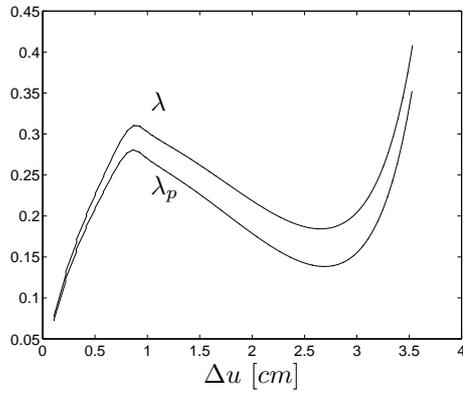


Abbildung 5.26: Schale unter hydrostatischer Belastung mit einer zusätzlichen geregelten Einzellast; λ_p Last über vertikaler Verschiebung Δu des Lastangriffpunktes mit Flüssigkeitslast, λ Last über vertikaler Verschiebung Δu des Lastangriffpunktes ohne Flüssigkeitslast

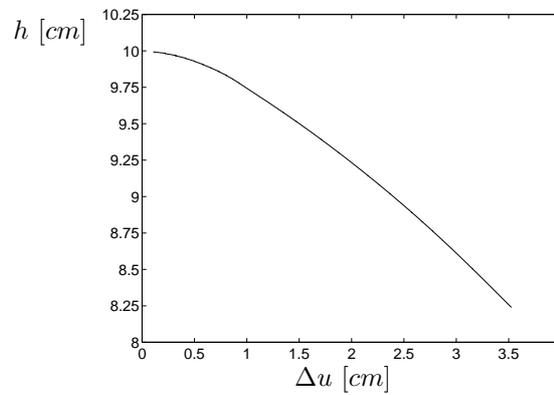


Abbildung 5.27: Schale unter hydrostatischer Belastung mit einer zusätzlichen geregelten Einzellast; Verschiebung des Flüssigkeitspiegels h über vertikaler Verschiebung des Lastangriffpunktes

5.4.4 Indirekte Verschiebungsregelung in der Hydrostatik

Wie für die indirekte Verschiebungsregelung in der Pneumatik wird im nachfolgenden Beispiel das Analogon der Hydrostatik vorgestellt. Ein Behälter, bestehend aus starren Seitenwänden und einem deformierbaren, dünnwandigen, zylindrischen Schalenboden (Materialgesetz: St.-Venant Kirchhoff, $E = 1.0 \cdot 10^5 \frac{N}{cm^2}$, $\nu = 0.3$, $\rho g = 0.1 \frac{N}{cm^3}$, $t = 0.1 cm$), wird durch ein starres Leitungssystem mit Flüssigkeit befüllt. Die deformierbare Schale ist an ihren geraden Rändern fest eingespannt, an den anderen horizontal geführt. Eine kleine geometrische Imperfektion ϵ verhindert das Auftreten eines Verzweigungsproblems. Der Volumenstrom der Flüssigkeit wird durch die Kolbenstellung eines Hydraulikzylinders geregelt, siehe Abbildung 5.28.

