Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. P. Betsch
Prof. Dr.-Ing. Th. Seelig

Klausur ,,Einführung in die Kontinuumsmechanik"
26. Juli 2016

Aufgabe 1 (ca. 25 % der Gesamtpunktzahl)

In einem Punkt eines Körpers ist der Spannungszustand durch folgenden Spannungstensor bzgl. einer Basis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ gegeben:

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 100 & 250 & 0 \\ 250 & 200 & 0 \\ 0 & 0 & 300 \end{bmatrix}. \qquad [N/mm^2]$$

a) Wie lautet der Spannungsvektor auf der Schnittebene mit dem Normalenvektor
$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e_1} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{e_2}$?

b) Wie groß sind die Hauptspannungen?

c) Wie lautet der Kugeltensor?

d) Wie lautet der Deviator und was muss für die Spur des Deviators gelten?

Musterlösung - Aufgabe 1

a)

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -150 \\ 50 \\ 0 \end{bmatrix} MPa$$

b)

$$\det(\boldsymbol{\sigma} - \sigma\ \boldsymbol{I}) \overset{!}{=} 0 \qquad \Rightarrow (300-\sigma) \cdot ((100-\sigma)(200-\sigma) - 250) \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \sigma_1 = 404,95 \qquad \sigma_2 = 300 \qquad \sigma_3 = -104,95 \qquad [MPa]$$

c) Kugeltensor

$$\boldsymbol{\sigma}^o = \frac{\mathrm{sp}(\boldsymbol{\sigma})}{3} \boldsymbol{I} = 200\ \boldsymbol{I} [MPa]$$

d)

$$\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^o = \begin{bmatrix} 100-200 & 250 & 0 \\ 250 & 200-200 & 0 \\ 0 & 0 & 300-200 \end{bmatrix} [MPa]$$

$$= \begin{bmatrix} -100 & 250 & 0 \\ 250 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 \end{bmatrix} [MPa]$$

Institut für Mechanik	Klausur ,,Einführung in die
Prof. Dr.-Ing. P. Betsch	Kontinuumsmechanik"
Prof. Dr.-Ing. Th. Seelig	26. Juli 2016

Aufgabe 2 (ca. 15 % der Gesamtpunktzahl)

a) Zeigen Sie, dass für einen ebenen (2D) Deformationszustand mit den kinematischen Beziehungen

$$\varepsilon_{11} = u_{1,1} \qquad \varepsilon_{22} = u_{2,2} \qquad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2}(u_{1,2} + u_{2,1})$$

die Kompatibilitätsbedingung durch

$$2\varepsilon_{12,12} - \varepsilon_{11,22} - \varepsilon_{22,11} = 0$$

gegeben ist.

b) Gegeben ist folgender Tensor 2. Stufe:

$$[\boldsymbol{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^3 & a x_1^2 x_2 + b x_1 x_2^2 \\ a x_1^2 x_2 + b x_1 x_2^2 & x_1^3 + x_2^2 \end{bmatrix}$$

Welcher Zusammenhang muss zwischen a und b gelten, damit es sich bei diesem Tensor um einen Verzerrungstensor handelt?

Musterlösung - Aufgabe 2

a)

$$2\varepsilon_{12,12} - \varepsilon_{11,22} - \varepsilon_{22,11} \overset{!}{=} 0$$
$$\Rightarrow 2 \cdot \frac{1}{2}\left(u_{1,212} + u_{2,112}\right) - u_{1,122} - u_{2,211} \overset{!}{=} 0$$

Satz von Schwarz:

$$u_{j,jll} = \frac{\partial^3 u_j}{\partial x_j \partial x_l \partial x_l} = \frac{\partial^3 u_j}{\partial x_l \partial x_l \partial x_j} = \frac{\partial^3 u_j}{\partial x_l \partial x_j \partial x_l}$$

$$\Rightarrow u_{1,122} - u_{1,122} + u_{2,211} - u_{2,211} = 0$$
$$0 + 0 = 0 \qquad \checkmark$$

b)

$$[\boldsymbol{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^3 & a x_1^2 x_2 + b x_1 x_2^2 \\ a x_1^2 x_2 + b x_1 x_2^2 & x_1^3 + x_2^2 \end{bmatrix}$$

