Aufgabe 1 (ca. 15 % der Gesamtpunktzahl)

a) Was versteht man unter *stationärer Lösung* einer harmonisch erregten Schwingung und wie kann sie ermittelt werden?

b) Wie ist das logarithmische Dekrement einer schwach gedämpften harmonischen Schwingung definiert und zu welchem Zweck kann es verwendet werden?

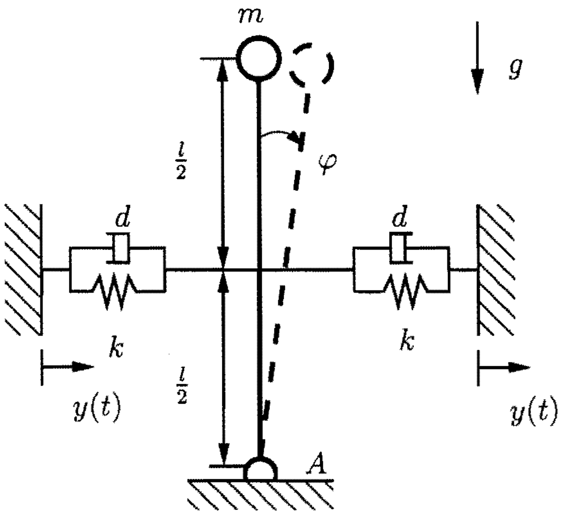
c) Die freien Schwingungen eines 1-FHG-Systems sollen in einem Phasendiagramm dargestellt werden. Zeichnen Sie zu diesem Zweck die Phasenkurven für 1) den ungedämpften Fall, und 2) den schwach gedämpften Fall.

d) Wie lässt sich die Beschreibung gekoppelter Mehrfreiheitsgradschwingungen entkoppeln? In welcher Form muss sich hierbei die Dämpfungsmatrix darstellen lassen?

e) Von welchen Größen hängt die maximale Amplitude infolge Erregung eines ungedämpften 1 FHG Schwingers durch einen plötzlichen (idealen) Stoß ab?

Aufgabe 2 (ca. 25 % der Gesamtpunktzahl)

Ein inverses Pendel ist durch zwei Federn (Federsteifigkeit k) und zwei Dämpfer (Dämpfungskonstante d) wie dargestellt mit den Wänden verbunden. Der Stab ist masselos und die Endmasse ist m.



a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung für kleine Schwingungen um die Ruhelage ohne Fremderregung $y(t) = 0$ auf.

b) Wie groß ist die Eigenkreisfrequenz ω_0 und der Dämpfungsgrad D?

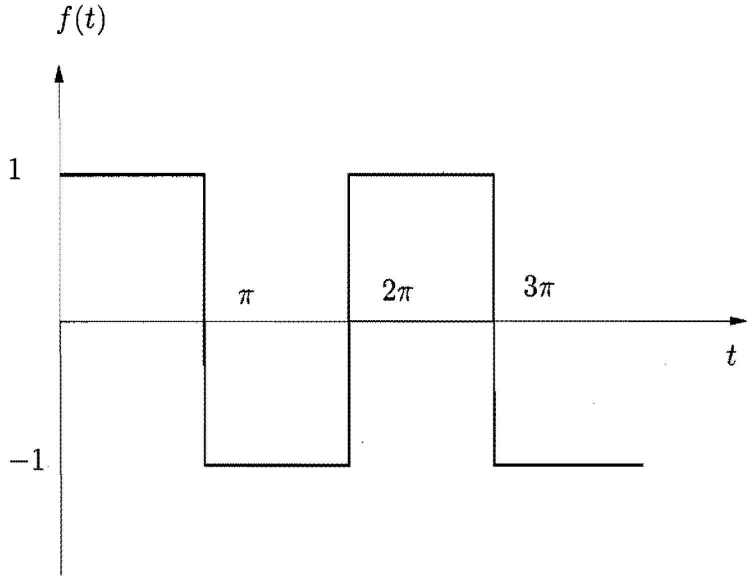
c) Unter welcher Voraussetzung handelt es sich bei der Ruhelage ($\varphi = 0$) um ein stabiles Gleichgewicht?

d) Eine Fremderregung der Wände ist gegeben als $y(t) = y_0 \cos(\Omega t)$. Bestimmen Sie die Systemantwort.

