Modulprüfung

Statik starrer Körper

19. August 2020

Name: .... Vorname: ....

Matr.-Nr: .... Studiengang: ....

Hinweise:

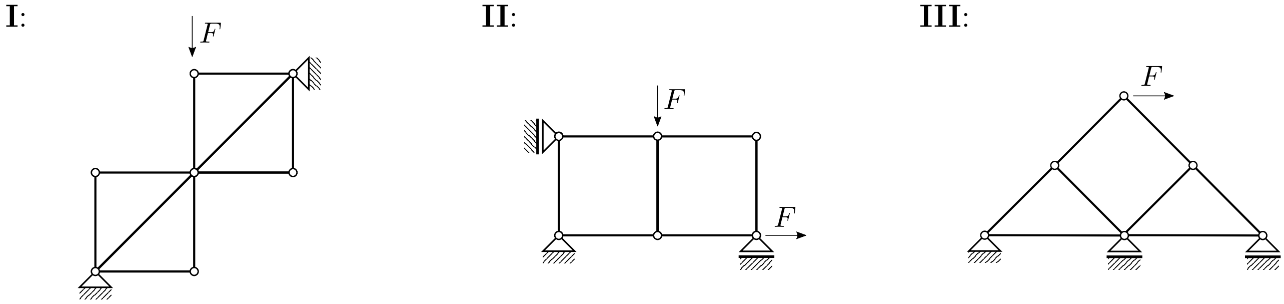
- Bitte schreiben Sie deutlich lesbar. Zeichnungen müssen sauber und übersichtlich sein. Die Benutzung roter und grüner Farbstifte ist nicht zugelassen.
- Aufgaben werden nur beurteilt, wenn sie auf den ausgegebenen Blättern gelöst sind. Eventuell abgegebene Formelsammlungen werden als nicht vorhanden betrachtet. Trennen Sie die Aufgabenblätter nicht auf.
- Bei den Aufgaben muss eindeutig der Lösungsweg erkennbar sein. Ein Ergebnis ohne Lösungsweg wird nicht bewertet. Sollten für eine Aufgabe mehrere widersprüchliche Lösungen angegeben sein, so wird keine bewertet. Streichen Sie deshalb falsche Rechenschritte oder Zeichnungen durch.
- Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite.

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
Punkte					
Korrektor					

(Eintrag erfolgt durch Institut)

1. Aufgabe: (ca. 30 % der Gesamtpunkte)

Aufgabe 1.1



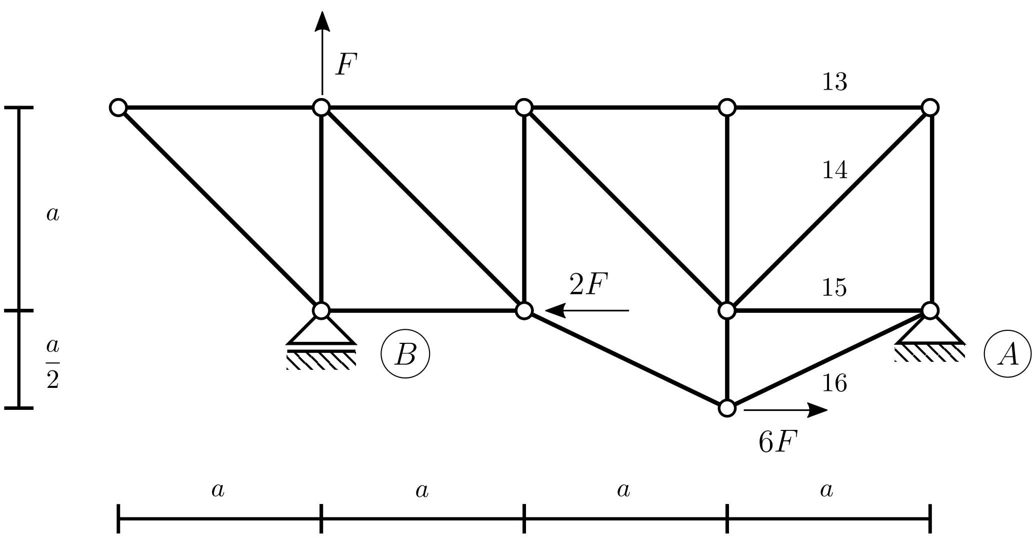
Gegeben seien die dargestellten drei Fachwerke. Bearbeiten Sie folgende Aufgabenteile:

a) Ermitteln Sie für welche(s) Fachwerk(e) die notwendige Bedingung (Abzählformel) für statische Bestimmtheit erfüllt ist.

b) Beurteilen Sie die Fachwerke hinsichtlich ihrer kinematischen Bestimmtheit.

c) Verschieben Sie in einem statisch unbestimmten Fachwerk einen Knoten so, dass es anschließend statisch bestimmt ist. Die Stablängen dürfen sich hierbei ändern, aber nicht null werden.

Aufgabe 1.2



Führen Sie am dargestellten System folgende Aufgabenteile durch:

a) Beurteilen Sie das Tragwerk hinsichtlich statischer Bestimmtheit.

b) Bestimmen Sie, falls vorhanden, alle Nullstäbe des Systems.

c) Bestimmen Sie alle Lagerreaktionen.

d) Bestimmen Sie die Stabkräfte in den Stäben 13-16.