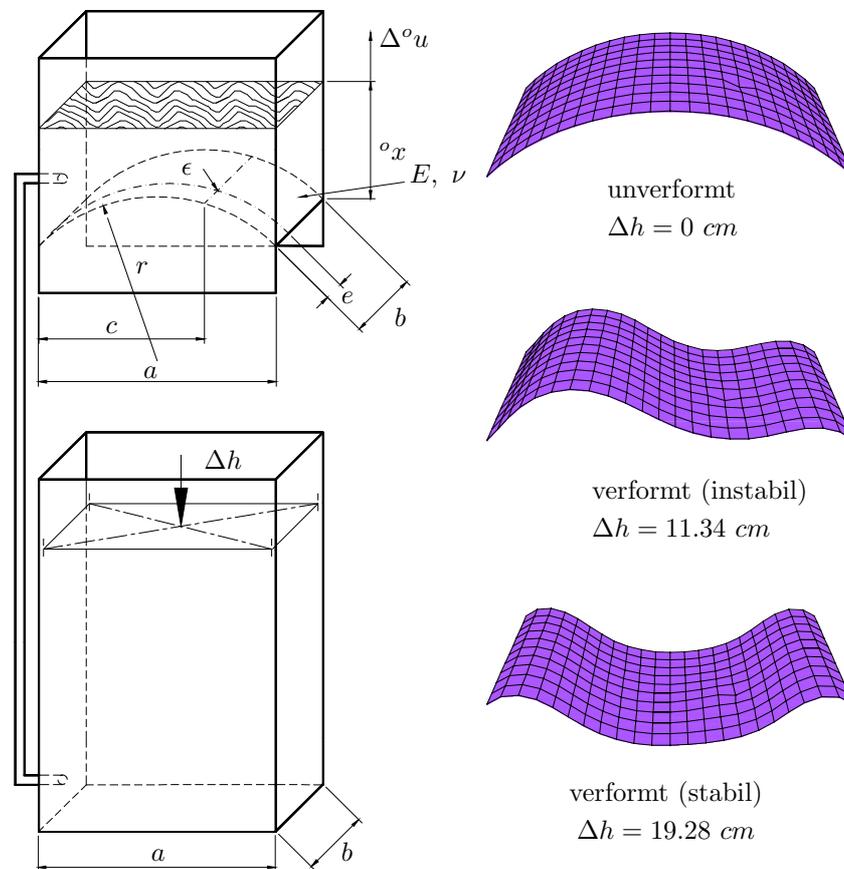


Abbildung 5.28: Indirekte Verschiebungsregelung in der Hydrostatik; geometrische Daten: $a = 10 cm$, $b = 5 cm$, $c = 7.5 cm$, $o_x = 5 cm$, $r = 7 cm$, $e = 2 cm$; Δ^{o_u} Änderung in der Spiegelhöhe, Δh Kolbenhub; stabile und instabile Gleichgewichtslagen

Die deformierbare Bodenschale wird mit 220 und die starren Platten von Kolben und Zylinderboden mit 2 einzelnen Solid-Shell Elementen diskretisiert. Als Folge der projizierten Volumenberechnung entfällt eine Diskretisierung der starren Seitenwände. Auch die starre Verbindungsleitung muß nicht diskretisiert werden, da sich im Leitungssystem immer das gleiche Flüssigkeitsvolumen befindet. In einer Nachlaufrechnung wird über die Volumenerhaltung aus der vorgegebenen kritischen Füllhöhe die entsprechende Kolbenstellung ermittelt. Hierzu wird im Prädiktorschritt aller Lastschritte mit einer gleichbleibenden Füllhöhe von ${}^o x_0 = 10 \text{ cm}$ über dem deformierbaren Boden gearbeitet. Gleichzeitig wird die Spiegelhöhenzunahme mittels eines Vergleichs der Bogenlängen des aktuellen und des ersten Lastschrittes berechnet. Anschließend wird iterativ in den Korrektorschritten die exakte Spiegelhöhe und die entsprechende Deformation der Struktur bestimmt. Die Änderung der Flüssigkeitsspiegelhöhe $\Delta^o u$ und die hierzu korrespondierende Kolbenstellung Δh ist in Abbildung 5.29 über der horizontalen Verschiebung Δu am Ort der Störung ϵ aufgetragen.

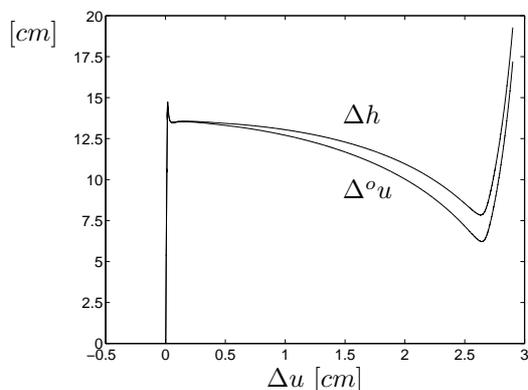


Abbildung 5.29: Indirekte Verschiebungsregelung in der Hydrostatik; Änderung des Flüssigkeitsspiegel $\Delta^o u$ über horizontaler Verschiebung Δu am Ort der Störung ϵ ; Änderung der Kolbenstellung Δh über horizontaler Verschiebung Δu am Ort der Störung ϵ

In Tabelle 5.9 ist repräsentativ das Konvergenzverhalten bei der versagenskritischen Kolbenstellung $\Delta h = 14.05 \text{ cm}$ aufgetragen.

