Modulprüfung

Dynamik

19. August 2020

Name: .... Vorname: ....

Matr.-Nr: .... Studiengang: ....

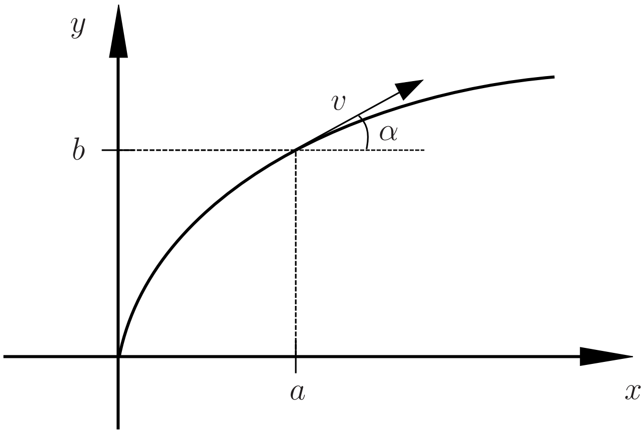
Hinweise:

- Bitte schreiben Sie deutlich lesbar. Zeichnungen müssen sauber und übersichtlich sein. Die Benutzung roter und grüner Farbstifte ist nicht zugelassen.
- Aufgaben werden nur beurteilt, wenn sie auf den ausgegebenen Blättern gelöst sind. Eventuell abgegebene Formelsammlungen werden als nicht vorhanden betrachtet. Trennen Sie die Aufgabenblätter nicht auf.
- Bei den Aufgaben muss eindeutig der Lösungsweg erkennbar sein. Ein Ergebnis ohne Lösungsweg wird nicht bewertet. Sollten für eine Aufgabe mehrere widersprüchliche Lösungen angegeben sein, so wird keine bewertet. Streichen Sie deshalb falsche Rechenschritte oder Zeichnungen durch.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite.

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
Punkte					
Korrektor					

(Eintrag erfolgt durch Institut)

1. Aufgabe: (ca. 20% der Gesamtpunkte)



Ein Fahrzeug durchfährt die oben abgebildete, langgezogene Rechtskurve der Form

$$y = \sqrt{\frac{b^2}{a}x}$$

Zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ ruht das Fahrzeug im Koordinatenursprung. Anschließend beschleunigt es in x-Richtung gemäß

$$a_x(t) = \tilde{a}_x t^2$$

Es soll der Zeitraum $t \in [0, T]$ betrachtet werden, bis zu welchem das Fahrzeug den Punkt $P(a, b)$ erreicht.
Bearbeiten Sie folgende Teilaufgaben:

a) Ermitteln Sie die Funktion $x(t)$ in Abhängigkeit der gegebenen Anfangsbedingungen.

b) Ermitteln Sie die Beschleunigungskonstante $\tilde{a}_x$, so dass der Punkt $P(a, b)$ in $T = 4\,\mathrm{s}$ erreicht wird.

c) Ermitteln Sie die Geschwindigkeitskomponente $\dot{y}(t)$.

d) Wie schnell fährt das Fahrzeug durch den Punkt $P(a, b)$?

e) Ermitteln Sie den Winkel α der Bahngeschwindigkeit zur Horizontalen im Punkt $P(a, b)$.

Gegeben: $y = \sqrt{\frac{b^2}{a}x}$; $a = 16\,\mathrm{m}$; $b = 32\,\mathrm{m}$; $a_x(t) = \tilde{a}_x t^2$; $\tilde{a}_x = \text{konst.}$; $T = 4\,\mathrm{s}$