Gegeben: a, F.

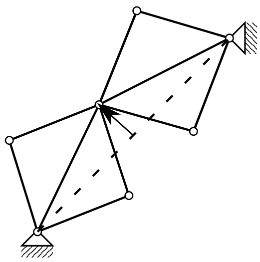
Musterlösung - Aufgabe 1
Aufgabe 1.1

a) Alle drei Tragwerke sind Fachwerke $\Rightarrow$ Abzählformel für Fachwerke $2k = a + s$

$$\begin{array}{rll} \text{I.} & k=7\,,\ s=10\,,\ a=4 & \rightarrow\ 2\cdot 7 = 4+10 \quad \text{ok} \\ \text{II.} & k=6\,,\ s=7\,,\ a=4 & \rightarrow\ 2\cdot 6 \neq 4+7 \quad \text{Widerspruch} \\ \text{III.} & k=6\,,\ s=8\,,\ a=4 & \rightarrow\ 2\cdot 6 = 4+8 \quad \text{ok} \end{array}$$

b)
I. Dreigelenkbogen mit drei Gelenken auf einer Linie $\rightarrow$ kinematisch
II. Mittlerer Stab ist kinematisch
III. Zwei starre Körper, welche einen Dreigelenkbogen bilden, Gelenke nicht auf einer Linie $\rightarrow$ ok

c) Fachwerk I: Mittleren Knoten verschieben, sodass Gelenke des Dreigelenkbogens nicht mehr auf einer Linie sind.

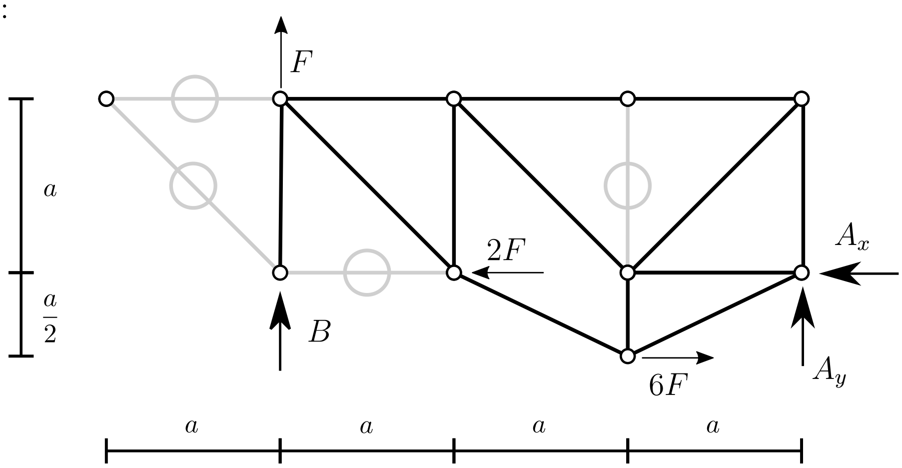


Aufgabe 1.2

a)
- System ist nicht kinematisch
- äußrere statische Bestimmtheit: $3\,n = 3\cdot 1 = 3+0 = a+g$ ok
- innere statische Bestimmtheit: $2\,k = 2\cdot 10 = 17+3 = s+a$ ok

b) Nullstäbe siehe Freischnitt

c) Freischnitt:

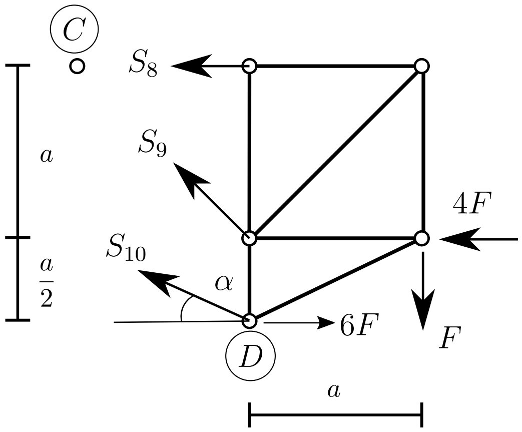


$$\Sigma\, M^B = 0:\ A_y\cdot 3a + 6F\cdot \tfrac{1}{2}a = 0 \qquad \rightarrow A_y = -F$$

$$\Sigma\, F_y = 0:\ A_y + F + B = 0 \qquad \rightarrow B = 0$$

$$\Sigma\, F_x = 0:\ -A_x - 2F + 6F = 0 \qquad \rightarrow A_x = 4F$$

d) Ritterschnitt 1:



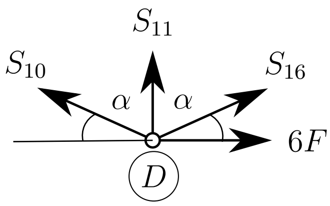
$$\Sigma M^C = 0: \; -S_{10}\cos(\alpha)\cdot\frac{3}{2}a + S_{10}\sin(\alpha)\cdot a - F\cdot 2a$$

$$... \; -4F\cdot a + 6F\cdot\frac{3}{2}a = 0$$

$$\text{mit} \;\; \sin(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{5}} \;\; \text{und} \;\; \cos(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow \;\; S_{10} = \frac{\sqrt{5}}{2}(-6F + 9F) = \frac{3}{2}\sqrt{5}F$$