Iterationsschritt	1	2	3	4
Energie	$8.88 \cdot 10^{-3}$	$1.91 \cdot 10^{-5}$	$7.96 \cdot 10^{-11}$	$5.49 \cdot 10^{-17}$

Tabelle 5.9: Indirekte Verschiebungsregelung in der Hydrostatik; Konvergenzverhalten bei der kritischen Kolbenstellung von $\Delta h = 14.05 \text{ cm}$

Kapitel 6

Zusammenfassung und Ausblick

Ziel der Arbeit ist die Diskussion verschiedener Fluid-Struktur Kopplungen im Rahmen einer nichtlinearen statischen Finite-Element-Analyse. Ausgehend von pneumatischen und hydraulischen Strukturen, bei der eine geschlossene deformierbare Hülle ein kompressibles masseloses Fluid umschließt, werden anschließend offene deformierbare Strukturen mit inkompressibler Flüssigkeitsfüllung im Schwerfeld untersucht. Zum Abschluß der Arbeit wird die Synthese aus Kompressibilität und Eigengewicht einer Fluidfüllung in das gekoppelte Fluid-Struktur-Problem eingebettet.

In allen Fällen gelingt es, die Fluidwirkung über Oberflächenintegrale der Kontaktfläche zwischen Fluid und Struktur darzustellen. Dies resultiert in einer elementfreien, analytischen Darstellung des Fluids neben einer Finite-Element-Präsentation der Struktur. Vernetzungsprobleme, aufwendige Netzverfeinerungsalgorithmen und Kontaktmodelle entfallen somit auch für große Strukturverformungen. Das Fluid geht über das Potential der inneren Energie und das Schwerepotential in das Gesamtpotential der Fluid-Struktur-Kopplung ein. Die hieraus resultierende konservative Modellbeschreibung führt auch bei einer nichtlinearen Strukturverformung zu einer symmetrischen Steifigkeitsmatrix, wenn die Feldgleichung des Fluids durch Produktintegration an physikalisch realistische Randbedingungen angepaßt wird. Das entstehende symmetrische Gleichungssystem kann auf eine reine Verschiebungsform kondensiert werden. Diese Darstellung zeigt den Einfluß des Fluids auf die Struktur über unterschiedliche dyadische Erweiterungen. Mit der Sherman-Morrison-Formel läßt sich das dyadisch erweiterte Gleichungssystem auf schwach besetzte Referenzprobleme überführen. Die Wechselwirkung zwischen Fluid und Struktur wird über diese dyadischen Erweiterungen besonders bei Stabilitätsuntersuchungen des gekoppelten Problems deutlich.

Versagenskritische Belastungen durch externe Lasten oder Fluidfüllungen sind rechentechnisch günstig über ein modifiziertes Bogenlängenverfahren bestimm-

bar. Der Stabilitätseinfluß des Fluids zeigt sich in der Verschiebung von kritischen Lasten und kann analytisch durch die Eigenwertverschiebung oder Determinantenänderung belegt werden, was bei voll diskretisierten Verfahren nicht möglich ist. Die beigefügten Beispiele belegen, daß bei großen Verformungen nur die vollständige Kopplung von Fluid und Struktur zu korrekten Ergebnissen führt. Die vorliegenden Entwicklungen erlauben nun auch die effiziente Modellierung von deformierbaren geschlossenen Behältern, die partiell mit einer Flüssigkeit und mit einem Gas gefüllt sind.