Musterlösung - Aufgabe 1

a) Weg-Zeit-Verlauf $\mathrm{x}(t)$

$$
\begin{aligned}
\ddot{\mathrm{x}}(t) &= \tilde{a}_x t^2 \\
\dot{\mathrm{x}}(t) &= \frac{1}{3}\tilde{a}_x t^3 + C_1 \qquad \leftrightarrow \qquad \dot{\mathrm{x}}(t=0) = 0 \qquad \Rightarrow C_1 = 0 \\
\mathrm{x}(t) &= \frac{1}{12}\tilde{a}_x t^4 + C_2 \qquad \leftrightarrow \qquad \mathrm{x}(t=0) = 0 \qquad \Rightarrow C_2 = 0
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \mathrm{x}(t) = \frac{1}{12}\tilde{a}_x t^4$$

b) Beschleunigungskonstante $\tilde{a}_x$ für $T = 4s$

$$\mathrm{x}(T) = a = \frac{1}{12}\tilde{a}_x T^4 \qquad \leftrightarrow \qquad \tilde{a}_x = 12\frac{a}{T^4} = \frac{3}{4}\frac{m}{s^4}$$

woraus folgt

$$\mathrm{x}(t) = \frac{1}{16}t^4$$

c) Geschwindigkeitsverlauf $\dot{\mathrm{y}}(t)$

Variante 1

$$
\begin{aligned}
\mathrm{y}(t) &= \sqrt{\frac{b^2}{a}\mathrm{x}(t)} = \frac{b}{\sqrt{a}}\sqrt{\frac{1}{16}t^4} = 2t^2 \\
\dot{\mathrm{y}}(t) &= 4t
\end{aligned}
$$

Variante 2

$$\dot{\mathrm{y}}(t) = \frac{\partial \mathrm{y}}{\partial \mathrm{x}}\frac{d\mathrm{x}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{b}{\sqrt{a}}\frac{1}{\sqrt{\mathrm{x}(t)}}\dot{\mathrm{x}}(t) = 4\frac{4}{t^2}\frac{1}{4}t^3 = \frac{b}{8}t = 4t$$

d) Geschwindigkeit in Punkt $P(a,b)$

Gesamtgeschwindigkeit $v(t)$

$$v(t) = \sqrt{\dot{\mathrm{x}}^2(t) + \dot{\mathrm{y}}^2(t)} = \sqrt{\frac{1}{16}t^6 + 16t^2}$$

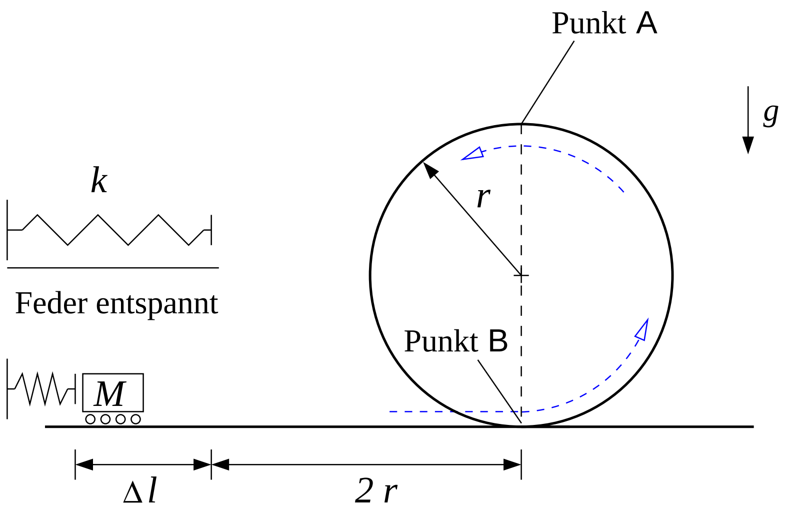
Geschwindigkeit in $P(a,b)$

$$v(T) = \sqrt{2 * 4^4} = 22.63\frac{m}{s}$$

e) Winkel α an $P(a,b)$

$$
\begin{aligned}
\tan(\alpha) &= \frac{d\mathrm{y}}{d\mathrm{x}} = \frac{d\mathrm{y}}{dt}\frac{dt}{d\mathrm{x}} = \frac{\dot{\mathrm{y}}(t)}{\dot{\mathrm{x}}(t)} \\
\alpha &= arc\tan\left(\frac{\dot{\mathrm{y}}(T)}{\dot{\mathrm{x}}(T)}\right) = arc\tan\left(4T\frac{4}{T^3}\right) = arc\tan(1) = 45^\circ
\end{aligned}
$$