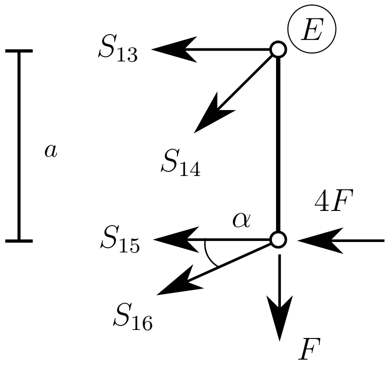
Knotenpunktverfahren:



$$\Sigma F_x = 0: \; -S_{10}\cos(\alpha) + S_{16}\cos(\alpha) + 6F = 0$$

$$\Rightarrow \;\; S_{16} = S_{10} - \frac{\sqrt{5}}{2}\,6F = \frac{3}{2}\sqrt{5}F - 3\sqrt{5}F = -\frac{3}{2}\sqrt{5}F$$

Ritterschnitt 2:



$$\Sigma M^E = 0: \;\; -4F\cdot a - S_{16}\cos(\alpha)\cdot a - S_{15}\cdot a = 0$$

$$\Rightarrow \;\; S_{15} = -4F + 3F = -F$$

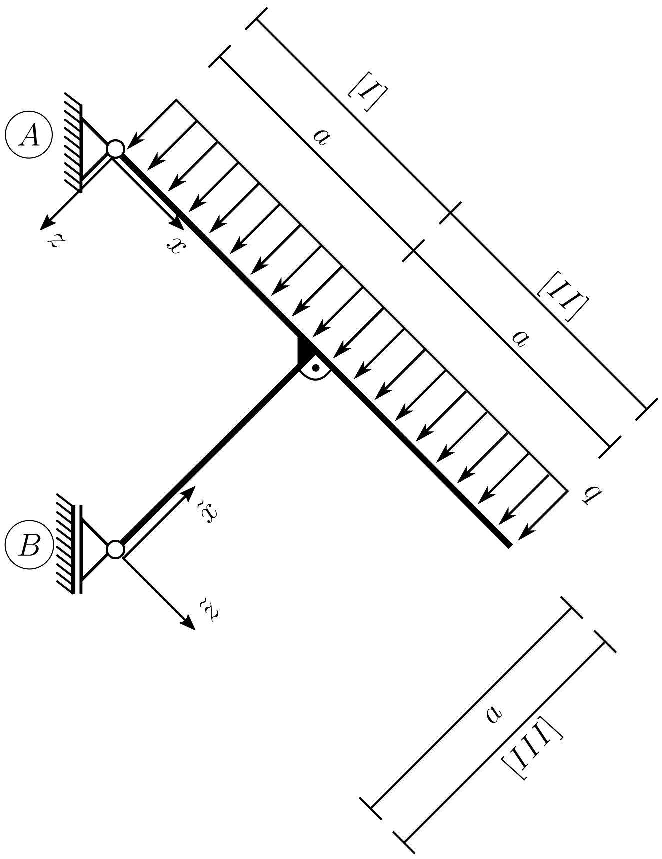
$$\Sigma Fy = 0: \;\; -F - S_{16}\sin(\alpha) - S_{14}\frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \;\; S_{14} = \frac{2}{\sqrt{2}}(-F + \frac{3}{2}F) = \frac{1}{\sqrt{2}}F$$

$$\Sigma Fx = 0: \;\; -S_{13} - S_{14}\frac{\sqrt{2}}{2} - S_{15} - S_{16}\cos(\alpha) - 4F = 0$$

$$\Rightarrow \;\; S_{13} = -\frac{1}{2}F + F + 3F - 4F = -\frac{1}{2}F$$

2. Aufgabe: (ca. 28 % der Gesamtpunkte)



Das dargestellte Tragwerk wird durch die konstante Streckenlast q belastet. Führen Sie folgende Aufgabenteile durch:

a) Bestimmen Sie die Lagerreaktionen A_x, A_z bezüglich des vorgegebenen (x, z)-Koordinatensystems sowie die Lagerreaktion B.

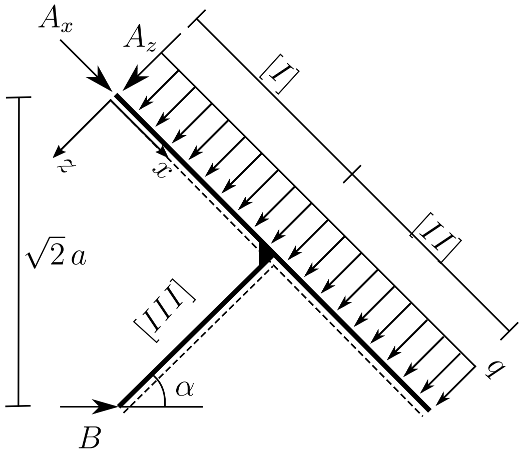
b) Bestimmen Sie die Schnittgrößenverläufe $N(x), Q(x)$ und $M(x)$ in den Bereichen $[I]$ und $[II]$ sowie die Schnittgrößenverläufe $N(\tilde{x}), Q(\tilde{x})$ und $M(\tilde{x})$ in Bereich $[III]$.

c) Skizzieren Sie die ermittelten Schnittgrößenverläufe unter Angabe der Ordinaten auf den Bereichsrändern.

