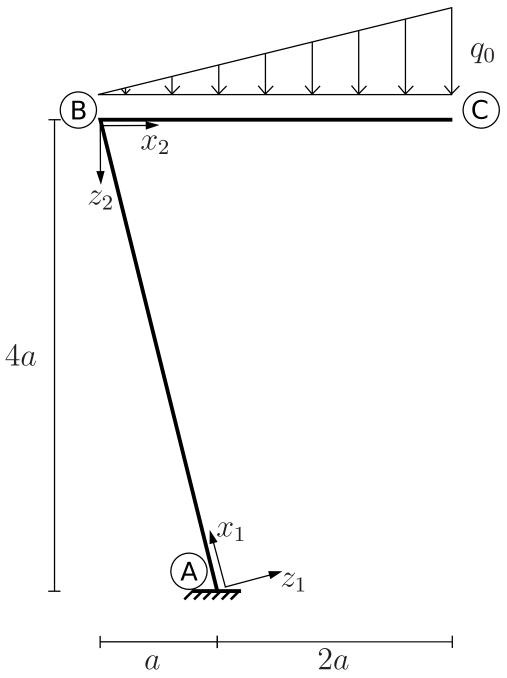
1. Aufgabe (ca. 33% der Gesamtpunktzahl)



Die oben dargestellte abgeschrägte Tribünenüberdachung wird durch die skizzierte linear verteilte Last

$$q(x_2) = \frac{q_0}{3a} x_2$$

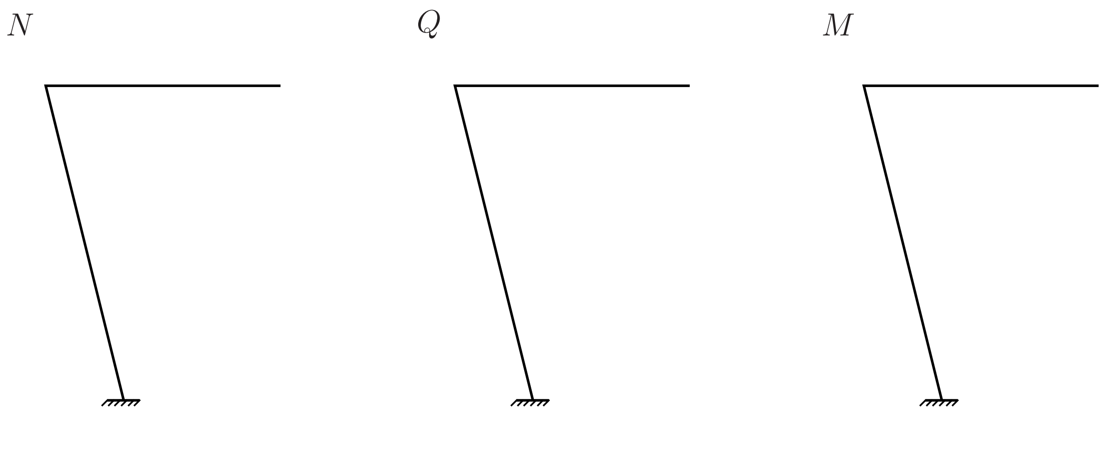
beansprucht.

a) Bestimmen Sie die Lagerreaktionen an der Einspannstelle A.

b) Bestimmen Sie den Verlauf der Schnittgrößen im gesamten System in Abhängigkeit von den Koordinaten x_1 und x_2.

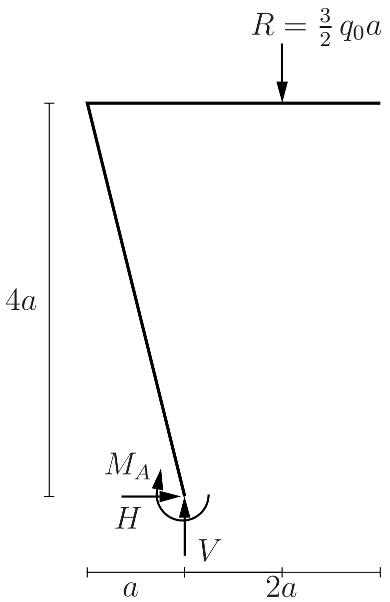
c) Skizzieren Sie die Schnittgrößenverläufe.

Gegeben: $a,\ q_0$.