2. Aufgabe: (ca. 25 % der Gesamtpunkte)



Ein Waggon der Masse M in einer Achterbahn soll einen kreisförmigen Looping mit dem Radius r durchfahren. Der Waggon wird beschleunigt, indem eine Feder der Steifigkeit k zusammengedrückt wird und startet ohne Anfangsgeschwindigkeit ($v_0 = 0$). Zur Berücksichtigung von Luftwiderstand und Bahnreibung soll eine konstante Kraft R (Nichtpotentialkraft!) angenommen werden, die stets der Bewegungsrichtung entgegengesetzt wirkt.

a) Bestimmen Sie die erforderliche Zusammendrückung Δl der Feder, so dass die Geschwindigkeit im Zenit des Loopings (Punkt A) v_a beträgt.

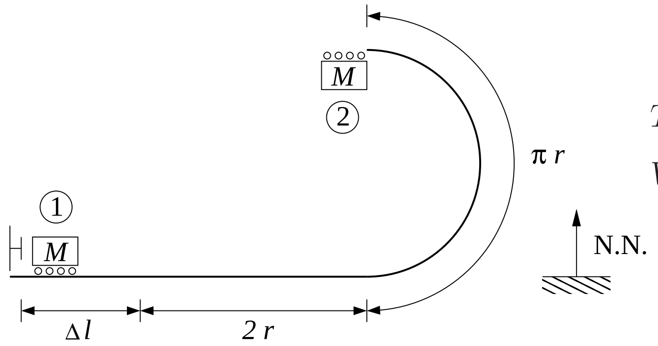
Es sei nun die Zusammendrückung der Feder mit $\Delta l = 1\,\text{m}$ gegeben.
Wegen eines technischen Defekts befindet sich zum Zeitpunkt des Starts ein zweiter ruhender Waggon mit der gleichen Masse M in Punkt B (vor der Einfahrt in den Looping). Der Stoß beider Waggons erfolgt im Punkt B mit der Stoßzahl e.

b) Wie groß muss die Stoßzahl e in Abhängigkeit der gegebenen Größen sein, so dass der zunächst ruhende Waggon den Zenit des Loopings (Punkt A) mit der Geschwindigkeit $v_b = 2\,\text{m/s}$ passiert?

Gegeben: $r = 5\,\text{m}$, $g = 9,81\,\text{m/s}^2$, $M = 300\,\text{kg}$, $R = 100\,\text{N}$, $v_a = 5\,\text{m/s}$, $k = 0,1 \cdot 10^6\,\text{N/m}$

Musterlösung - Aufgabe 2

a) erforderliche Zusammendrückung der Feder



$$T_1 = 0 \qquad T_2 = \frac{1}{2} M\,(v^*)^2$$

$$V_1 = \frac{1}{2} k\,\Delta l^2 \qquad V_2 = M\,g\,2r$$

$$W|_1^2 = -R\,(\Delta l + 2r + \pi r)$$

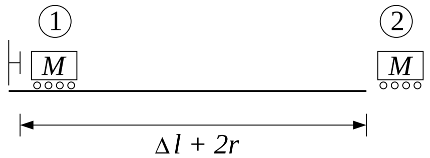
Arbeitssatz:

$$\begin{aligned} T_1 + V_1 + W|_1^2 &= T_2 + V_2 \\ \frac{1}{2} k\,\Delta l^2 - R\,\Delta l - R\,(2r + \pi r) &= \frac{1}{2} M\,(v^*)^2 + 2Mgr \\ \Rightarrow \quad 50000\,\Delta l^2 - 100\,\Delta l - 100\,(10 + 5\pi) &= 3750 + 29430 \end{aligned}$$

$$50000\,\Delta l^2 - 100\,\Delta l - (34180 + 500\pi) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \Delta l = \frac{300 + \sqrt{90000 + 4 \cdot 50000 \cdot (34180 + 500\pi)}}{100000} \cong \underline{0,85\,[\mathrm{m}]}$$