Gegeben: a, q.

Musterlösung - Aufgabe 2

a) Freischnitt:



$$\Sigma\, M^A = 0: \quad -2a \cdot q \cdot a + B \cdot \sqrt{2}\, a = 0$$

$$\Rightarrow \quad B = \frac{2}{\sqrt{2}}\, qa = \sqrt{2}\, qa$$

$$\Sigma\, F_x = 0 \quad A_x + B\sin(\alpha) = 0$$

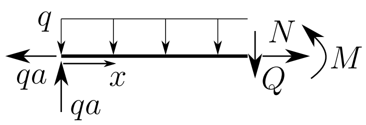
$$\Rightarrow \quad A_x = -\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2}\, qa = -qa$$

$$\Sigma\, F_z = 0 \quad A_z - B\cos(\alpha) + 2qa = 0$$

$$\Rightarrow \quad A_z = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2}\, qa - 2qa = -qa$$

b) Schnittgrößenverläufe:

Bereich $[I]$:

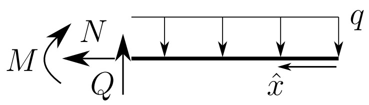


$$\Sigma\, F_x = 0: \quad N - qa = 0 \qquad \Rightarrow \quad N = qa$$

$$\Sigma\, F_z = 0: \quad Q - qa + qx = 0 \qquad \Rightarrow \quad Q = -q\,(x - a)$$

$$\Sigma\, M^x = 0: \quad M - qa\, x + \frac{1}{2}qx^2 = 0 \qquad \Rightarrow \quad M = -qx\,(\frac{1}{2}x - a)$$

Bereich $[II]$: Koordinate $\hat{x} = 2a - x$



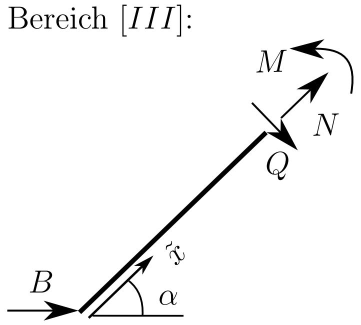
$$\Sigma\, F_{\hat{x}} = 0: \qquad \Rightarrow \quad N = 0$$

$$\Sigma\, F_z = 0: \quad -Q + q\hat{x} = 0 \qquad \Rightarrow \quad Q(\hat{x}) = q\hat{x}$$

$$\Sigma\, M^{\hat{x}} = 0: \quad -M - q\frac{1}{2}\hat{x}^2 = 0 \qquad \Rightarrow \quad M(\hat{x}) = -\frac{1}{2}q\hat{x}^2$$

Rücksubstitution $\hat{x} \to x$: $\quad N(x) = 0 \qquad Q(x) = q\,(2a - x) \qquad M(x) = -\frac{1}{2}q\,(2a - x)^2$

Bereich $[III]$:

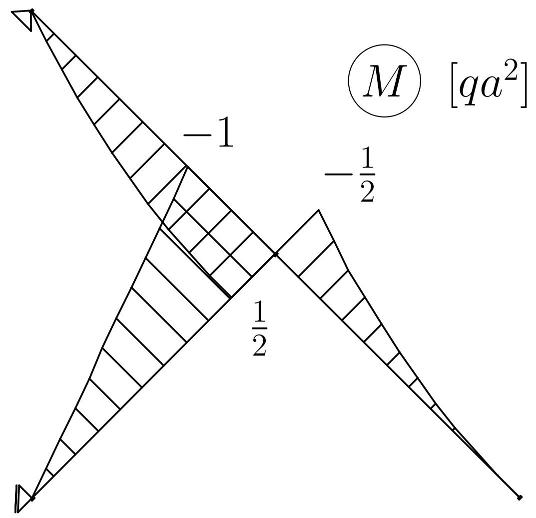


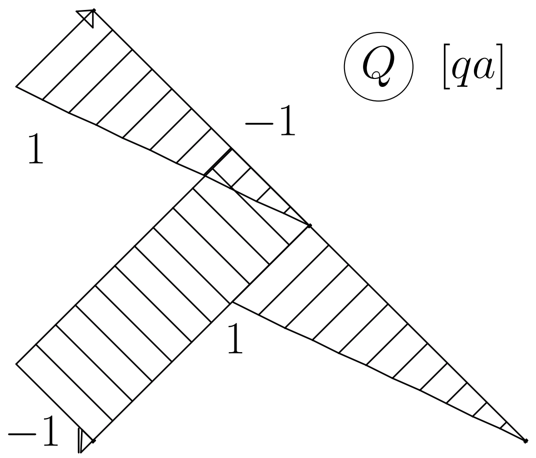
$$\Sigma\, F_{\tilde{x}} = 0: \quad N + B\cos(\alpha) = 0 \qquad \Rightarrow \quad N(\tilde{x}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2}\, qa = -qa$$