Gegeben: l, m, k, d, g

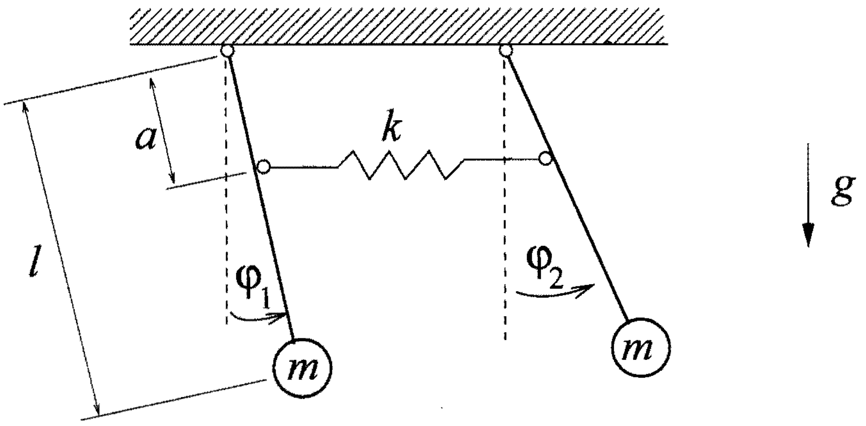
Aufgabe 3 (ca. 10 % der Gesamtpunktzahl)

Bestimmen Sie die Fourier-Koeffizienten der skizzierten *Rechteckschwingung* .



Aufgabe 4 (ca. 45 % der Gesamtpunktzahl)

Zwei gleiche Pendel (Länge l, Punktmasse m) seien wie skizziert im Abstand a von den Aufhängepunkten durch eine Feder (Steifigkeit k) verbunden.



a) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen für kleine Auslenkungen aus der Ruhelage auf.

b) Schätzen Sie mit Hilfe des Rayleigh-Quotienten die niedrigste Eigenkreisfrequenz des Systems ab.

c) Bestimmen Sie die Eigenkreisfrequenzen ω_1, ω_2, die Modalmatrix $\mathbf{\Phi}$ und die Lösung $\mathbf{q}(t)$ zu den Anfangsbedingungen $\varphi_1(0) = A$, $\varphi_2(0) = 0$, $\dot{\varphi}_1(0) = B$, $\dot{\varphi}_2(0) = 0$.

d) Parallel zur Feder soll noch ein Dämpfer (Dämpfungskonstante d) angebracht werden. Geben Sie die Rayleighsche Dissipationsfunktion an und berechnen Sie die Dämpfungsmatrix $\mathbf{D}$.

Gegeben: m, k, d, l, g, a

Baudynamik - Musterlösung

A1: a) Nach dem Abklingen des gedämpften Schwingung $x_h(\tau)$ ergibt sich eine stationäre Schwingung x_p (eingeschwungenen Zustand) mit der Amplitude $\bar{x}V$ und phasenwinkel γ gegen die Erregung.

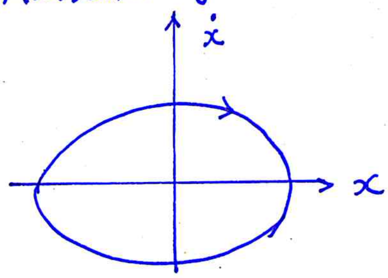
$$x_p = \bar{x}V\cos(\eta\tau - \gamma) \quad V = \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4D^2\eta^2}} \quad \tan\gamma = \frac{2D\eta}{1-\eta^2}$$

stationäre Lösung = partikuläre Lösung

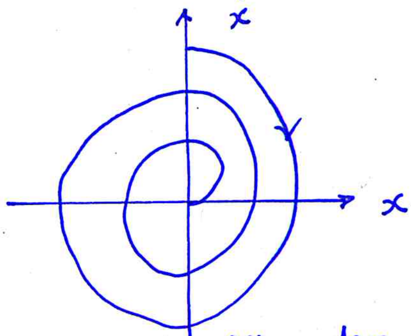
b) Logarithmische Dekrement $\Lambda = \ln\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}\right) = \frac{2\pi D}{\sqrt{1-D^2}}$

