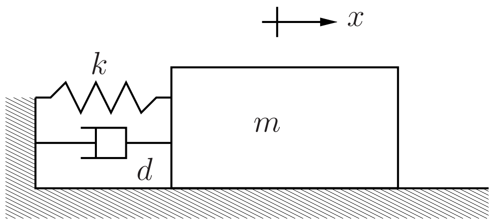
1. Aufgabe: (ca. 13% der Gesamtpunkte)

a) Was versteht man unter *stationärer Lösung* einer harmonisch erregten Schwingung?

b) Skizzieren Sie (ohne Rechnung) für folgendes System die Phasenkurve ($\dot{x}$ über x) für $x(0) = x_0 = 0$ und $\dot{x}(0) = v_0 < 0$.



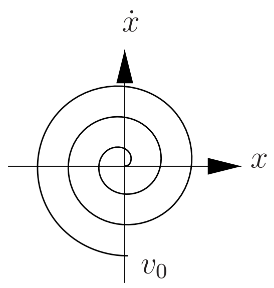
c) Wie ist die Rayleighsche Dissipationsfunktion im Zusammenhang mit schwach gedämpften Schwingungen von Mehr-FHG-Systemen definiert und wie geht sie in die Energiebilanz ein?

d) Was versteht man unter aktiver und passiver Schwingungsisolierung?

Musterlösung - Aufgabe 1

a) Nach dem Abklingen der gedämpften Schwingung $x_h(t)$ ergibt sich die stationäre Schwingung $x_p(t)$ (stationäre Lösung = partikuläre Lösung).

b)



c)

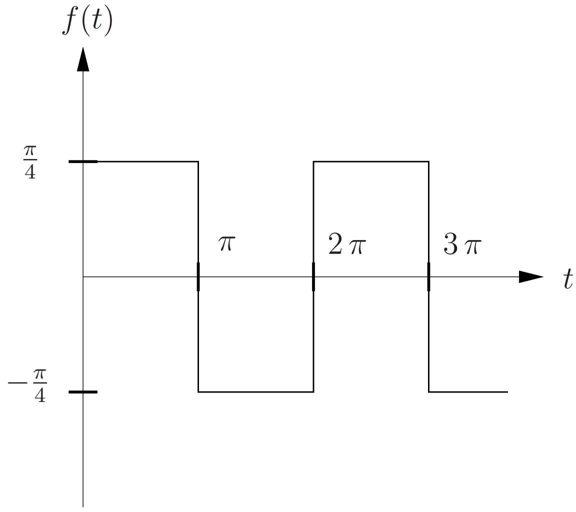
$$R = \frac{1}{2} \sum_i d_i \, v_{\mathrm{Rel},i}^2 = \frac{1}{2} \, \dot{\boldsymbol{q}} \cdot \boldsymbol{D} \, \dot{\boldsymbol{q}}, \qquad \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = -2\,R$$

d) Ziel der passiven Schwingungsisolierung: Schutz eines Schwingers (Gebäudes) vor Belastungen infolge Fundamenterregungen.

Ziel der aktiven Schwingungsisolierung: Abschirmung von Maschinen (unwuchterregter Schwinger) vom Fundament.

2. Aufgabe: (ca. 11% der Gesamtpunkte)

Berechnen Sie die Fourier-Koeffizienten der skizzierten Rechteckschwingung.