Literaturverzeichnis

- [Anw67] ANWAR, H.O.: *Inflatable Dams*. In: *Journal of the Hydraulics Division*, Band 93, Seiten 99–119, 1967.
- [AR52] ADKINS, J.E. und R.S. RIVLIN: *Large Elastic Deformations of Thin Shells, IX The Deformation of Thin Shells*. *Phil. Trans. R. Soc., Ser A*, 244:505–531, 1952.
- [Buf84] BUFLER, H.: *Pressure Loaded Structures under Large Deformations*. *ZAMM*, 64(7):287 – 295, 1984.
- [Buf85] BUFLER, H.: *Zur Potentialeigenschaft der von einer Flüssigkeit herrührenden Druckbelastung*. *ZAMM*, 65(4):130 – 132, 1985.
- [Buf92] BUFLER, H.: *Konsistente und inkonsistente Druckbelastungen durch Flüssigkeiten*. *ZAMM*, 72(7):T172 – T175, 1992.
- [Buf93] BUFLER, H.: *Configuration Dependent Loading and Nonlinear Elastomechanics*. *ZAMM*, 73:4 – 5, 1993.
- [BWMH00] BONET, J., R.D. WOOD, J. MAHANEY und P. HEYWOOD: *Finite element analysis of air supported membrane structures*. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 190:579–595, 2000.
- [BY96] BERRY, D.T. und H.T.Y. YANG: *Formulation and Experimental Verification of a Pneumatic Finite Element*. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39:1097–1114, 1996.
- [CL63] COMER, R.L. und S. LEVY: *Deflections of an Inflated Circular Cantilever Beam*. *American Institut of Aeronautics and Astronautics, AIAA*, 1(7):1652–1655, 1963.
- [Cri81] CRISFIELD, M.A.: *A fast incremental/iterative solution procedure that handles snap-through*. *Computer & Structures*, 13:55–62, 1981.
- [dB82] BOER, R. DE: *Vektor- und Tensorrechnung für Ingenieure*. Springer Verlag, Berlin, 1982.

- [DHW01] DINKLER, D., B. HÜBNER und E. WALHORN: *Analysis of fluid-structure interaction using stabilized space-time finite elements*. In: W.A. WALL, K.-U. BLETZINGER, K. SCHWEIZERHOF (Herausgeber): *Trends in Computational Structural Mechanics*, Seiten 660–669, Barcelona, Spain, 2001. International Center for Numerical Methods in Engineering (CIMNE).
- [Fir83] FIRT, V.: *Statics, Formfinding and Dynamics of Air-Supported Membrane Structures*. Martinus Nijhoff Publisher, The Hague, Boston, London, 1983.
- [GA60] GREEN, A.E. und J.E. ADKINS: *Large Elastic Deformations*. Oxford University Press, Amen House, London, 1960.
- [GF97] GAUL, L. und C. FIEDLER: *Methode der Randelemente in Statik und Dynamik*. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig/Wiesbaden, 1997.
- [Gor88] GORDON, J.E.: *The Science of Structures and Materials*. Scientific American Books, New York, 1988.
- [Had00] HADDOW, J.B.: *Inflation and deflation of pseudo-elastic spherical shell*. *Int. Journal of Non-Linear Mechanics*, 35:481–486, 2000.
- [HKS98] HIBBIT, KARLSSON und SORENSEN: *ABAQUS/Standard User's Manual*, Band 1. Hibbit, Karlsson & Sorensen, Inc., 1998.
- [HS98] HAUPTMANN, R. und K. SCHWEIZERHOF: *A systematic development of "solid-shell" element formulations for linear and non-linear analyses employing only displacement degrees of freedom*. *Int.J.Num.Meth.Eng.*, 42:49–69, 1998.
- [HT00] HALLQUIST, J.O. und C.S. TSAY: *LS-DYNA, Theoretical Manual, Nonlinear Dynamic Analysis of Structures, vs. 950*. Livermore Software Corp., Livermore, California, 2000.
- [KD85] KRÖPLIN, B.H. und D. DINKLER: *Quasi viscous analysis and arc-length-method. A comparison*. In: *NUMETA Conference*, Seiten 743–747, Swansea, 1985.
- [KHdB01] KUHL, E., S. HULSHOFF und R. DE BORST: *A comparison of coupled and partitioned solution strategies for fluid structure interaction phenomena*. In: W.A. WALL, K.-U. BLETZINGER, K. SCHWEIZERHOF (Herausgeber): *Trends in Computational Structural Mechanics*, Seiten 670–679, Barcelona, Spain, 2001. International Center for Numerical Methods in Engineering (CIMNE).
- [KL00] KOUNADIS, A.N. und X.A. LIGNOS: *Buckling of tube-like shells filled with other material under uniform axial compression*. *Engineering Structures*, 22:961–967, 2000.