Experimentelle Bestimmung von D mittels „Ausschwingversuch"

c)



Phasenkurve für den ungedämpften Fall



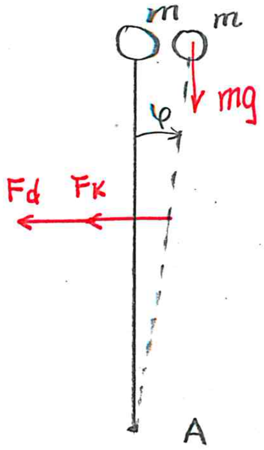
Phasenkurve für den schwach gedämpften Fall

d) Modaltransformation – Hauptkoordinaten einführen

$\underline{D} = \alpha\underline{M} + \beta\underline{K}$ Rayleigh Dämpfung

e) die maximale Amplitude $A_{max} = \frac{I}{\sqrt{km}}$

A2: a) Federkraft: $F_K = 2 \cdot K \cdot \frac{l}{2}\varphi = K l \varphi$



Dämpfungskraft: $F_d = 2 \cdot d \cdot \frac{l}{2}\dot{\varphi} = d l \dot{\varphi}$

Drallsatz bezüglich A:

$$A\curvearrowleft : \quad ml^2 \ddot{\varphi} = mgl\varphi - F_K \cdot \frac{l}{2} - F_d \cdot \frac{l}{2}$$

$$ml^2 \ddot{\varphi} = mgl\varphi - K\frac{l^2}{2}\varphi - d\frac{l^2}{2}\dot{\varphi}$$

$$ml^2\ddot{\varphi} + \frac{Kl^2}{2}\varphi - mgl\varphi + \frac{d}{2}l^2\dot{\varphi} = 0$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{d}{2m}\dot{\varphi} + \left(\frac{K}{2m} - \frac{g}{l}\right)\varphi = 0$$

a) $T = \frac{1}{2}m(l\dot{\varphi})^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2$

$V = mgl\cos\varphi + 2\cdot\frac{1}{2}K\left(\frac{l}{2}\varphi\right)^2 = mgl\cos\varphi + \frac{K}{4}l^2\varphi^2$

$R = 2\cdot\frac{1}{2}d\left(\frac{l}{2}\dot{\varphi}\right)^2 = \frac{d}{4}l^2\dot{\varphi}^2$

$L = T - V = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 - mgl\cos\varphi - \frac{K}{4}l^2\varphi^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 - mgl\left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right) - \frac{Kl^2}{4}$

$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2\dot{\varphi} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) = ml^2\ddot{\varphi} \qquad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = -\frac{K}{2}l^2\varphi + mgl$

$\frac{\partial R}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{d}{2}l^2\dot{\varphi} \qquad ml^2\ddot{\varphi} + \frac{K}{2}l^2\varphi - mgl\varphi + \frac{d}{2}l^2\dot{\varphi} = 0$

b) $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{2m} - \frac{g}{l}} \qquad D = \frac{d}{4m\omega_0} = \frac{d}{4m\sqrt{\frac{K}{2m} - \frac{g}{l}}}$

c) $\frac{d}{2m} > 0$ und $\frac{K}{2m} - \frac{g}{l} > 0$

d) $ml^2\ddot{\varphi} = mgl\varphi - 2K\left(\frac{l}{2}\varphi - y\right)\frac{l}{2} - 2d\left(\frac{l}{2}\dot{\varphi} - \dot{y}\right)\frac{l}{2}$

$$ml^2\ddot{\varphi} = mgl\varphi - \frac{K}{2}l^2\varphi + Kly - \frac{d}{2}l^2\dot{\varphi} + dl\dot{y}$$

$$ml^2\ddot{\varphi} + \left(\frac{Kl^2}{2} - mgl\right)\varphi + \frac{d}{2}l^2\dot{\varphi} = Kly + dl\dot{y}$$

$$m\ddot{\varphi} + \left(\frac{K}{2} - \frac{mg}{l}\right)\varphi + \frac{d}{2}\dot{\varphi} = \frac{K}{l}y + \frac{d}{l}\dot{y} = \hat{F}_e$$