Lösung 1. Aufgabe (ca. X % der Gesamtpunktzahl)

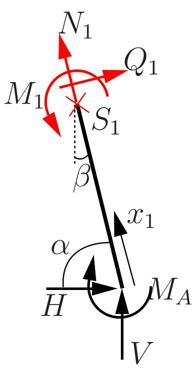
a) Freischnitt



$$\sum F_{ix} = 0 : H = 0$$
$$\sum F_{iy} = 0 : V = R = \frac{3}{2} q_0 a$$
$$\sum M^A = 0 : M_A = -R\,a = -\frac{3}{2} q_0 a^2$$

b) Schnittgrößen

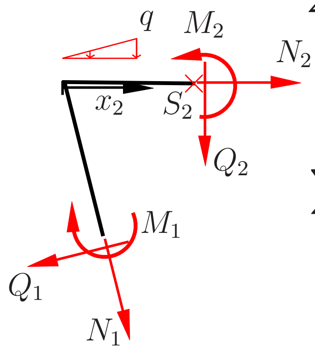
Koordinate x_1:



$$sin(\alpha) = cos(\beta) = \frac{4}{\sqrt{17}}$$
$$cos(\alpha) = sin(\beta) = \frac{1}{\sqrt{17}}$$
$$\sum F_{ix_1} = 0 : N_1 = -V cos(\beta) = -\frac{6}{\sqrt{17}} q_0 a$$
$$\sum F_{iz_1} = 0 : Q_1 = -V sin(\beta) = -\frac{3}{2\sqrt{17}} q_0 a$$
$$\sum M^{S_1} = 0 : M_1 = M_A - V sin(\beta) x_1$$
$$M_1 = -(\frac{3}{2} a + \frac{3}{2\sqrt{17}} x_1)\, q_0 a$$

Koordinate x_2:

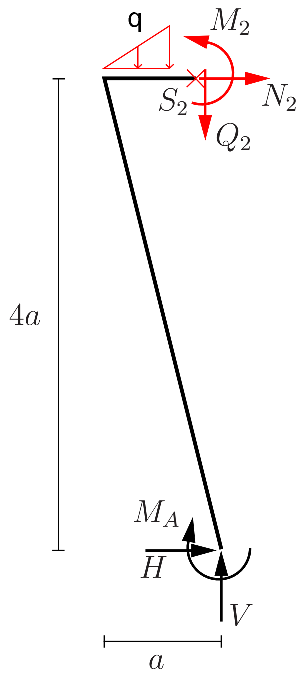
Variante 1:



$$M_1(x_1 = \sqrt{17}a) = -3q_0a$$

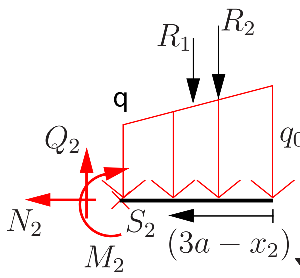
$$\begin{aligned}
\sum F_{ix_2} = 0 : N_2 &= Q_1 cos(\beta) - N_1 sin(\beta) \\
&= -\frac{6}{\sqrt{17}}q_0a + \frac{6}{\sqrt{17}}q_0a \\
&= 0 \\
\sum F_{iz_2} = 0 : Q_2 &= -Q_1 sin(\beta) - N_1 cos(\beta) - \frac{1}{2}qx_2^2 \\
&= \frac{24}{17}q_0a + \frac{3}{34}q_0a - \frac{1}{6a}q_0x_2^2 \\
&= \frac{3}{2}q_0a - \frac{q_0}{6a}\ x_2^2 \\
\sum M^{S_2} = 0 : M_2 &= M_1 - \frac{1}{2}qx_2^2(\frac{1}{3}x_2) - Q_1 sin(\beta)x_2 - N_1 cos(\beta)x_2 \\
&= -3q_0a^2 - \frac{1}{18a}q_0x_2^3 + \frac{3}{2}q_0ax_2
\end{aligned}$$

Variante 2:



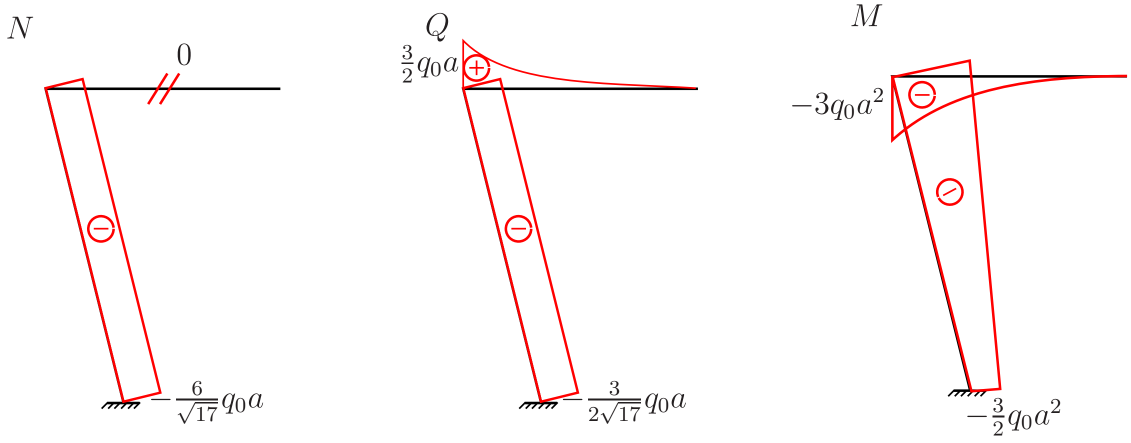
$$\begin{aligned}
\sum F_{ix_2} = 0 : N_2 &= -H = 0 \\
\sum F_{iz_2} = 0 : Q_2 &= V - \frac{1}{2}qx_2^2 \\
&= \frac{3}{2}q_0a - \frac{q_0}{6a}\ x_2^2 \\
\sum M^{S_2} = 0 : M_2 &= M_A - \frac{1}{2}qx_2^2(\frac{1}{3}x_2) + V(x_2 - a) \\
&= -\frac{3}{2}q_0a^2 - \frac{1}{18a}q_0x_2^3 - \frac{3}{2}q_0a^2 + \frac{3}{2}q_0ax_2 \\
&= -3q_0a^2 - \frac{1}{18}q_0x_2^3 + \frac{3}{2}q_0ax_2
\end{aligned}$$