- [KN02] KATSIKADELIS, J.T. und M.S. NERANTZAKI: *The ponding problem on elastic membranes: an analog equation solution*. Computational Mechanics, 28:122–128, 2002.
- [Kne97] KNEBEL, K.: *Stabilität von Stahlzylindern mit unilateralen Randbedingungen bei statischen und dynamischen Beanspruchungen*. Universität Karlsruhe, 1997.
- [MNF01] MAUTE, K., M. NIKBAY und C. FARHAT: *Large-scale optimization of aeroelastic systems*. In: W.A. WALL, K.-U. BLETZINGER, K. SCHWEIZERHOF (Herausgeber): *Trends in Computational Structural Mechanics*, Seiten 613–622, Barcelona, Spain, 2001. International Center for Numerical Methods in Engineering (CIMNE).
- [MO95] MORAND, H.J.-P. und R. OHAYON: *Fluid Structure Interaction*. John Wiley & Sons, Masson, Paris, 1995.
- [MS99] MÜLLER, I. und P. STREHLOW: *Physik von Luftballons*. Phys. Bl., 55(2):37–41, 1999.
- [NEA02] NG, T.-T., P. E und M. ASCE: *Edge Effects in Pressurized Membranes*. Journal of Engineering Mechanics, 128(10):1001–1005, 2002.
- [OK67] ODEN, J.T. und W.K. KUBITZA: *Numerical analysis of nonlinear pneumatic structures*. In: *Proc. of the first international colloquium on pneumatic structures, IASS*, Seiten 87–107, University of Stuttgart, 1967.
- [Pai98] PAIDOUSSIS, M.P.: *Fluid Structure Interaction - Slender structures and axial Flow*. Academic Press, San Diego, 1998.
- [Pea56] PEARSON, C. E.: *General Theory of Elastic Stability*. Quart. Appl. Math., 14:133–144, 1956.
- [PF88] PLAUT, R.H. und T.D. FAGAN: *Vibrations of an Inextensible, Air-Inflated, Cylindrical Membrane*. Journal of Applied Mechanics, 55:672–675, 1988.
- [Pri71] PRICE, C.: *Air Structures - A Survey*. HMSO, London, 1971.
- [Ram80] RAMM, E.: *Strategies for tracing the nonlinear response near limit points*. In: K.J. BATHE, E. STEIN und W. WUNDERLICH (Herausgeber): *Europe-US-Workshop on Nonlinear Finite Elements Analysis in Structural Mechanics*, Seiten 63–89, Berlin, 1980. Springer.
- [RDOJ87a] RODDEMAN, D.G., J. DRUKKER, C.W.J. OOMENS und J.D. JANSEN: *The Wrinkling of Thin Membranes: Part I - Theory*. Journal of Applied Mechanics, 54:884–885, 1987.

- [RDOJ87b] RODDEMAN, D.G., J. DRUKKER, C.W.J. OOMENS und J.D. JANSEN: *The Wrinkling of Thin Membranes: Part II - Numerical Analysis*. Journal of Applied Mechanics, 54:888–892, 1987.
- [RG98] RICHES, C.G. und P.D. GOSLING: *Pneumatic structures: A review of concepts, applications and analytical methods*. In: *Proceedings of the IASS International Congress '98, Lightweight Structures in Architecture, Engineering and Construction*, Seiten 874–882, 1998.
- [Rik79] RIKS, E.: *An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems*. Inter. J. Solids and Structures, 15:529–551, 1979.
- [Rom72] ROMANO, G.: *Potential Operators and Conservative Systems*. Meccanica, 7:141–146, 1972.
- [RS01] RUMPEL, T. und K. SCHWEIZERHOF: *Volume dependent pressure loading and large deformation problems*. In: W.A. WALL, K.-U. BLETZINGER, K. SCHWEIZERHOF (Herausgeber): *Trends in Computational Structural Mechanics*, Seiten 386–396, Barcelona, Spain, 2001. International Center for Numerical Methods in Engineering (CIMNE).
- [RS02] RUMPEL, T. und K. SCHWEIZERHOF: *Volumenabhängige Druckbelastung bei großen Deformationen*. Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics (PAMM), 1(1):232–233, 2002.
- [RS03a] RUMPEL, T. und K. SCHWEIZERHOF: *Finite element analysis of liquid filled structures under gravity loading*. Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics (PAMM), 2003. in press.
- [RS03b] RUMPEL, T. und K. SCHWEIZERHOF: *Hydrostatic fluid loading in nonlinear finite element analysis*. International Journal of Numerical Methods in Engineering, 2003. in press.
- [RS03c] RUMPEL, T. und K. SCHWEIZERHOF: *On an efficient Model for Gas and Fluid supported Membranes and Shell Structures*. In: E. ONATE, B. KRÖPLIN (Herausgeber): *Textile Composites and Inflatble Structures*, Barcelona, Spain, 2003. International Center for Numerical Methods in Engineering (CIMNE).
- [RS03d] RUMPEL, T. und K. SCHWEIZERHOF: *Volume-dependent pressure loading and its influence on the stability of structures*. International Journal of Numerical Methods in Engineering, 56:211–238, 2003.
- [Sch82] SCHWEIZERHOF, K.: *Nichtlineare Berechnung von Tragwerken unter verformungsabhängiger Belastung*. Universität Stuttgart, 1982.
- [Sch89] SCHWEIZERHOF, K.: *Quasi - Newton Verfahren und Kurvenverfolgungsalgorithmen für die Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme in der Strukturmechanik*. Institut für Baustatik, Universität Karlsruhe, 1989.