Harmonische Bewegung $y = y_0 \cos(\Omega t)$

$$\hat{F_e} = \frac{d}{l}\dot{y} + \frac{K}{l} y = -\frac{d}{l}y_0\Omega \sin(\Omega t) + \frac{K}{l} y_0 \cos(\Omega t)$$

$$\hat{F_e} = \frac{y_0}{l}\left[K\cos(\Omega t) - d\,\Omega \sin(\Omega t) \right]$$

$$\hat{F_e} = \frac{y_0}{l}\sqrt{K^2+\Omega^2 d^2} \cos(\Omega t - \alpha) \qquad \begin{cases} \cos\alpha = K \\ \sin\alpha = d\Omega \end{cases}$$

Setze $\alpha = 0$ $\quad \hat{F_e} = \frac{y_0}{l}\sqrt{K^2+\Omega^2 d^2} \cos(\Omega t)$

Bewegungsgl. $\quad \ddot{\varphi} + \frac{d}{2m}\dot{\varphi} + \left(\frac{K}{2m} - \frac{g}{l}\right)\varphi = \frac{y_0}{lm}\sqrt{K^2+\Omega^2 d^2}\cos(\Omega t)$

mit $\tau = \omega_0 t$, $\quad \omega_0^2 = \frac{K}{2m} - \frac{g}{l}$, $\quad \frac{d}{2m\omega_0} = 2D$, $\quad \eta = \frac{\Omega}{\omega_0}$

$$\Rightarrow \omega_0^2 \varphi'' + \frac{d}{2m}\omega_0\varphi' + \omega_0^2\varphi = \frac{y_0}{ml}\sqrt{K^2+\Omega^2 d^2}\cos(\Omega t)$$

$$\varphi'' + \frac{d}{2m\omega_0}\varphi' + \varphi = \frac{y_0}{ml\omega_0^2}\sqrt{K^2+\Omega^2 d^2}\cos(\Omega t)$$

$$\varphi'' + 2D\varphi' + \varphi = \bar{x}_2 \cos(\Omega t) \qquad \bar{x}_2 = \frac{y_0}{ml\omega_0^2}\sqrt{K^2+\Omega^2 d^2}$$

Partikuläre Lösung: $x_p = C_p \cos(\eta\tau - \gamma)$

Amplitude: $C_p = \bar{x}_2 V = \frac{y_0}{ml\omega_0^2}\sqrt{K^2+\Omega^2 d^2}\,\frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2+4D^2\eta^2}}$

Phasenwinkel:

$$\gamma = \arctan\frac{2D\eta}{1-\eta^2}$$

A3: ungerade Funktion: $a_0 = C_K = 0 \qquad \Omega = \frac{2\pi}{T}$

$$S_K = \frac{2}{T}\int_0^T x_e(t)\sin(K\Omega t)\,dt = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} +\sin(K\Omega t)\,dt$$

$$+\frac{2}{T}\int_{\frac{T}{2}}^{T}[-\sin(K\Omega t)]\,dt = \frac{2}{T}\left(-\frac{1}{K\Omega}\right)\cos(K\Omega t)\Big|_0^{\frac{T}{2}}$$

$$+\frac{2}{T}\frac{1}{K\Omega}\cos(K\Omega t)\Big|_{\frac{T}{2}}^{T} = \frac{2}{T}\left(-\frac{1}{K\Omega}\right)\left[\cos\left(K\Omega\frac{T}{2}\right) - 1\right]$$

$$+\frac{2}{T}\frac{1}{K\Omega}\left[\cos(K\Omega T) - \cos\left(K\Omega\frac{T}{2}\right)\right] = \frac{2}{T}\left(-\frac{1}{K\Omega}\right)\left[\cos(K\pi) - 1\right]$$

$$+\frac{2}{T}\frac{1}{K\Omega}\left[\cos(2K\pi) - \cos(K\pi)\right]$$

K gerade Zahl: 0

K ungerade Zahl: $-\frac{1}{K\pi}(-2) + \frac{1}{K\pi}\cdot 2 = \frac{4}{K\pi}$

A4: a) $T = \frac{1}{2} m\ell^2 \dot\varphi_1^2 + \frac{1}{2} m\ell^2 \dot\varphi_2^2 = \frac{1}{2} \dot{\underline{q}}^T \underline{M} \dot{\underline{q}} \qquad \dot{\underline{q}} = \begin{bmatrix} \dot\varphi_1 \\ \dot\varphi_2 \end{bmatrix}$

