Klausur

Baudynamik

27. Juli 2020

Name: .... Vorname: ....

Matr.-Nr: .... Studiengang: ....

Hinweise:

- Bitte schreiben Sie deutlich lesbar. Zeichnungen müssen sauber und übersichtlich sein. Die Benutzung roter und grüner Farbstifte ist nicht zugelassen.
- Aufgaben werden nur beurteilt, wenn sie auf den ausgegebenen Blättern gelöst sind. Eventuell abgegebene Formelsammlungen werden als nicht vorhanden betrachtet. Trennen Sie die Aufgabenblätter nicht auf.
- Bei den Aufgaben muss eindeutig der Lösungsweg erkennbar sein. Ein Ergebnis ohne Lösungsweg wird nicht bewertet. Sollten für eine Aufgabe mehrere widersprüchliche Lösungen angegeben sein, so wird keine bewertet. Streichen Sie deshalb falsche Rechenschritte oder Zeichnungen durch.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite.

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
Punkte					
Korrektor					

(Eintrag erfolgt durch Institut)

1. Aufgabe: (ca. 24% der Gesamtpunkte)

a) Zeichnen Sie das Amplitudenspektrum einer periodischen und einer nicht-periodischen Schwingung. Erläutern Sie den Unterschied.

b) Bei einem Feder-Masse-Dämpfer-System (DGL: $m\ddot{x} + d\dot{x} + cx = 0$) mit der Masse m und Federsteifigkeit c beträgt die Amplitude nach $n = 15$ Schwingungszyklen ein Fünftel des Anfangswertes. Wie groß ist die Dämpfungskonstante d?

c) Was versteht man unter aktiver und passiver Schwingungsisolierung?

d) Wie kann die niedrigste Eigenfrequenz eines Systems ohne Aufstellung des Eigenwertproblems der Koeffizientenmatrix des Systems, abgeschätzt werden (Formel und Erklärung)?

e) Für ein mechanisches System ist folgende Differentialgleichung gegeben

$$\ddot{x} + \frac{K}{M}\,x = 0$$

Unter welcher Voraussetzung handelt es sich bei der Ruhelage $x = 0$ um ein stabiles Gleichgewicht?

f) Geben Sie Amplitude, Frequenz und Phasenverschiebung der Schwingung

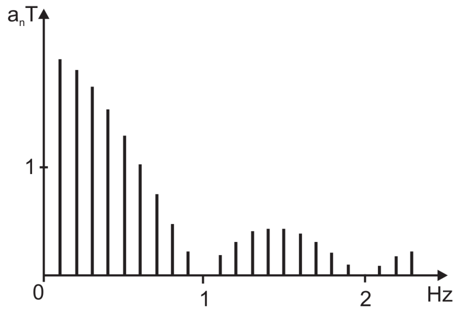
$$x(t) = 5\sin(3\pi t) + 6\cos(3\pi t)$$

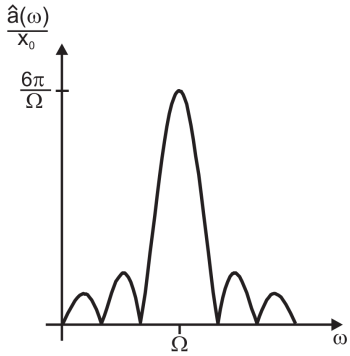
an.

Musterlösung - Aufgabe 1

a) Periodische Schwingung — Nicht-periodische Schwinung

Linienspektrum (diskontinuierlich) — kontinuierliches Spektrum





Beispielhafte Abbildungen für Amplitudenspektren einer periodischen (links) und nicht-periodischen (rechts) Schwingung aus Skriptum „Grundlagen der Baudynamik".

b) geg.: $x_{15} = \frac{1}{5}x_0$

logarithmisches Dekrement

$$\delta = \frac{1}{n}\ln(\frac{x_n}{x_{n+1}}) = \frac{1}{15}\ln(\frac{x_0}{x_{15}}) = \frac{1}{15}\ln(5)$$
$$= \frac{2\pi D}{\sqrt{1-D^2}}$$

$$\Leftrightarrow (1-D^2)\,\delta^2 = (2\pi D)^2 \quad \Leftrightarrow \quad D^2(4\pi^2+\delta^2) = \delta^2 \quad \Leftrightarrow \quad D = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2+\delta^2}} = 0.0171$$

$$\Rightarrow d = 2m\omega_0 D = 2\sqrt{mc}D = 0.0341\sqrt{cm}$$

c) Ziel der passiven Schwingungsisolierung: Schutz eines Schwingers (Gebäudes) vor Belastungen infolge Fundamenterregungen.