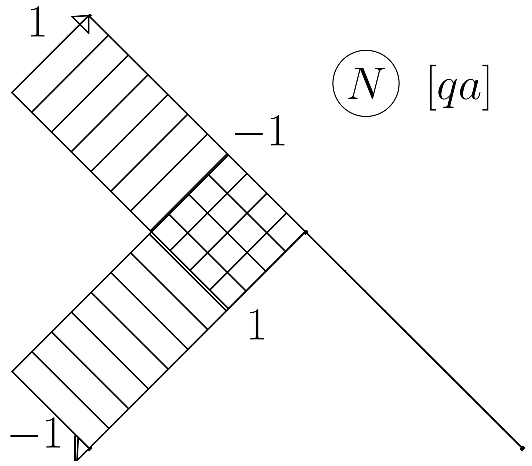
$$\Sigma\, F_{\tilde{z}} = 0: \quad Q + B\sin(\alpha) = 0 \qquad \Rightarrow \quad Q(\tilde{x}) = -qa$$

$$\Sigma\, M^{\tilde{x}} = 0: \quad M + B\cos(\alpha)\,\tilde{x} = 0 \qquad \Rightarrow \quad M(\tilde{x}) = -qa\,\tilde{x}$$

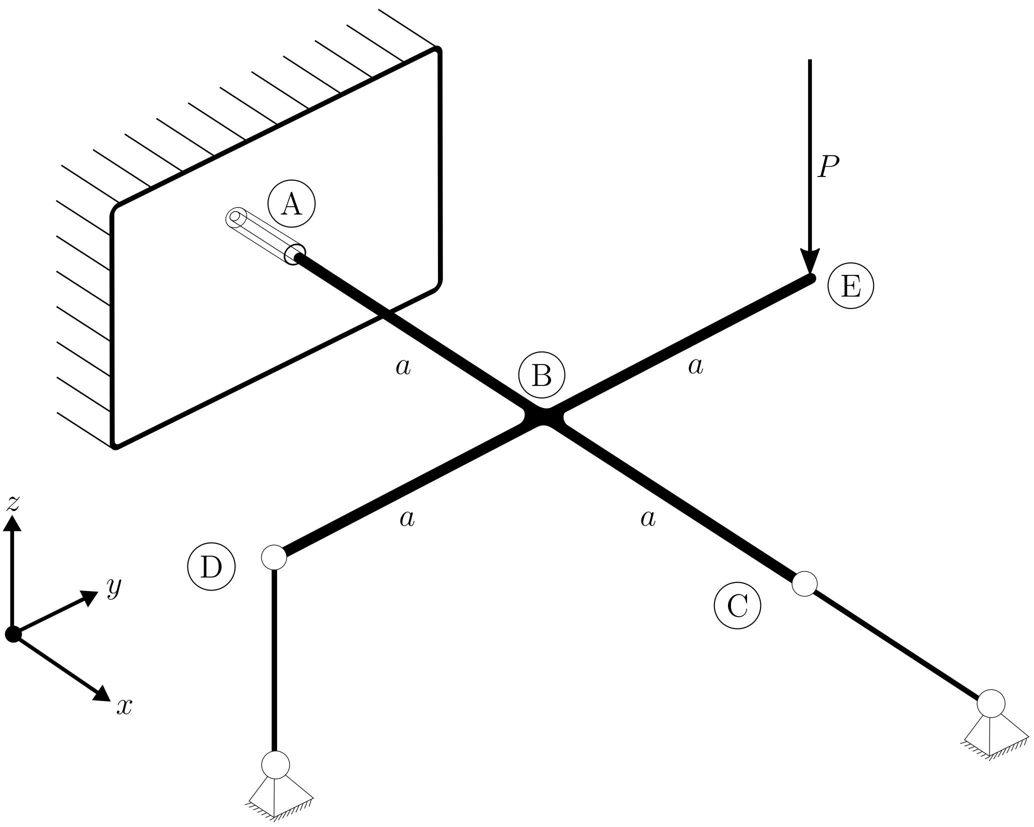
c) Verläufe skizzieren:







3. Aufgabe: (ca. 25 % der Gesamtpunkte)



Ein Tragwerk besteht aus zwei geraden Balken $\overline{AC}$ und $\overline{DE}$ von der Länge $2a$, die in (B) unter einem rechten Winkel biege- und torsionssteif miteinander verbunden sind. Das Tragwerk liegt in der x,y-Ebene. Es ist in (A) in einer Schiebehülse gelagert, d.h. der runde Stab $\overline{AC}$ steckt in einer festen runden Hülse und kann sich darin reibungsfrei um die Stabachse verdrehen und in Richtung der Stabachse verschieben. In (C) und (D) wird das Tragwerk durch Pendelstützen gehalten, welche parallel zur $x-$ bzw. $z-$Achse angeordnet sind. Die äußere Last P wirkt parallel zur $z-$Achse.

a) Stellen Sie in einer Skizze alle Lagerreaktionen, die in (A), (C) und (D) aufgenommen werden können dar und berechnen diese.