Massenmatrix: $\underline{M} = \begin{bmatrix} m\ell^2 & 0 \\ 0 & m\ell^2 \end{bmatrix}$

$V = mg(\ell - \ell\cos\varphi_1) + mg(\ell - \ell\cos\varphi_2) + \frac{1}{2}\kappa a^2(\varphi_2 - \varphi_1)^2$

$= mg\ell \frac{\varphi_1^2}{2} + mg\ell\frac{\varphi_2^2}{2} + \frac{1}{2}\kappa a^2\varphi_2^2 + \frac{1}{2}\kappa a^2 \varphi_1^2 - \frac{1}{2}\kappa a^2 2\varphi_1\varphi_2$

$= \frac{1}{2} \underline{q}^T \underline{K}\, \underline{q} \qquad \underline{q} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}$ Steifigkeitsmatrix:

$\underline{K} = \begin{bmatrix} \kappa a^2 + mg\ell & -\kappa a^2 \\ -\kappa a^2 & \kappa a^2 + mg\ell \end{bmatrix}$

Bewegungsgleichungen:

$$\begin{bmatrix} m\ell^2 & 0 \\ 0 & m\ell^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot\varphi_1 \\ \ddot\varphi_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \kappa a^2 + mg\ell & -\kappa a^2 \\ -\kappa a^2 & \kappa a^2 + mg\ell \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

b) Schätzen $\underline{\Phi} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$R = \frac{\underline{\Phi}^T \underline{K}\, \underline{\Phi}}{\underline{\Phi}^T \underline{M}\, \underline{\Phi}} = \frac{[1\ 1]\begin{bmatrix} \kappa a^2 + mg\ell & -\kappa a^2 \\ -\kappa a^2 & \kappa a^2 + mg\ell \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}{[1\ 1]\begin{bmatrix} m\ell^2 & 0 \\ 0 & m\ell^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}} = \frac{g}{\ell}$$

$\omega_1^2 \le R = \frac{g}{\ell}$

c) Charakteristische Gl. $\det(\underline{K} - \lambda \underline{M}) = 0$

$$\begin{vmatrix} \kappa a^2 + mg\ell - \lambda m\ell^2 & -\kappa a^2 \\ -\kappa a^2 & \kappa a^2 + mg\ell - \lambda m\ell^2 \end{vmatrix} = 0$$

$(\kappa a^2 + mg\ell - \lambda m\ell^2)^2 = \kappa^2 a^4 \qquad \kappa a^2 + mg\ell - \lambda m\ell^2 = \pm\kappa a^2$

$\kappa a^2 + mg\ell - \lambda_1 m\ell^2 = \kappa a^2 \qquad \lambda_1 = \frac{mg\ell}{m\ell^2} = \frac{g}{\ell}$

$\kappa a^2 + mg\ell - \lambda_2 m\ell^2 = -\kappa a^2 \qquad \lambda_2 = \frac{2\kappa a^2 + mg\ell}{m\ell^2}$

Eigenkreisfrequenzen: $\omega_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$

$\omega_2 = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{\frac{2\kappa a^2 + mg\ell}{m\ell^2}}$

Eigenvektoren: $(\underline{K} - \omega^2 \underline{M})\,\underline{c} = 0$

ω_1^2: $(Ka^2 + mgl - \omega_1^2 ml^2)\, c_{11} + (-Ka^2)\, c_{21} = 0$

$$c_{11} = c_{21}$$

ω_2^2: $(Ka^2 + mgl - \omega_2^2 ml^2)\, c_{12} + (-Ka^2)\, c_{22} = 0$

$$c_{12} = -\,c_{22}$$

Normierung:

$$\underline{\phi}_1^T \underline{M}\, \underline{\phi}_1 = [c_{11} \quad c_{21}] \begin{bmatrix} ml^2 & 0 \\ 0 & ml^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{bmatrix} = c_{11}^2 ml^2 + c_{21}^2 ml^2$$