Musterlösung - Aufgabe 2

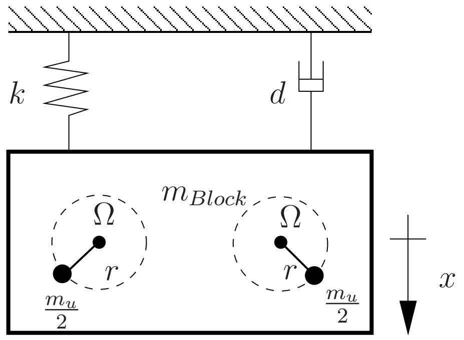
Fourier-Reihe

ungerade Funktion: $a_0 = 0, \quad a_k = C_k = 0$

$$
\begin{aligned}
b_k = S_k &= \frac{2}{T}\int_0^T x_e(t)\,\sin(k\,\Omega\,t)\ \mathrm{d}t = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} +\frac{\pi}{4}\ \sin(k\,\Omega\,t)\ \mathrm{d}t + \frac{2}{T}\int_{T/2}^{T} -\frac{\pi}{4}\ \sin(k\,\Omega\,t)\ \mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{T}\,\frac{1}{k\,\Omega}\,\frac{\pi}{4}\,(-\cos(k\,\Omega\,t)|_0^{\frac{T}{2}} + \cos(k\,\Omega\,t)|_{\frac{T}{2}}^{T}) \quad |\,\text{mit:}\,\Omega = \frac{2\,\pi}{T} \\
&= \frac{2}{T}\,\frac{1}{k\,\frac{2\,\pi}{T}}\,\frac{\pi}{4}\,(-[\cos(k\,\pi) - \cos(0)] + [\cos(k\,2\,\pi) - \cos(k\,\pi)]) \\
&= \frac{1}{4\,k}\,(\cos(k\,2\,\pi) - 2\,\cos(k\,\pi) + 1) \\
&= \frac{1}{2\,k}\,(1 - \cos(k\,\pi)) \\
&= \begin{cases} 0 & \text{für gerade ganze Zahl } k \\ \frac{1}{k} & \text{für ungerade ganze Zahl } k \end{cases}
\end{aligned}
$$

3. Aufgabe: (ca. 28% der Gesamtpunkte)

Gegeben ist ein gedämpfter Oszillator, der durch zwei rotierende Unwuchten eine dynamische Fremderregung erfährt. Die Auslenkung x wird aus der statischen Gleichgewichtslage gezählt.



Gegeben: $m_{Block},\ m_u,\ \Omega,\ r,\ k,\ d.$

a) Schneiden Sie das System frei und bestimmen Sie die Kraft, die die Unwuchten auf das System ausüben in Abhängigkeit der gegeben Größen.

b) Stellen Sie für das System die Bewegungsgleichung auf.

Im Weiteren sind folgende Werte gegeben: $m_{Block} = 50kg,\ m_u = 1kg,\ \Omega = 1\frac{1}{s},\ r = 0.1m,\ k = 6 \cdot 10^6 N/m,\ d = 200Ns/m.$

c) Wie groß sind die Eigenkreisfrequenz und der Dämpfungsgrad des gedämpften Systems?

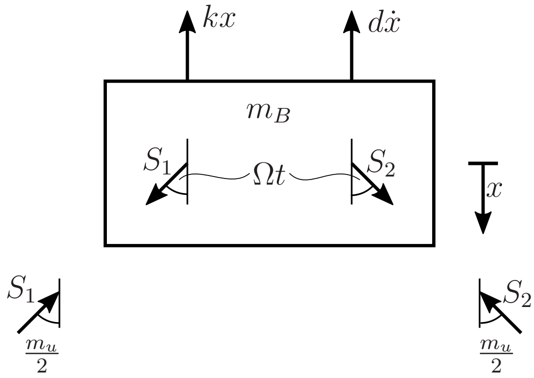
d) Bestimmen Sie das Frequenzverhältnis des Systems.

e) Bei welcher Frequenz erreicht der Verstärkungsfaktor V sein Maximum?

f) Wie groß ist der Verstärkungsfaktor V bei dieser Frequenz?

Musterlösung - Aufgabe 3

a) Freikörperbild:



$$\frac{m_u}{2}\ddot{x}_u = -S_1\cos(\Omega t)\ , \quad \frac{m_u}{2}\ddot{x}_u = -S_2\cos(\Omega t)\ , \quad x_u = x + r\cos(\Omega t)$$

$$m_B\,\ddot{x} = -k\,x - d\,\dot{x} + S_1\,\cos(\Omega t) + S_2\,\cos(\Omega t)$$

$$\Leftrightarrow (m_B + m_u)\,\ddot{x} + d\dot{x} + kx = \underbrace{m_u r\Omega^2\cos(\Omega t)}_{F_u}$$

b)

$$\ddot{x} + \frac{d}{m_B + m_u}\dot{x} + \frac{k}{m_B + m_u}x = \frac{F_u}{m_B + m_u}$$

c)

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m_B + m_u}} = 343\frac{1}{s}\ , \quad D = \frac{d}{2\,(m_B + m_u)\,\omega_0} = 0.0057$$

d)

$$\eta = \frac{\Omega}{\omega_0} = 0.0029$$

e)