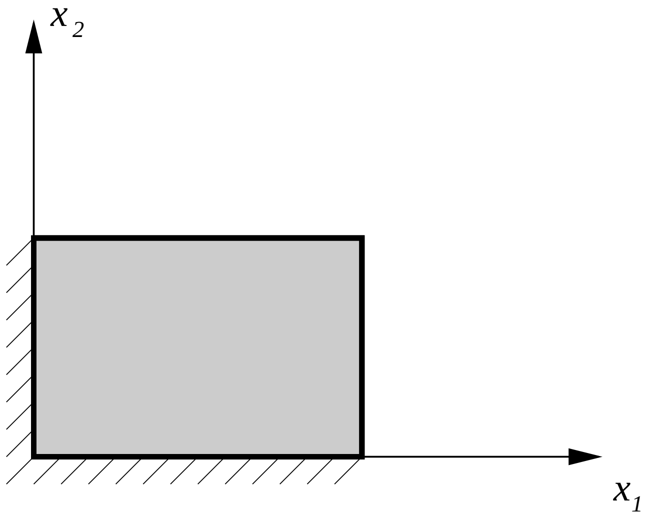
Kompatibilitätsbedingung prüfen:

$$2\varepsilon_{12,12} - \varepsilon_{11,22} - \varepsilon_{22,11} \overset{!}{=} 0$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11,2} &= 3x_2^2 & &\Rightarrow \varepsilon_{11,22} = 6x_2 \\ \varepsilon_{22,1} &= 3x_1^2 & &\Rightarrow \varepsilon_{22,11} = 6x_1 \\ \varepsilon_{12,1} &= 2a x_1 x_2 + b x_2^2 & &\Rightarrow \varepsilon_{12,12} = 2a x_1 + 2b x_2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 4a x_1 + 4b x_2 - 6x_1 - 6x_2 \overset{!}{=} 0$$
$$x_1(4a - 6) + x_2(4b - 6) \overset{!}{=} 0 \qquad \forall x_1, x_2$$
$$\Rightarrow a = \frac{3}{2} \qquad b = \frac{3}{2}$$

Aufgabe 3 (ca. 25 % der Gesamtpunktzahl)



Eine längs der x_1- und x_2-Achse fest eingespannte Rechteckscheibe sei durch das Aufbringen einer äußeren Last in der x_1,x_2-Ebene beansprucht. Auf der Basis von Messungen werden für die Verzerrungen folgende Ansätze vorgeschlagen:

$$\varepsilon_{11}(x_1, x_2) = a(x_1^2 x_2 + x_2^3)$$

$$\varepsilon_{22}(x_1, x_2) = b x_1 x_2^2$$

a, b : Konstanten

a) Bestimmen Sie das Verschiebungsfeld $u_1(x_1, x_2)$, $u_2(x_1, x_2)$.

b) Bestimmen Sie die Schubverzerrung $\varepsilon_{12}(x_1, x_2)$.

c) Zeigen bzw. begründen Sie, dass die Konstanten a und b frei wählbar sind.

Musterlösung - Aufgabe 3

a)

$$\varepsilon_{11} = u_{1,1} \Rightarrow u_1 = \int \varepsilon_{11} \mathrm{d}x_1 = \int a(x_1^2 x_2 + x_2^3) \mathrm{d}x_1 = a \left(\frac{x_1^3}{3} x_2 + x_2^3 x_1 \right) + C_1(x_2)$$

$$\varepsilon_{22} = u_{2,2} \Rightarrow u_2 = \int \varepsilon_{22} \mathrm{d}x_2 = b \int x_1 x_2^2 \mathrm{d}x_2 = b x_1 \frac{x_2^3}{3} + C_2(x_1)$$

Randbedingungen:

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2 = 0) &= 0 \qquad u_2(x_1, x_2 = 0) = 0 \qquad (\mathrm{I}) \\ u_2(x_1 = 0, x_2) &= 0 \qquad u_1(x_1 = 0, x_2) = 0 \qquad (\mathrm{II}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mathrm{I}): &\qquad u_2(x_1, x_2 = 0) = C_2(x_1) \stackrel{!}{=} 0 &&\Rightarrow C_2(x_1) = 0 \\ (\mathrm{II}): &\qquad u_1(x_1 = 0, x_2) = C_1(x_2) \stackrel{!}{=} 0 &&\Rightarrow C_1(x_2) = 0 \\ & &&\Rightarrow u_1(x_1, x_2) = a \left(\frac{x_1^3}{3} x_2 + x_2^3 x_1 \right) \\ & &&\quad\; u_2(x_1, x_2) = b x_1 \frac{x_2^3}{3} \end{aligned}$$

b)

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = \frac{1}{2} \left(a(\frac{1}{3} x_1^3 + 3 x_1 x_2^2) + \frac{1}{3} b x_2^3 \right)$$

c) Kompatibilitätsbedingung:

$$2\varepsilon_{12,12} - \varepsilon_{11,22} - \varepsilon_{22,11} \stackrel{!}{=} 0 \qquad (1)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11,22} &= 6 a x_2 \\ \varepsilon_{22,11} &= 0 \\ \varepsilon_{12,12} &= \frac{1}{2} a (6 x_2) \end{aligned}$$

in (1): $\qquad 6 a x_2 - 0 - 6 a x_2 = 0 \qquad \forall\ a, b$

$\Rightarrow$ Kompatibilitätsbedingung für alle a und b erfüllt

Aufgabe 4 (ca. 20 % der Gesamtpunktzahl)

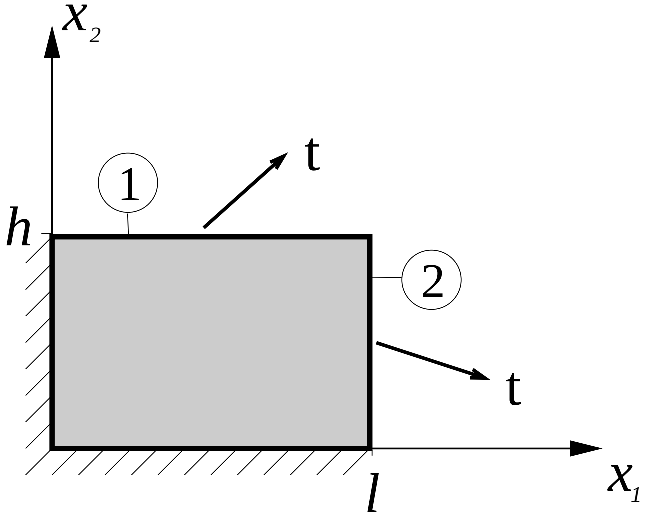
Gegeben seien die kartesischen Komponenten eines 2-dimensionalen Spannungsfeldes:

$$\sigma_{11}(x_1, x_2) = Ax_1x_2^2$$
$$\sigma_{12}(x_1, x_2) = Bx_1$$
$$\sigma_{22}(x_1, x_2) = Cx_2$$

A, B, C : Konstanten

a) Welche Bedingungen müssen die Parameter A, B und C erfüllen, damit bei Abwesenheit von Volumenkräften die lokalen Gleichgewichtsbedingungen erfüllt sind?

b) Im Inneren der skizzierten links und unten fest eingespannten Rechteckscheibe liege das obige Spannungsfeld vor. Geben Sie die kartesischen Komponenten des Spannungsvektors $\mathbf{t}$ auf den beiden Rändern 1 $x_2 = h$ und 2 mit $x_1 = l$ an.