$c_{11} = c_{21}$ $\quad \underline{\phi}_1^T \underline{M}\, \underline{\phi}_1 = 2 c_{11}^2 ml^2 = c^2$

Wähle $c_{11} = 1$ $\quad c^2 = 2ml^2$ $\quad \underline{\phi}_1 = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Analog: $\underline{\phi}_2^T \underline{M}\, \underline{\phi}_2 = [c_{12} \quad c_{22}] \begin{bmatrix} ml^2 & 0 \\ 0 & ml^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{12} \\ c_{22} \end{bmatrix} = c_{12}^2 ml^2 + c_{22}^2 ml$

$c_{12} = -c_{22}$ $\quad \underline{\phi}_2^T \underline{M}\, \underline{\phi}_2 = 2 c_{12}^2 ml^2 = c^2$

Wähle $c_{12} = 1$ $\quad c^2 = 2ml^2$ $\quad \underline{\phi}_2 = \begin{bmatrix} c_{12} \\ c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

Modalmatrix: $\underline{\Phi} = [\underline{\phi}_1 \quad \underline{\phi}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

Modaltransformation: $\underline{q} = \underline{\Phi}\, \underline{x}$ $\quad \underline{q}(0) = \begin{bmatrix} A \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad \underline{\dot q}(0) = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}$

Lösung: $x_i(t) = A_i \cos(\omega_i t) + B_i \sin(\omega_i t)$

Anfangswert:

$$\underline{x}(0) = \underline{\Phi}^{-1} \underline{q}(0) = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{A}{2} \\ \frac{A}{2} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\dot x}(0) = \underline{\Phi}^{-1} \underline{\dot q}(0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} \end{bmatrix}$$

$$x_1(0) = A_1 \cos(0) + B_1 \sin 0 = A_1 = \frac{A}{2}$$

$$x_2(0) = A_2 \cos(0) + B_2 \sin 0 = A_2 = \frac{A}{2}$$

$$\dot x_1(0) = -A_1 \omega_1 \sin(\omega_1 0) + B_1 \omega_1 \cos(\omega_1 0) = B_1 \omega_1 = \frac{B}{2}$$

$$\dot x_2(0) = -A_2 \omega_2 \sin(\omega_2 0) + B_2 \omega_2 \cos(\omega_2 0) = B_2 \omega_2 = \frac{B}{2}$$

$$B_1 = \frac{B}{2\omega_1} \qquad B_2 = \frac{B}{2\omega_2}$$

$$x_i(t) = \frac{A}{2} \cos(\omega_i t) + \frac{B}{2\omega_i} \sin(\omega_i t)$$

$$\underline{q} = \underline{\Phi}\,\underline{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{A}{2}\cos(\omega_1 t) + \frac{B}{2\omega_1}\sin(\omega_1 t) \\ \frac{A}{2}\cos(\omega_2 t) + \frac{B}{2\omega_2}\sin(\omega_2 t) \end{bmatrix}$$

$$\underline{q} = \begin{bmatrix} \frac{A}{2}\cos(\omega_1 t) + \frac{B}{2\omega_1}\sin(\omega_1 t) + \frac{A}{2}\cos(\omega_2 t) + \frac{B}{2\omega_2}\sin(\omega_2 t) \\ \frac{A}{2}\cos(\omega_1 t) + \frac{B}{2\omega_1}\sin(\omega_1 t) - \frac{A}{2}\cos(\omega_2 t) - \frac{B}{2\omega_2}\sin(\omega_2 t) \end{bmatrix}$$

d) $R = \frac{1}{2} d \,(a\dot{\varphi}_2 - a\dot{\varphi}_1)^2 = \frac{1}{2} a^2 d \,(\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 - 2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2)$

$R = \frac{1}{2}\dot{\underline{q}}^T \underline{D}\,\dot{\underline{q}} \qquad \underline{D} = \begin{bmatrix} a^2 d & -a^2 d \\ -a^2 d & a^2 d \end{bmatrix} \qquad \dot{\underline{q}} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \end{bmatrix}$