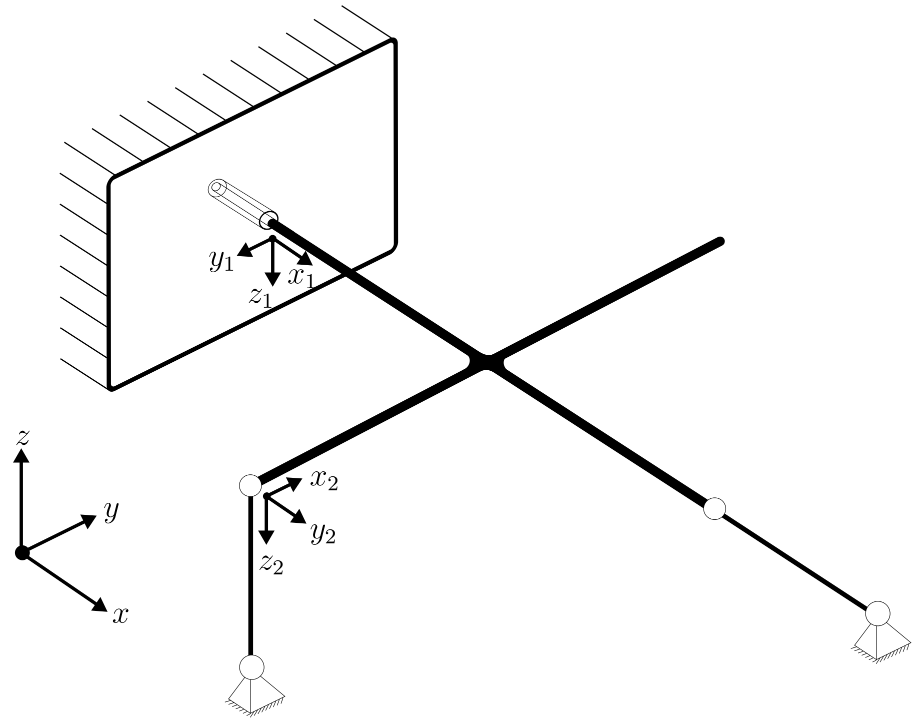
b) Skizzieren Sie für die Balken $\overline{AC}$ und $\overline{DE}$ den Verlauf der Biegemomente und des Torsionsmoments und geben Sie wichtige Ordinaten und Vorzeichen an. Verwenden Sie hierzu die beiliegenden Vorlagen und die gegebenen lokalen Koordinatensysteme.

Gegeben: a, P.

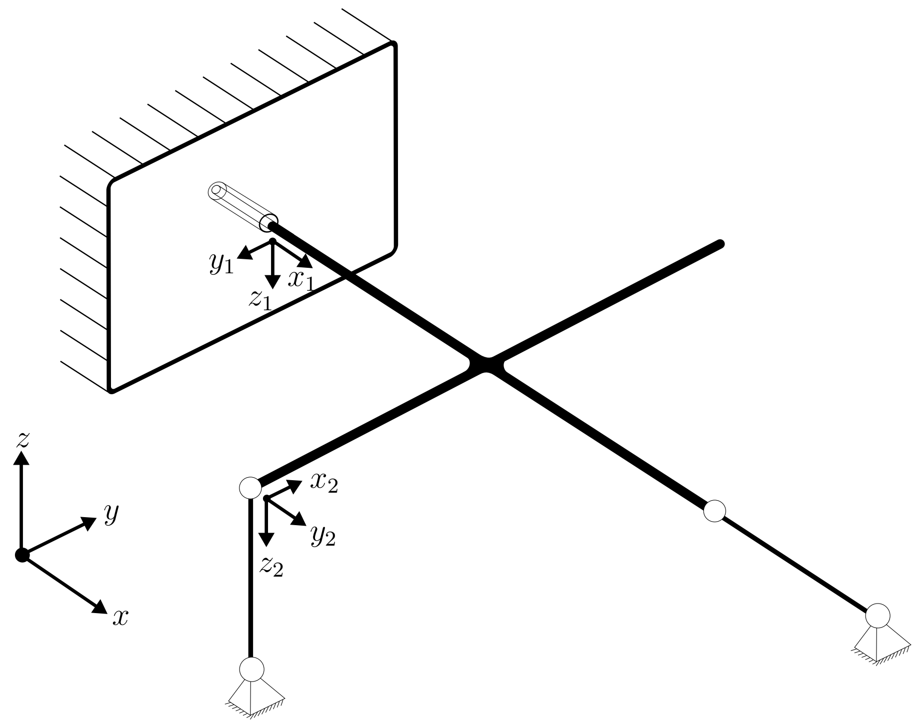
<u>Hinweis:</u>
Die Pendelstützen können sich nicht um ihre Stabachse verdrehen.