Ziel der aktiven Schwingungsisolierung: Abschirmung von Maschinen (unwuchterregter Schwinger) vom Fundament.

d) Durch den Rayleighquotienten mit

$$R = \frac{\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\,\boldsymbol{\varphi}}{\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\,\boldsymbol{\varphi}} \geq \omega_1^2$$

wobei $\boldsymbol{\varphi}$ eine Schätzung für den ersten Eigenvektor ist.

e)

$$K > 0$$

f) Amplitude: $A = \sqrt{5^2+6^2} = \sqrt{61} = 7.81$

Frequenz: $\omega = 3\pi \qquad \Rightarrow \qquad f = \dfrac{\omega}{2\pi} = \frac{3}{2}$

Phasenverschiebung: $\varphi = \arctan\left(\dfrac{5}{6}\right)$

2. Aufgabe: (ca. 16% der Gesamtpunkte)

Gegeben sei folgende $2\,\pi$-periodische Funktion:

$$\begin{cases} f(t) = \cos(\frac{t}{2}) & \text{für} \quad -\pi \leq t < \pi, \\ f(t + 2\,\pi) = f(t) & \text{für} \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

a) Skizzieren Sie die Funktion auf dem Intervall $[-2\,\pi, 2\,\pi]$.

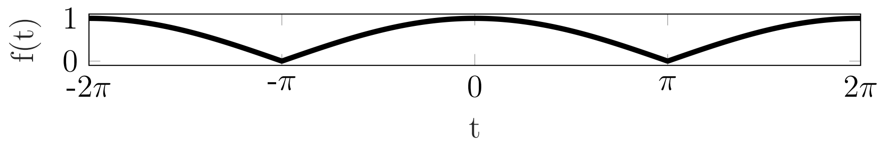
b) Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten von $f(t)$.

Hinweis:

$$\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)\right)$$
$$\sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)\right)$$

Musterlösung - Aufgabe 2

a)



b) Fourier-Reihe

$$f_e(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\underbrace{C_k}_{a_k} \cos(k\,\omega\,t) + \underbrace{S_k}_{b_k} \sin(k\,\omega\,t) \right]$$

$f(t)$ ist eine gerade Fkt. $f(t) = -f(-t)\ \forall t \in \mathbb{R}$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \underbrace{f(t)}_{\text{gerade}}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2\,\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\frac{1}{2}\,t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\ \sin(\frac{1}{2}\,t)|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi}\,(1+1) = \frac{2}{\pi}$$

$$a_k = C_k = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \underbrace{f(t)}_{\text{gerade}}\ \underbrace{\cos(k\,\omega\,t)}_{\text{gerade}}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\frac{1}{2}\,t)\ \cos(k\,t)\ \mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2\,\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos((k+\frac{1}{2})\,t) + \cos((k-\frac{1}{2})\,t)\ \mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2\,\pi}\,(\frac{1}{k+\frac{1}{2}}\ \sin((k+\frac{1}{2})\,t) + \frac{1}{k-\frac{1}{2}}\ \sin((k-\frac{1}{2})\,t))|_{-\pi}^{\pi}$$

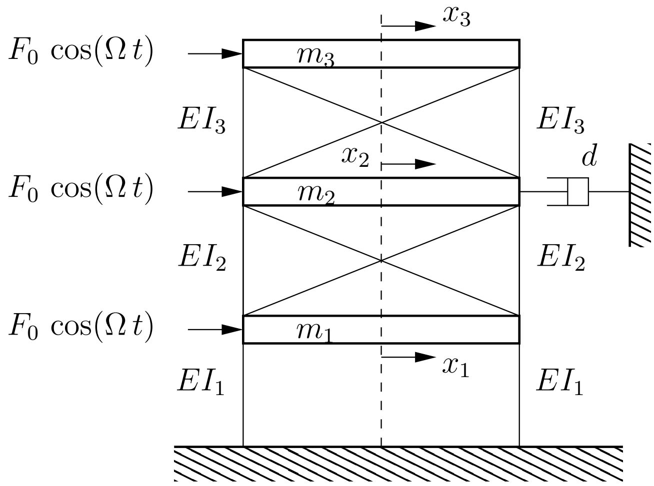
$$= \frac{1}{2\,\pi}\,(\frac{(-1)^k}{k+\frac{1}{2}} + \frac{(-1)^{k-1}}{k-\frac{1}{2}} - \frac{(-1)^{k+1}}{k+\frac{1}{2}} - \frac{(-1)^k}{k-\frac{1}{2}})$$

$$= \frac{(-1)^k}{2\,\pi}\,(\frac{1}{k+\frac{1}{2}} - \frac{1}{k-\frac{1}{2}} + \frac{1}{k+\frac{1}{2}} - \frac{(-1)^k}{k-\frac{1}{2}}) = \frac{(-1)^{k+1}}{(k^2-\frac{1}{4})\,\pi}$$

$$b_k = S_k = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \underbrace{f(t)}_{\text{gerade}}\ \underbrace{\sin(k\,\omega\,t)}_{\text{ungerade}}\ \mathrm{d}t = 0$$