b) • Geschwindigkeit in Punkt B vor dem Stoß



$$T_1 = 0 \qquad T_2 = \frac{1}{2} M\,(v_I)^2$$

$$V_1 = \frac{1}{2} k\,\Delta l^2 \qquad V_2 = 0$$

$$W|_1^2 = -R\,(\Delta l + 2\,r)$$

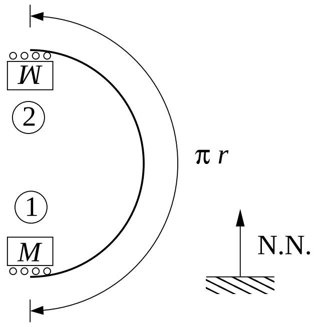
Arbeitssatz:

$$\begin{aligned} T_1 + V_1 + W|_1^2 &= T_2 + V_2 \\ \frac{1}{2}\,k\,\Delta l^2 - R\,\Delta l - 2\,R\,r &= \frac{1}{2}\,M\,v_I^2 \\ 50000 - 100 - 1000 &= 150\,v_I^2 \qquad \Rightarrow \qquad \underline{v_I \cong 18,06\,[\mathrm{m/s}]} \end{aligned}$$

- Geschwindigkeiten nach dem Stoß

$$\begin{aligned}\overline{v_I} &= v_I\left(1-\frac{1+e}{2}\right)\\ \overline{v_{II}} &= \frac{1+e}{2}\,v_I\end{aligned}$$

- Bedingung: Geschwindigkeit des Wagens II im Zenit des Loopings $= v_{min}$



$$\begin{aligned}T_1 &= \frac{1}{2}M\,\overline{v_{II}}^2 & T_2 &= \frac{1}{2}M\,v_{min}^2\\ V_1 &= 0 & V_2 &= M\,g\,2r\end{aligned}$$

$$W|_1^2 = -R\,\pi\,r$$

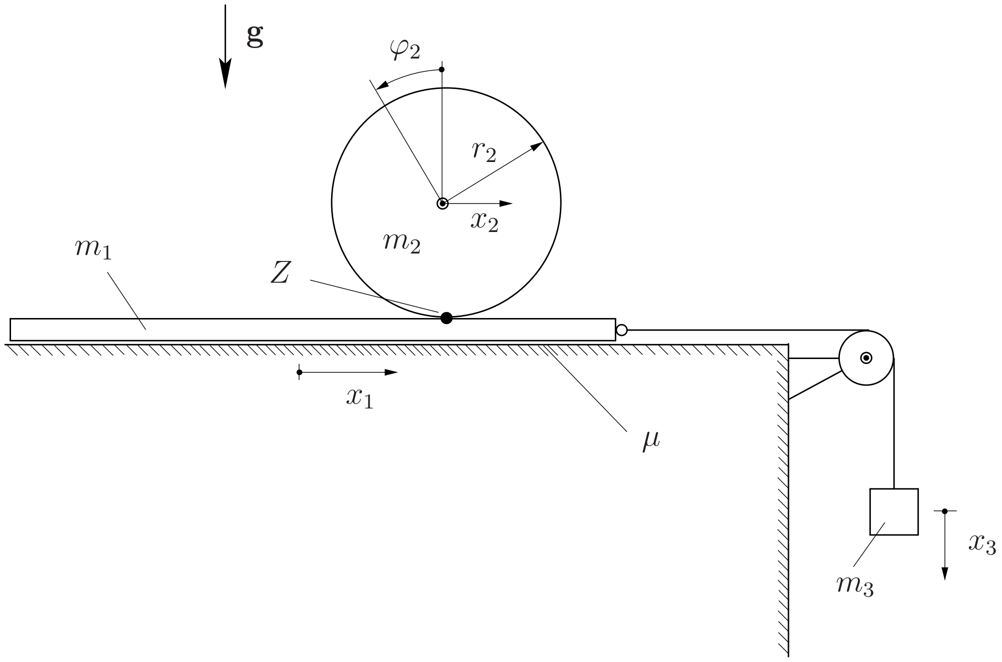
Arbeitssatz:

$$\begin{aligned}T_1+V_1+W|_1^2 &= T_2+V_2\\ \frac{1}{2}M\,\overline{v_{II}}^2 - R\,\pi\,r &= \frac{1}{2}M\,v_{min}^2 + M\,g\,2r\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\quad \overline{v_{II}}^2 &= \frac{2}{M}\left(\frac{1}{2}M\,v_{min}^2 + 2\,M g\,r + R\,\pi\,r\right)\\ \Rightarrow\quad \overline{v_{II}} &= \sqrt{4+196,2+3,333\pi} = \frac{1+e}{2}\,v_I\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\quad e = \frac{2}{v_I}\sqrt{4+196,2+3,333\pi}-1 \quad\cong\quad \underline{0,61}$$

3. Aufgabe: (ca. 30 % der Gesamtpunkte)



Ein Brett (Masse m_1) ist über ein undehnbares Seil mit einem Gewicht (Masse m_3) verbunden. Das Brett liegt auf einer rauen Unterlage (Reibkoeffizient μ), und das Seil wird über eine masselose Rolle umgelenkt. Auf dem Brett liegt im Punkt Z eine Rolle. Das System wird nun aus dem Ruhezustand losgelassen. Es soll die Zeitspanne der Bewegung betrachtet werden, bei der sich die Rolle noch auf dem Brett befindet und rollt.

a) Schneiden Sie die massenbehafteten Körper frei und geben Sie ihre Bewegungsgleichungen an.

b) Bestimmen Sie die kinematischen Beziehungen für die Geschwindigkeiten $\dot{x}_2$ und $\dot{x}_3$.

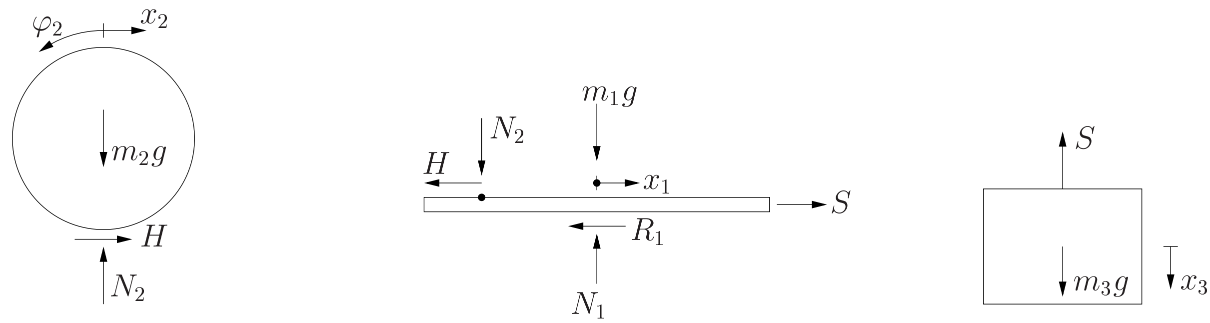
c) Berechnen Sie die Beschleunigung $\ddot{x}_3$ der Masse m_3.

d) Bestimmen Sie den Haftkoeffizienten μ_0 zwischen Unterlage und Brett bei dem das System in Ruhe bleibt.

<u>Gegeben:</u> m_1, m_2, m_3, r_2, μ, g.