Vorlagen

Biegemomente

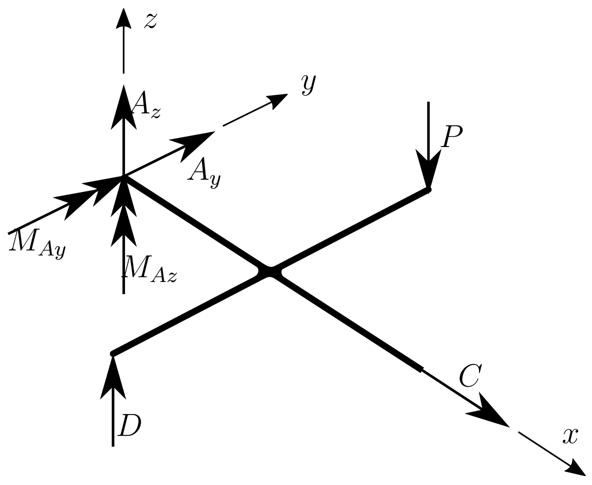


Torsionsmoment



Musterlösung - Aufgabe 3

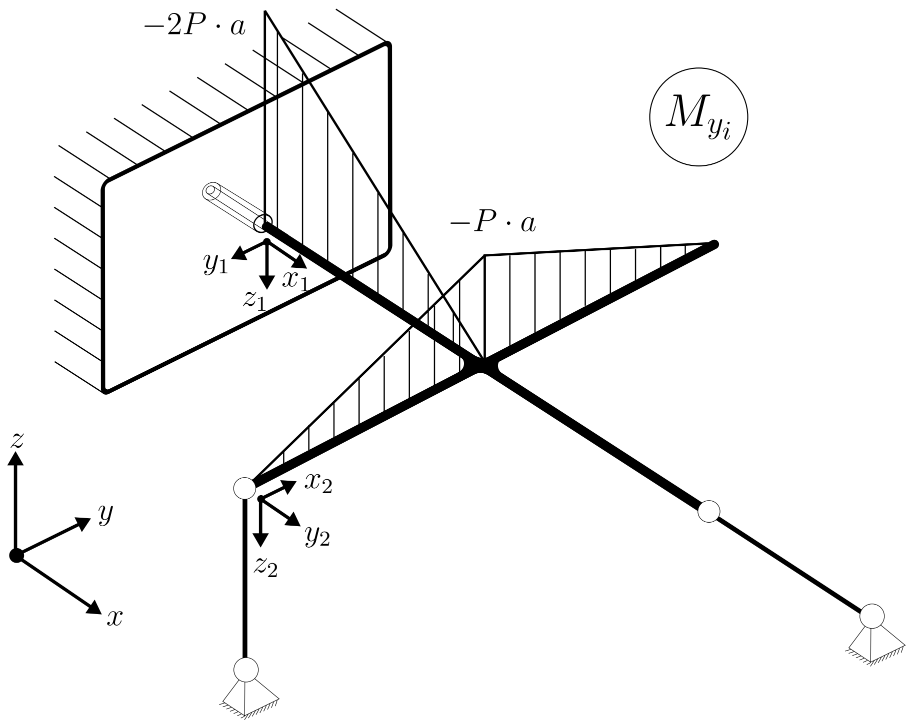
a) Freischnitt:



Freischnitt:

$$
\begin{aligned}
\Sigma F_x &= 0 & &\Rightarrow\quad C = 0\\
\Sigma F_y &= 0 & &\Rightarrow\quad A_y = 0\\
\Sigma M_z^A &= 0 & &\Rightarrow\quad M_{Az} = 0\\
\Sigma M_x^A &= 0: \quad -D \cdot a - p \cdot a = 0 & &\Rightarrow\quad D = -P\\
\Sigma M_y^A &= 0: \quad M_{Ay} + p \cdot a - D \cdot a = 0 & &\Rightarrow\quad M_{Ay} = -2Pa\\
\Sigma F_z &= 0: \quad A_z - P + D = 0 & &\Rightarrow\quad A_z = 2P
\end{aligned}
$$