3. Aufgabe: (ca. 26% der Gesamtpunkte)

Der skizzierte Stockwerkrahmen (dreistöckiges Gebäude) besteht aus den starren Riegeln mit Massen m_1, m_2, m_3, den masselosen Stielen mit Biegesteifigkeiten EI_1, EI_2 und EI_3 sowie einem Dämpfer mit Dämpfungskonstante d. Durch den Windverband dürfen Stockwerk eins und zwei sowie zwei und drei als starr miteinander verbunden angenommen werden. Die Raumhöhe eines jeden Stockwerks ist l. Das Gebäude wird durch eine Windlast $F_0\,\cos(\Omega\,t)$ zum Schwingen angeregt. Es soll angenommen werden, dass sich die Massen m_1, m_2 und m_3 nur horizontal verschieben können. Die Verschiebungen werden mittels der ortsfesten Koordinaten x_1, x_2 und x_3 beschrieben.



Gegeben: m_1, m_2, m_3, EI_1, EI_2, EI_3, l, d, F_0, Ω.

a) Wieviele Freiheitsgrade hat das System?

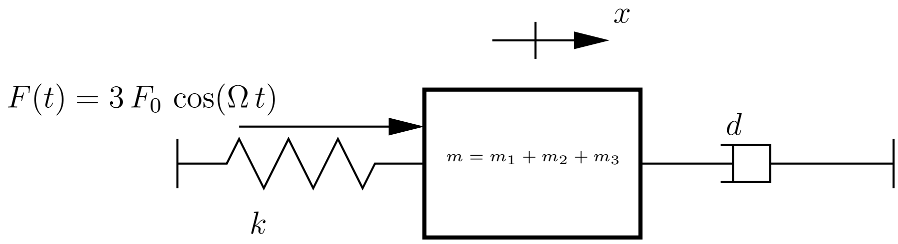
b) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung(en) des Systems mit Hilfe der Newtonschen Axiome unter Verwendung eines 1D Ersatzmodells.

c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung für den schwach gedämpften Fall.

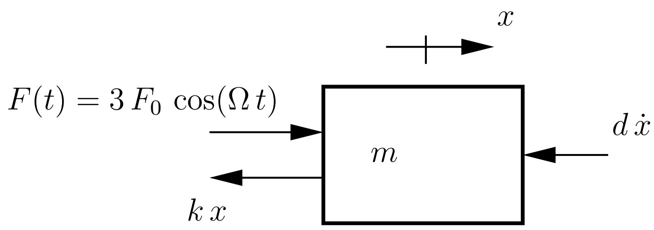
Musterlösung - Aufgabe 3

a) 1 FHG x

b) Ersatzmodell mit Ersatzfedersteifigkeit $k = 2\,k_i = 2\,\frac{12\,EI_1}{l^3} = \frac{24\,EI_1}{l^3}$



FKB



Bewegungsgleichung

$$m\,\ddot{x} + d\,\dot{x} + k\,x = 3\,F_0\,\cos(\Omega\,t)$$

c) Normalform

$$\ddot{x} + \frac{d}{m}\,\dot{x} + \frac{k}{m}\,x = \frac{F(t)}{m} = \frac{3\,F_0}{m}\,\cos(\Omega\,t)$$

Allgemeine Lsg.

$$x_a = x_h + x_p$$

Homogene Lsg.

$$x_h = e^{-\omega_0\,t\,D}\,(A\,\sin(\omega_d\,t) + B\,\cos(\omega_d\,t)) = e^{-\omega_0\,t\,D}\,C\,\cos(\omega_d\,t - \alpha), \quad \omega_d = \sqrt{1-D^2}\,\omega_0$$

bzw. in Eigenzeit $\tau = \omega_0\,t$:

$$x_h = e^{-\tau\,D}\,(A\,\sin(\nu\,\tau) + B\,\cos(\nu\,\tau)) = e^{-\tau\,D}\,C\,\cos(\nu\,\tau - \alpha), \quad \nu = \sqrt{1-D^2}$$