Musterlösung - Aufgabe 3

a) Kinetik:

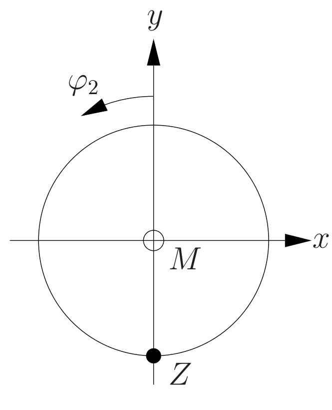


$$
\begin{aligned}
m_2\,\ddot{x}_2 &= H \\
N_2 - m_2\,g &= 0 \\
\Theta\,\ddot{\varphi}_2 &= H\,r \\
\rightarrow \Theta &= \frac{1}{2}\,m_2\,r^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
m_1\,\ddot{x}_1 &= -R_1 - H + S \\
0 &= N_1 - N_2 - m_1\,g \\
\rightarrow R_1 &= \mu\,N_1
\end{aligned}
$$

$$
m_3\,\ddot{x}_3 = m_3\,g - S
$$

b) Kinematik:



$$
\begin{aligned}
v_{\mathrm{Z}} &= v_{\mathrm{M}} + \omega \times r_{\mathrm{MZ}} \\
&= \dot{x}_1\,e_{\mathrm{x}} \\
r_{\mathrm{MZ}} &= -r\,e_{\mathrm{y}} \\
v_{\mathrm{M}} &= \dot{x}_2\,e_{\mathrm{x}} \\
\omega &= \dot{\varphi}_2\,e_{\mathrm{Z}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1\,e_{\mathrm{x}} &= \dot{x}_2\,e_{\mathrm{x}} - \dot{\varphi}_2\,e_{\mathrm{Z}} \times r\,e_{\mathrm{y}} \\
\dot{x}_1\,e_{\mathrm{x}} &= \dot{x}_2\,e_{\mathrm{y}} + r\,\dot{\varphi}_2\,e_{\mathrm{x}} \\
\rightarrow \dot{x}_1 &= \dot{x}_2 + r\,\dot{\varphi}_2 \\
\rightarrow x_3 &= x_1
\end{aligned}
$$

c) Beschlunigung $\ddot{x}_3$:

$$\begin{aligned} m_2\, r\, \ddot{x}_2 &= \Theta\, \ddot{\varphi}_2 \\ \rightarrow m_2\, r\, (\ddot{x}_1 - r\, \ddot{\varphi}_2) &= \frac{1}{2} m_2\, r^2\, \ddot{\varphi}_2 \\ \ddot{x}_1 - r\, \ddot{\varphi}_2 &= \frac{1}{2}\, r\, \ddot{\varphi}_2 \\ \rightarrow \ddot{x}_1 &= \frac{3}{2}\, r\, \ddot{\varphi}_2 \\ \rightarrow r \ddot{\varphi}_2 &= \frac{2}{3}\, \ddot{x}_1 \end{aligned}$$

Auflösen nach H:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}\, m_2\, r\, \ddot{\varphi}_2 \\ &= \frac{1}{2}\, m_2\, \frac{2}{3}\, \ddot{x}_1 \\ &= \frac{m_2}{3}\, \ddot{x}_1 \\ \rightarrow H &= \frac{m_2}{3}\, \ddot{x}_3 \end{aligned}$$

Auflösen nach R_1:

$$\begin{aligned} R_1 &= \mu\, N_1 \\ N_1 &= N_2 + m_1\, g \\ &= (m_1 + m_2)\, g \\ \rightarrow R_1 &= \mu\, (m_1 + m_2)\, g \end{aligned}$$

Bestimmen der Seilkraft$S$:

$$\begin{aligned} m_1\, \ddot{x}_1 &= -\mu\, (m_1 + m_2)\, g - \frac{m_2}{3}\, \ddot{x}_3 + S \\ m_1\, \ddot{x}_3 + \frac{m_2}{3}\, \ddot{x}_3 &= -\mu\, (m_1 + m_2)\, g + S \\ \rightarrow S &= m_3\, g - m_3\, \ddot{x}_3 \end{aligned}$$

Bestimmen der Beschleunigung $\ddot{x}_3$:

$$m_1\, \ddot{x}_3 + \frac{m_2}{3}\, \ddot{x}_3 + m_3\, \ddot{x}_3 = -\mu\, (m_1 + m_2)\, g + m_3\, g$$