Musterlösung - Aufgabe 4

a) lokales Gleichgewicht ohne Volumenkraftdichten: $\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \sigma_{ij,j} = 0$

$$\sigma_{11,1} = Ax_2^2 \quad , \sigma_{12,2} = 0 \qquad \Rightarrow \sigma_{11,1} + \sigma_{12,2} = Ax_2^2 + 0 \overset{!}{=} 0$$
$$\sigma_{21,1} = B \quad , \sigma_{22,2} = C \qquad \Rightarrow \sigma_{21,1} + \sigma_{22,2} = B + C \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow A = 0 \quad B = -C$$

b)

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$$

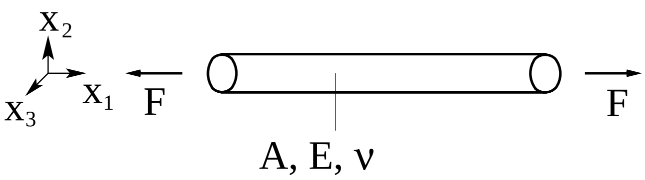
1)

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad x_2 = h \qquad \Rightarrow \mathbf{t} = \begin{bmatrix} Bx_1 \\ Ch \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} x_1 \\ -h \end{bmatrix}$$

2)

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad x_1 = l \qquad \Rightarrow \mathbf{t} = \begin{bmatrix} Alx_2^2 \\ Bl \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} 0 \\ Bl \end{bmatrix}$$

Aufgabe 5 (ca. 15 % der Gesamtpunktzahl)



Der dargestellte Stab sei durch die Kraft F belastet.
Geben Sie die Volumenänderungsenergie U_V, die Gestaltsänderungsenergie U_G sowie deren Verhältnis U_V/U_G in Abhängigkeit von ν an.

Musterlösung - Aufgabe 5

$$U_V = \frac{1}{6}\sigma_{kk}\varepsilon_{ll} \qquad \text{Isotropie:} \quad U_V = \frac{1}{2}K\varepsilon_V^2\ , \quad K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$
$$U_G = \frac{1}{2}s_{ij}e_{ij} \qquad\qquad U_G = Ge_{ij}e_{ij}\ , \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

einachsiger Spannungszustand:

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_1 \mathbf{e_1} \otimes \mathbf{e_1} = \frac{F}{A}\mathbf{e_1} \otimes \mathbf{e_1}$$

Elastizitätsgesetz:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij}$$

$$[\boldsymbol{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} \frac{1+\nu}{E}\sigma_1 - \frac{\nu}{E}\sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\nu}{E}\sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\nu}{E}\sigma_1 \end{bmatrix}$$

$$(1) \quad \mathrm{sp}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \sigma_1\left(\frac{1+\nu}{E} - 3\frac{\nu}{E}\right) = \sigma_1\left(\frac{1-2\nu}{E}\right) = \varepsilon_V$$
$$\Rightarrow U_V = \frac{1}{2}\frac{E}{3(1-2\nu)} \cdot \frac{(1-2\nu)^2}{E^2}\sigma_1^2 = \frac{\sigma_1^2}{6} \cdot \frac{1-2\nu}{E}$$

$$(2) \quad \mathbf{e} = \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{3}\mathrm{sp}(\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{1} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_1}{E} - \frac{\sigma_1}{3}\left(\frac{1-2\nu}{E}\right) & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_1\left(-\frac{\nu}{E} - \frac{1}{3}\left(\frac{1-2\nu}{E}\right)\right) & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_1\left(-\frac{\nu}{E} - \frac{1}{3}\left(\frac{1-2\nu}{E}\right)\right) \end{bmatrix}$$

$$e_{ij}e_{ij} = \left(\frac{\sigma_1}{e}\right)^2\left(\frac{4}{9}(1+\nu)^2 + 2\cdot\frac{1}{9}(\nu+1)^2\right) = \frac{\sigma_1^2}{E^2}\frac{2}{3}\left(\nu+1\right)^2$$
$$\Rightarrow U_G = \frac{E}{2(1+\nu)} \cdot \frac{\sigma_1^2}{E^2} \cdot \frac{2}{3}(1+\nu)^2 = \frac{\sigma_1^2}{3E}(1+\nu)$$

$$\frac{U_V}{U_G} = \frac{\frac{\sigma_1^2}{6}\left(\frac{1-2\nu}{E}\right)}{\frac{\sigma_1^2}{3E}(1+\nu)} = \frac{1-2\nu}{2(1+\nu)}$$