- [Sch90] SCHNEIDER, H.: *Flüssigkeitsbelastete Membranen unter großen Deformationen*. Universität Stuttgart, 1990.
- [Sch98] SCHNEIDER, S.P.: *Flexural Capacity of Pressurized Steel Pipe*. Journal of Structural Engineering, 124(3):330–340, 1998.
- [Sew66] SEWELL, M. J.: *On Configuration-Dependent Loading*. Arch. Rational Mech. Anal., 23:327–351, 1966.
- [SM49] SHERMAN, J. und W.J. MORRISON: *Adjustment of an inverse matrix corresponding to changes in a given column or a given row of original matrix*. The Annals of Mathematical Statistics, 21:124, 1949.
- [SM91] SCHWEIZERHOF, K. und MITARBEITER: *FEAP 2003*. Basierend auf: A Finite Element Analysis Programm, Taylor, R.L., University of Berkley, 1991.
- [Smi64] SMIRNOW, W. I.: *Lehrgang der höheren Mathematik*, Band 2. VEB, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1964.
- [SNOSA86] SCHWEIZERHOF, K., B. NOUR-OMID, J.L. SACKMAN und U. ANDELINGER: *Efficient Analysis of Floor Response Spectra for Light and Heavy Secondary Structures Including Interaction*, 1986.
- [SR84] SCHWEIZERHOF, K. und E. RAMM: *Displacement Dependent Pressure Loads in Nonlinear Finite Element Analyses*. Computers & Structures, 18(6):1099–1114, 1984.
- [SW86] SCHWEIZERHOF, K. und P. WRIGGERS: *Consistent linearisation for path following methods in nonlinear FE analysis*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 59:261–279, 1986.
- [Tam98] TAM, P.W.M.: *Use of Inflatable Dams as Agricultural Weirs in Hong Kong*. Journal of Hydraulic Engineering, 124(12):1215–1226, 1998.
- [Top64] TOPPING, A.D.: *Shear Deflections and Buckling Characteristics of Inflated Members*. Journal of Aircraft, 1(5):189–292, 1964.
- [vDCM03] DESSEL, S. VAN, A.R. CHINI und A. MESSAC: *Feasibility of Rigidified Inflatable Structures for Housing*. Journal of Engineering Mechanics, 9(1):1–10, 2003.
- [VKDP99] VERRON, E., R.E. KHAYAT, A. DERDOURI und B. PESEUX: *Dynamic inflation of hyperelastic spherical membranes*. Journal of Rheology, 43(5):1083–1097, 1999.
- [Wei68] WEISSENBURGER, J.T.: *Effect of Local Modifications on the Vibration Characteristics of Linear Systems*. Journal of Applied Mechanics, 35:327–332, 1968.