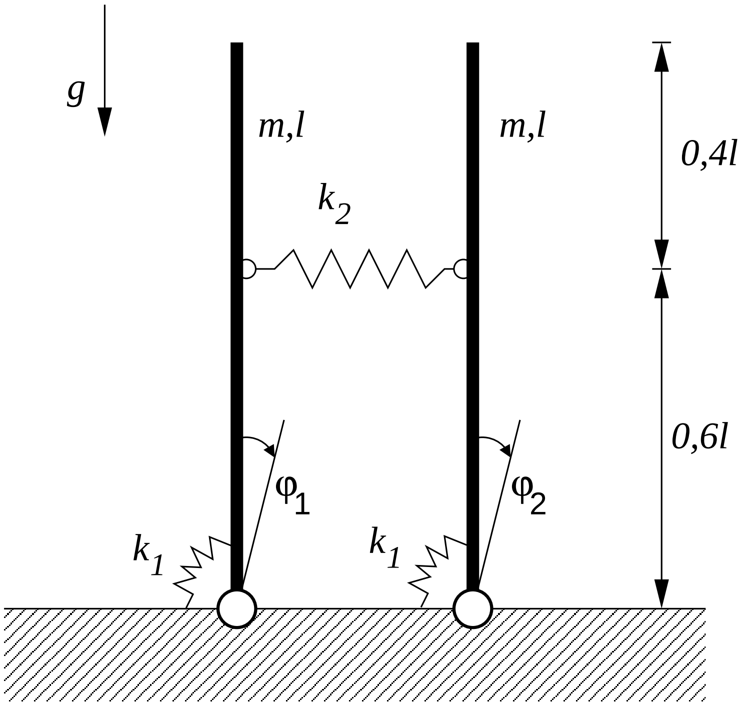
$$\ddot{x}_3 = \frac{m_3 - \mu\, (m_1 + m_2)}{m_1 + \frac{m_2}{3} + m_3}\, g$$

c) Gleichgewicht:

$$\begin{aligned} m_3 &\leq \mu_{\mathrm{H}}\, (m_1 + m_2) \\ R_1 &\leq \mu_{\mathrm{H}}\, N \\ \mu_{\mathrm{H}} &\geq \frac{m_3}{m_1 + m_2} \end{aligned}$$

μ_{H}: Haftreibungskoeffizient

4. Aufgabe: (ca. 25 % der Gesamtpunkte)



In Kuala Lumpur stehen die beiden Petronas-Türme, die über eine Brücke miteinander verbunden sind. Zur groben Abschätzung des Schwingungsverhaltens der Türme soll das oben dargestellte vereinfachte System verwendet werden. Die Türme werden als starre Balken der Länge l und der Masse m modelliert, die an ihrem Fußpunkt Drehfedern mit der Federsteifigkeit k_1 aufweisen. Die Brücke wird durch eine Feder der Steifigkeit k_2 idealisiert, ihre Masse wird vernachlässigt.
Das daraus resultierende System sei für die Winkel $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ spannungsfrei.

Berechnen Sie

a) die potentielle Energie V für kleine Auslenkungen $\varphi_1 \ll 1$ und $\varphi_2 \ll 1$ (das Gewichtspotential darf vernachlässigt werden),

b) die kinetische Energie T und

c) die daraus resultierenden Bewegungsgleichungen mit Hilfe der analytischen Methode (Lagrangesche Gleichungen).

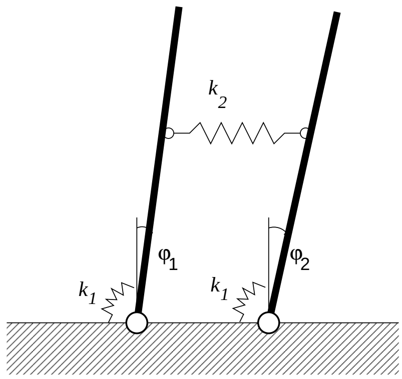
d) Wie ändert sich das Systemverhalten für $k_2 \to \infty$ (starre Brücke)? Geben Sie hierzu die Bewegungsgleichung an.

e) Skizzieren Sie die Eigenformen für beide Fälle (k_2 endlich, $k_2 \to \infty$). Eine Rechnung ist dazu nicht erforderlich.