Dimensionslose Darstellung mit Eigenzeit $\tau = \omega_0\,t$, $\frac{d}{m\,\omega_0} = 2\,D$, $\eta = \frac{\Omega}{\omega_0}$

$$x'' + 2\,D\,x' + x = \underbrace{\frac{3\,F_0}{\omega_0^2\,m}}_{=3\,F_0/k=x_0}\,\cos(\eta\,\tau)$$

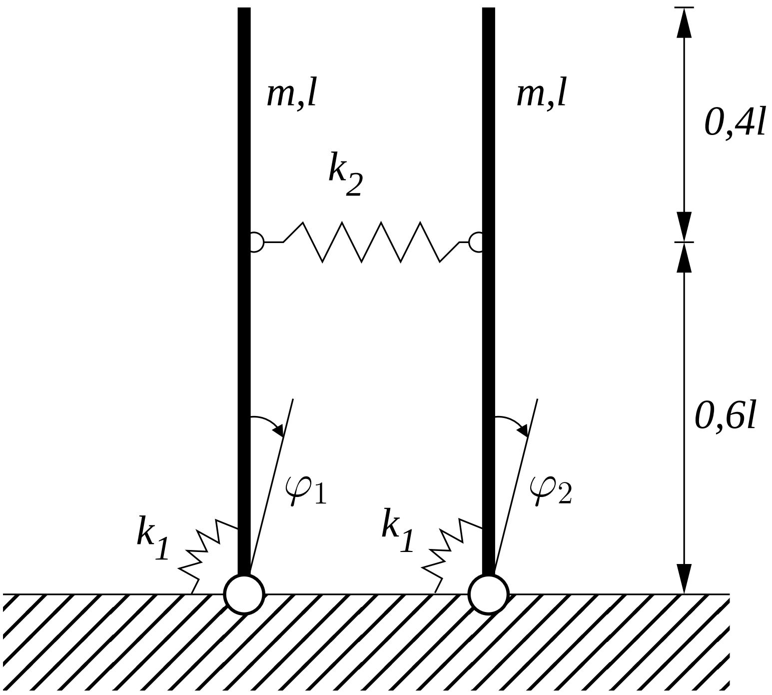
Partikuläre Lösung (Ansatz in Form der rechten Seite)

$$x_p = C_p\,\cos(\eta\,\tau - \gamma) = C_p\,\cos(\Omega\,t - \gamma),$$

für Krafterregung gilt

$$C_p = x_0\,V_3 = x_0\,\frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4\,D^2\,\eta^2}}, \quad \gamma = \arctan(\frac{2\,D\,\eta}{1-\eta^2})$$

4. Aufgabe: (ca. 34% der Gesamtpunkte)



In Kuala Lumpur stehen die beiden Petronas-Türme, die über eine Brücke miteinander verbunden sind. Zur groben Abschätzung des Schwingungsverhaltens der Türme soll oben dargestelltes vereinfachtes System verwendet werden. Die Türme werden als starre Balken mit der Länge l und der Masse m modelliert, die an ihrem Fußpunkt Drehfedern mit der Federsteifigkeit k_1 aufweisen. Die Brücke wird durch eine Feder der Steifigkeit k_2 idealisiert, ihre Masse wird vernachlässigt.
Das daraus resultierende System sei für die Winkel $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ spannungsfrei.

Berechnen Sie

a) die potentielle Energie V für kleine Auslenkungen $\varphi_1 \ll 1$ und $\varphi_2 \ll 1$ (das Gewichtspotential darf vernachlässigt werden),

b) die kinetische Energie T und

c) die daraus resultierenden Bewegungsgleichungen mit Hilfe der analytischen Methode (Lagrangesche Gleichungen).

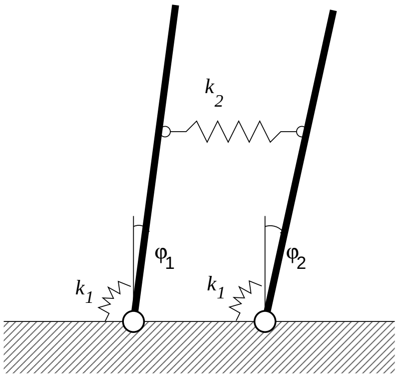
d) Wie ändert sich das Systemverhalten für $k_2 \to \infty$ (starre Brücke)? Geben Sie hierzu die Bewegungsgleichung an.

e) Skizzieren Sie die Eigenformen für beide Fälle.