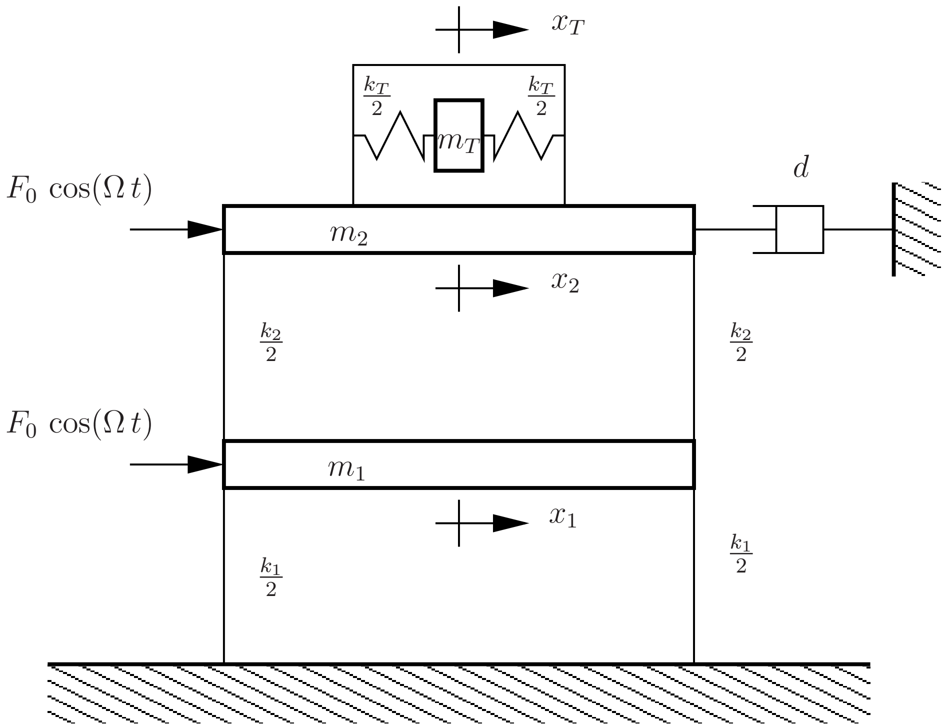
$$\eta_{\text{krit}} = \sqrt{\frac{1}{1 - 2D^2}} = 1$$

f)

$$V = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \eta_{\text{krit}}^2\right)^2 + \left(2D\eta_{\text{krit}}\right)^2}} = \frac{1}{2D} = 87.5$$

4. Aufgabe: (ca. 48% der Gesamtpunkte)

Der skizzierte Stockwerkrahmen (Gebäude) besteht aus starren Riegeln mit Massen m_1, m_2, masselosen Stielen mit Steifigkeiten $\frac{k_1}{2}$, $\frac{k_2}{2}$ und einem Dämpfer mit Dämpfungskonstante d sowie aus einem Schwingungstilger mit Tilgermasse m_T und Federkonstante k_T. Das Gehäuse des Tilgers sei mit der zweiten Etage fest verbunden und soll als masselos angenommen werden. Ferner wird das System durch eine Krafterregung (Windlast) mit Amplitude F_0 und Erregerfrequenz Ω zum Schwingen angeregt. Es soll angenommen werden, dass sich die Massen m_1 und m_2 nur in horizontaler Richtung verschieben.



Gegeben: k_1, k_2, k_T, m_1, m_2, m_T, d, F_0, Ω.

a) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen mit Hilfe des Lagrange Formalismus 2. Art auf.

b) Liegt durchdringende oder vollständige Dämpfung vor? Warum?

Im Weiteren wird der Schwingungstilger, die Fremderregung (Windlast) sowie die Dämpfung entfernt. Es liegt folgendes System von Bewegungsgleichungen vor

$$\boldsymbol{M}\,\ddot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{K}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 2\,k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}$$

wobei m und k nun gegeben sind.

c) Schätzen Sie mit Hilfe des Rayleigh-Quotienten die erste Eigenkreisfrequenz ab.

d) Bestimmen Sie die Eigenkreisfrequenzen des Systems.

e) Bestimmen Sie die Modalvektoren und stellen Sie diese grafisch dar.

Musterlösung - Aufgabe 4

a)

$$T = \frac{1}{2}\, m_1\, \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}\, m_2\, \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}\, m_T\, \dot{x}_T^2$$
$$R = \frac{1}{2}\, d\, \dot{x}_2^2$$
$$V = \frac{1}{2}\, k_1\, x_1^2 + \frac{1}{2}\, k_2\, (x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2}\, k_T\, (x_T - x_2)^2$$
$$Q_k^* = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{F}_i\, \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial x_k}, \quad F_1 = F_0\, \cos(\Omega\, t), \quad r_1 = x_1, \quad F_2 = F_0\, \cos(\Omega\, t), \quad r_2 = x_2$$

Lagrange-Gleichungen für nicht-konservative Systeme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_k}\Big) + \frac{\partial V}{\partial x_k} + \frac{\partial V}{\partial x_k} + \frac{\partial R}{\partial \dot{x}_k} = Q_k^*, \quad k = 1, ..., n$$
$$m_1\, \ddot{x}_1 + k_1\, x_1 + k_2\, (x_1 - x_2) = F_0\, \cos(\Omega\, t)$$
$$m_2\, \ddot{x}_2 - k_2\, (x_1 - x_2) - k_T\, (x_T - x_2) + d\, \dot{x}_2 = F_0\, \cos(\Omega\, t)$$
$$m_T\, \ddot{x}_T + k_T\, (x_T - x_2) = 0$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_T \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{M}} \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_T \end{bmatrix}}_{\ddot{\boldsymbol{x}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{D}} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_T \end{bmatrix}}_{\dot{\boldsymbol{x}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_T & -k_T \\ 0 & -k_T & k_T \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{K}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_T \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} F_0\, \cos(\Omega\, t) \\ F_0\, \cos(\Omega\, t) \\ 0 \end{bmatrix}}_{\hat{\boldsymbol{F}}}$$

b) Notwendige Bedingung für durchdringende Dämpfung: $R = \frac{1}{2}\, \dot{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{D}\, \dot{\boldsymbol{x}} \geq 0\, \forall \dot{\boldsymbol{x}} \neq \boldsymbol{0}$