Gegeben: $m,\ l,\ k_1,\ k_2$

Musterlösung - Aufgabe 4

a) Potentielle Energie:



$$V = \frac{1}{2}\cdot k_1\cdot\varphi_1^2 + \frac{1}{2}\cdot k_1\cdot\varphi_2^2 + \frac{1}{2}\cdot k_2(0,6\cdot l\cdot\varphi_1 - 0,6\cdot l\cdot\varphi_2)^2$$

$$\boxed{V = \frac{1}{2}\cdot k_1\cdot(\varphi_1^2+\varphi_2^2) + \frac{9}{50}k_2 l^2(\varphi_1-\varphi_2)^2}$$

b) Kinetische Energie:

$T = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}ml^2\cdot\dot{\varphi}_1{}^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}ml^2\cdot\dot{\varphi}_2{}^2$

$$\boxed{T = \frac{1}{6}ml^2(\dot{\varphi}_1{}^2+\dot{\varphi}_2{}^2)}$$

c) Bewegungsgleichungen:

$\frac{\partial V}{\partial\varphi_i} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}_i}\right) = 0$

$\underline{\varphi_i = \varphi_1 :}$ $\boxed{\frac{\partial V}{\partial\varphi_1} = k_1\varphi_1 + \frac{9}{25}k_2 l^2(\varphi_1-\varphi_2)}$ $\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}_1}\right) = \frac{1}{3}ml^2\ddot{\varphi}_1}$

$\underline{\varphi_i = \varphi_2 :}$ $\boxed{\frac{\partial V}{\partial\varphi_2} = k_1\varphi_2 - \frac{9}{25}k_2 l^2(\varphi_1-\varphi_2)}$ $\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}_2}\right) = \frac{1}{3}ml^2\ddot{\varphi}_2}$

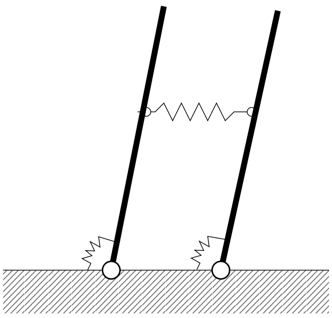
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3}ml^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}ml^2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix}\ddot{\varphi}_1\\ \ddot{\varphi}_2\end{pmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+\frac{9}{25}k_2l^2 & -\frac{9}{25}k_2l^2 \\ -\frac{9}{25}k_2l^2 & k_1+\frac{9}{25}k_2l^2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

d) Bewegungsgleichung für $k_2\to\infty$:

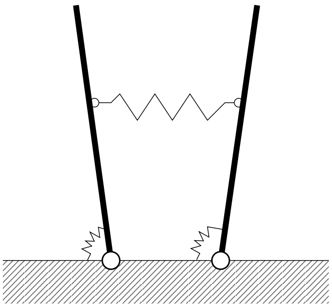
$k_2\to\infty \Longrightarrow \varphi_1 = \varphi_2$

$$\boxed{\frac{1}{3}ml^2\ddot{\varphi}_1 + k_1\varphi_1 = 0}$$

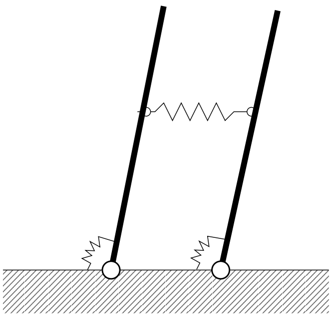
d) Eigenformen



1. Eigenform
$\varphi_1 = \varphi_2$



2. Eigenform
$\varphi_1 = -\varphi_2$



Eigenform für $k_2 \to \infty$
$\varphi_1 = \varphi_2$

Modulprüfung
Dynamik
am 19. August 2020

Lösungsvorlage

Name: .... Vorname: ....

Matr.-Nr: .... Studiengang: ....