Gegeben: $m,\ l,\ k_1,\ k_2$

Musterlösung - Aufgabe 4

a) Potentielle Energie



$$V = \frac{1}{2}\cdot k_1\cdot\varphi_1^2 + \frac{1}{2}\cdot k_1\cdot\varphi_2^2 + \frac{1}{2}\cdot k_2(0,6\cdot l\cdot\varphi_1 - 0,6\cdot l\cdot\varphi_2)^2$$
$$= \frac{1}{2}\cdot k_1\cdot(\varphi_1^2+\varphi_2^2) + \frac{9}{50}k_2\,l^2(\varphi_1-\varphi_2)^2$$

b) Kinetische Energie mit $\theta = \frac{1}{3}ml^2$

$$T = \frac{1}{2}\cdot\theta\cdot\dot{\varphi_1}^2 + \frac{1}{2}\cdot\theta\cdot\dot{\varphi_2}^2 = \frac{1}{6}m\,l^2(\dot{\varphi_1}^2+\dot{\varphi_2}^2)$$

c) Bewegungsgleichungen $\frac{\partial V}{\partial\varphi_i} + \frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}_i}) = 0$

$$\varphi_1: \quad \frac{\partial V}{\partial\varphi_1} = k_1\varphi_1 + \frac{9}{25}k_2l^2(\varphi_1-\varphi_2) \quad \frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}_1}) = \theta\ddot{\varphi}_1$$
$$\varphi_2: \quad \frac{\partial V}{\partial\varphi_2} = k_1\varphi_2 - \frac{9}{25}k_2l^2(\varphi_1-\varphi_2) \quad \frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}_2}) = \theta\ddot{\varphi}_2$$

$$\begin{bmatrix}\theta & 0\\ 0 & \theta\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\ddot{\varphi}_1\\ \ddot{\varphi}_2\end{pmatrix} + \begin{bmatrix}k_1+\frac{9}{25}k_2l^2 & -\frac{9}{25}k_2l^2\\ -\frac{9}{25}k_2l^2 & k_1+\frac{9}{25}k_2l^2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

d) Bewegungsgleichung für $k_2\to\infty$
$k_2\to\infty \Longrightarrow \varphi_1=\varphi_2$

$$\theta\ddot{\varphi}_1 + k_1\varphi_1 = 0$$

e) Eigenformen
EWP

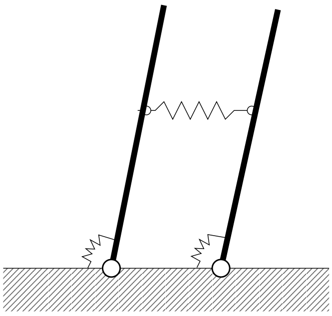
$$\det(\boldsymbol{K}-\omega^2\,\boldsymbol{M}) = 0$$
$$\Leftrightarrow \omega^4 - \frac{1}{\theta}\,(2\,k_1 + \frac{18}{25}\,k_2\,l^2)\,\omega^2 + \frac{1}{\theta^2}\,(k_1^2 + \frac{18}{25}\,k_1\,k_2\,l^2)$$

Eigenfrequenzen

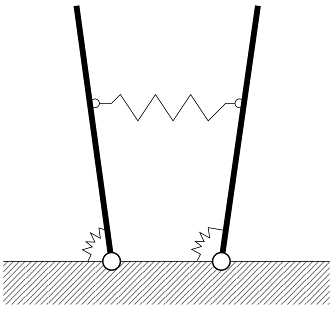
$$\omega_1^2 = \frac{k_1}{\theta}, \quad \omega_2^2 = (k_1 + \frac{18}{25}\,k_2\,l^2)\,\frac{1}{\theta}$$

Eigenvektoren

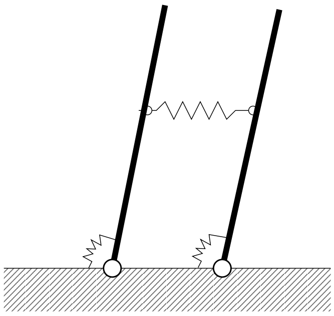
$$\kappa_i = -\frac{k_{11}-m_{11}\,\omega_i^2}{k_{12}-m_{12}\,\lambda_i}, \quad \kappa_1 = 1, \quad \kappa_2 = -1$$
$$\boldsymbol{\Phi}_1 = \begin{bmatrix}1\\ \kappa_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Phi}_2 = \begin{bmatrix}1\\ \kappa_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$$



1. Eigenform
$\varphi_1 = \varphi_2$



2. Eigenform
$\varphi_1 = -\varphi_2$



Eigenform für $k_2 \to \infty$
$\varphi_1 = \varphi_2$

Klausur
Baudynamik
am 27. Juli 2020

Lösungsvorlage

Name: .... Vorname: ....

Matr.-Nr: .... Studiengang: ....