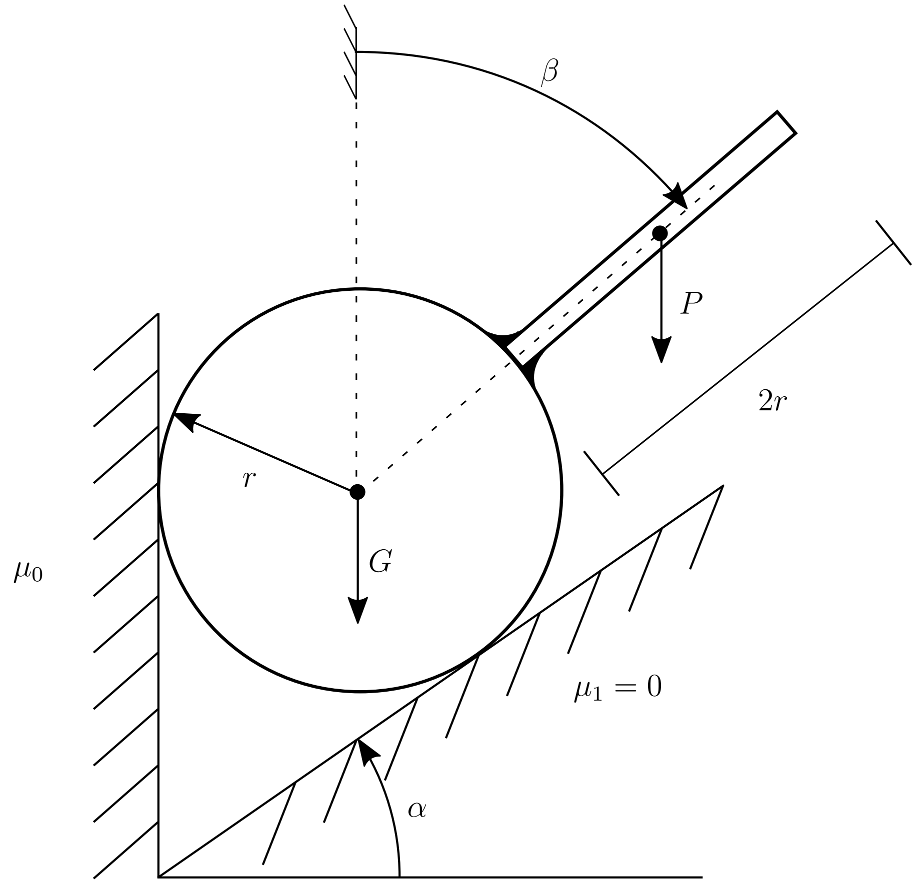
b) Momentenverläufe



$$M_{z_i} = 0$$

$$M_T = 0$$

4. Aufgabe: (ca. 17 % der Gesamtpunkte)



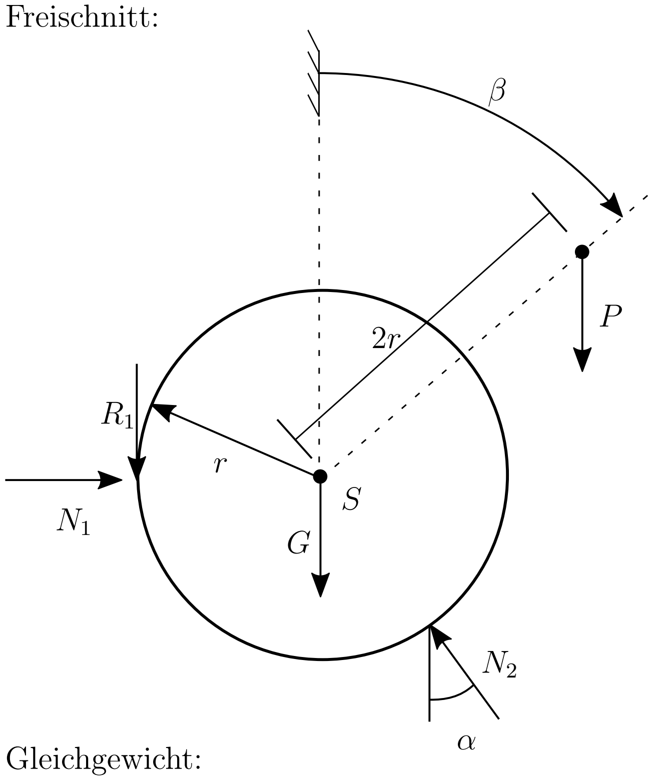
Ein Zylinder (Gewicht G, Radius r) liegt zwischen zwei Wänden. Die linke, vertikale Wand ist rauh - an ihr haftet der Zylinder (Haftkoeffizient μ_0). Die rechte, unten dem Winkel α gegen die Horizontale geneigte, Wand ist glatt ($\mu_1 = 0$). Am Zylinder ist ein homogener Stab der Länge $2r$ mit dem Gewicht P radial angeschweißt. Er ist unter dem Winkel β gegen die Vertikale geneigt.

Wie groß darf der Winkel β höchstens sein, damit der Zylinder nicht rutscht?

Gegeben: μ_0, α, G, P, r.

Musterlösung - Aufgabe 4

Freischnitt:



Gleichgewicht:

$$\Sigma\, F_H = 0 = N_1 - N_2 \sin(\alpha) \tag{1}$$

$$\Sigma\, F_V = 0 = -R_1 - P - G + N_2 \cos(\alpha) \tag{2}$$

$$\Sigma\, M^S = 0 = R_1 \cdot r - P \cdot 2r \cdot \sin(\beta) \tag{3}$$

Haftbedingung:

$$R_1 \leq \mu_0\, N_1 \tag{4}$$

Auflösen nach β:
aus (1) folgt:

$$N_1 = N_2 \sin(\alpha) \tag{5}$$

aus (2):

$$N_2 = \frac{R_1 + P + G}{\cos(\alpha)} \tag{6}$$

aus (3):

$$R_1 = 2P \sin(\beta) \tag{7}$$

(6) in (5):

$$N_1 = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}\,(R_1 + P + G) \tag{8}$$

mit (7):

$$N_1 = \tan(G + P + 2P \sin(\beta)) \tag{9}$$

mit (4):

$$2P \sin(\beta) \leq \mu_0 \tan(\alpha)(G + P + 2P \sin(\beta)) \tag{10}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
2P\sin(\beta) &\leq \mu_0\tan(\alpha)G + \mu_0\tan(\alpha)P + \mu_0\tan(\alpha)2P\sin(\beta) \\
2P\sin(\beta)(1+\mu_0\tan(\alpha)) &\leq \mu_0\tan(\alpha)(G+P) \\
\sin(\beta) &\leq \frac{\mu_0\tan(\alpha)(G+P)}{2P(1+\mu_0\tan(\alpha))}
\end{aligned} \tag{11}$$

Modulprüfung
Statik starrer Körper
am 19. August 2020

Lösungsvorlage

Name: .... Vorname: ....

Matr.-Nr: .... Studiengang: ....