R muss positiv semidefinit sein, d.h. alle Eigenwerte von $\boldsymbol{D}$ müssen größer Null und mind. ein Eigenwert muss Null sein

EWP für $\boldsymbol{D}$

$$\det(\boldsymbol{D} - \lambda\, \boldsymbol{I}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & d - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad | \text{ Lsg. mit Hilfe von Unterdeterminanten}$$

$$-\lambda \begin{vmatrix} d - \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda\, (d - \lambda)\, (-d) = \lambda^2\, (d - \lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = 0, \quad \lambda_3 = d$$

Nicht gefordert in Klausur: Hinreichende Bedingung für durchdringende Dämpfung:

Es liegt Kopplung in $\boldsymbol{K}$ vor. Durchdringende Dämpfung falls EVen von $\boldsymbol{D}$ und Koeffizientenmatrix des ungedämpften Systems nicht jeweils linear abhängig sind.

c) Schätze

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{oder} \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{etc.}$$

Rayleigh-Quotient

$$\tilde{R}_1 = \frac{\boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{K}\, \boldsymbol{\varphi}}{\boldsymbol{\varphi} \cdot \boldsymbol{M}\, \boldsymbol{\varphi}} = \frac{2\, k}{5\, m} = \frac{2}{5}\, \omega_0^2 \geq \omega_1^2 \quad \text{oder} \quad \tilde{R}_2 = \frac{1}{2}\, \omega_0^2 \geq \omega_1^2 \quad \text{etc.}$$

d) Eigenwertproblem (EWP) mit Ansatz: $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{C}\, \cos(\omega t - \alpha)$

$$\big(\boldsymbol{K} - \omega^2 \boldsymbol{M}\big)\, \boldsymbol{C} = 0$$

Charakteristische Gleichung:

$$
\begin{aligned}
&\det\left(\boldsymbol{K}-\omega^2\boldsymbol{M}\right)=0\\
\Leftrightarrow &\begin{vmatrix} 2k-\omega^2 m & -k \\ -k & k-\omega^2 m \end{vmatrix}=0\\
\Leftrightarrow &\left(2k-\omega^2 m\right)\left(k-\omega^2 m\right)-k^2=0 \quad | : m^2 \text{ mit Bezugsfrequenz } \omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}\\
\Leftrightarrow &(2\underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega_0^2}-\omega^2)(\underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega_0^2}-\omega^2)-(\underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega_0^2})^2=0\\
\Leftrightarrow &2\omega_0^4-3\omega_0^2\omega^2+\omega^4-\omega_0^4=0\\
\Leftrightarrow &\omega^4-3\omega_0^2\omega^2+\omega_0^4=0
\end{aligned}
$$

Eigenkreisfrequenzen

$$
\omega_{1/2}^2=\frac{3\omega_0^2\pm\sqrt{9\omega_0^4-4\omega_0^4}}{2}=\frac{3\mp\sqrt{5}}{2}\omega_0^2, \quad \omega_1=0.62\omega_0, \quad \omega_2=1.62\omega_0
$$

e) Amplitudenverhältnisse

$$
\begin{aligned}
\mu_i&=-\frac{K_{11}-\omega_i^2 M_{11}}{K_{12}-\omega_i^2 M_{12}}=2-\left(\frac{\omega_i}{\omega_0}\right)^2\\
\mu_1&=2-\frac{3-\sqrt{5}}{2}=1.62\\
\mu_2&=2-\frac{3+\sqrt{5}}{2}=-0.62
\end{aligned}
$$

Modalvektoren

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{C}_1&=C_{11}\begin{bmatrix}1\\ \mu_1\end{bmatrix}=C_{11}\begin{bmatrix}1\\ 1.62\end{bmatrix} \quad \text{Grundschwingung}\\
\boldsymbol{C}_2&=C_{12}\begin{bmatrix}1\\ \mu_2\end{bmatrix}=C_{12}\begin{bmatrix}1\\ -0.62\end{bmatrix} \quad \text{Oberschwingung}
\end{aligned}
$$

1. Grundschwingung
2. Oberschwingung