- [WP91] WAUER, J. und R.H. PLAUT: *Vibrations of an Extensible, Air-Inflated, Cylindrical Membrane*. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, ZAMM, 71(3):191, 1991.
- [WP96] WU, P.-H. und R.H. PLAUT: *Analysis of the Vibration of Inflatible Dams under Overflow Conditions*. Thin Walled Structures, 26(4):241–259, 1996.
- [WR98] WALL, W.A. und E. RAMM: *Fluid-structure interaction based upon a stabilized (ALE) finite element methode*. In: *Sonderforschungsbe- reich 404, Mehrfeldprobleme in der Kontinuumsmechanik*, Band 16. Universität Stuttgart, 1998.
- [Wu71] WU, C.H.: *On certain integrable nonlinear membrane solutions*. Quarterly of Applied Mathematics, 28:81–90, 1971.
- [Wu73a] WU, C.H.: *Ellipsoidlike Deformations of Tubelike Balloons - Asym- ptotic Solution with Boundary Layer*. Journal of Applied Mecha- nics, 2:569–574, 1973.
- [Wu73b] WU, C.H.: *Spherelike deformations of a balloon*. Quarterly of Ap- plied Mathematics, 30:183–194, 1973.
- [Wu74] WU, C.H.: *The wrinkled axisymmetric air bag made of inextensible membrane*. Journal of Applied Mechanics, 4:963–973, 1974.
- [Wu78] WU, C.H.: *Nonlinear wrinkling of nonlinear membranes of revolu- tion*. Journal of Applied Mechanics, 45:533–538, 1978.
- [WWM88] WRIGGERS, P., W. WAGNER und C. MIEHE: *A quadratically con- vergent procedure for the calculation of stability points in finite ele- ment analysis*. In: *IBNM Bericht*, Band 88, Universität Hannover, 1988. Institut für Baumechanik and Numerische Mechanik.
- [YMY72] YOKOO, Y., H. MATSUNAGA und Y. YOKOYAMA: *On the beha- vour of wrinkled regions of pneumatic membranes, in the form of a surface of revolution under symmetrical loading*. In: JAPAN, ARCHI- TECTURAL INSTITUTE OF (Herausgeber): *IASS Pacific Symposiom Part II on Tension Structures and Space Frames*, Seiten 177–188, 1972.
- [ZF84] ZURMÜHL, R. und S. FALK: *Matrizen und ihre Anwendungen*, Band 1. Springer Verlag, Berlin, 1984.
- [Zie68] ZIELKE, G.: *Inversion of modified symmetric matrices*. J. Assoc. Comput. Mach., 15:402–408, 1968.
- [Zie70] ZIELKE, G.: *Numerische Berechnung von benachbarten inversen Matrizen und linearen Gleichungssystemen*, Band 2. Friedr. Vieweg + Sohn, Braunschweig, 1970.

- [ZT00] ZIENKIEWICZ, O.C. und R.L. TAYLOR: *The Finite Element Method - Solid and Fluid Mechanics, Dynamics and Non-Linearity*, Band 2. McGraw-Hill Book Company, London, 2000.
- [ZT01] ZHAO, Y. und J.G. TENG: *Buckling Experiments on Cone-Cylinder Intersections under Internal Pressure*. *Journal of Engineering Mechanics*, 127(12):1231–1239, 2001.

Lebenslauf von Thorsten Rumpel

Persönliche Daten

geb. am 11. Mai 1970 in Würzburg
verheiratet, zwei Kinder

Schulbildung

09.82-07.86 Woffskeel-Realschule Würzburg
Mittlere Reife
09.89-07.91 Franz-Oberthür-Schule Würzburg
Fachgebundene Hochschulreife

Berufsausbildung

09.86-08.89 Ausbildung zum Kraftfahrzeug Mechaniker
Gesellenbrief

Studium

10.92-07.98 Allgemeiner Maschinenbau
an der Universität Karlsruhe (TH)
09.95-07.97 École National Supérieur d'Arts et Métiers (ENSAM)
in Bordeaux und Paris
Deutsch-Französisches Maschinenbaudiplom
Auszeichnung für die Diplomarbeit:
Hermann-Billing-Preis 1999

Berufstätigkeit

10.98-12.03 Wissenschaftlicher Angestellter am
Institut für Technische Mechanik
der Universität Karlsruhe (TH)