Variante 3:

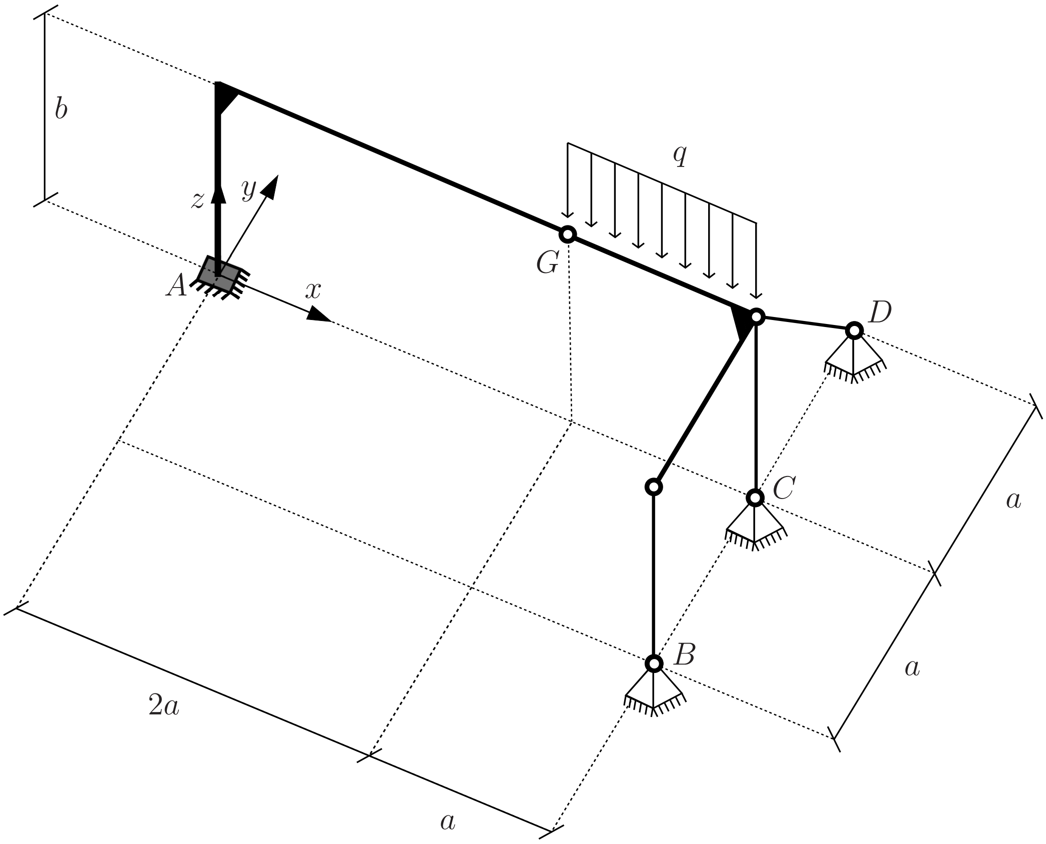


$$
\begin{aligned}
\sum F_{ix_2} = 0 &: N_2 = 0 \\
\sum F_{iz_2} = 0 &: Q_2 = R_1 + R_2 \\
&= (3a - x_2)\frac{q_0}{3a}x_2 + \frac{1}{2}(3a - x_2)(q_0 - \frac{q_0}{3a}x_2) \\
&= \frac{3}{2}q_0 a - \frac{q_0}{6a}\, x_2^2 \\
\sum M^{S_2} = 0 &: M_2 = -R_1\frac{1}{2}(3a - x_2) - R_2\frac{2}{3}(3a - x_2) \\
&= -3q_0 a^2 - \frac{1}{18}q_0 x_2^3 + \frac{1}{2}q_0 a x_2
\end{aligned}
$$

c) Schnittkraftverläufe



2. Aufgabe (ca. X % der Gesamtpunktzahl)



Zwei rechtwinklige starre Rahmen sind in G gelenkig miteinander verbunden. Die Lagerung und die Belastung sind der Darstellung zu entnehmen.

a) Beurteilen Sie das Tragwerk hinsichtlich der statischen Bestimmtheit.

b) Berechnen Sie die Lagerreaktionen an der Einspannstelle A.

Gegeben: $a,\ b,\ q$.

Lösung 2. Aufgabe (ca. X % der Gesamtpunktzahl)

a) Statische Bestimmtheit:

$$a + g = 6\,n$$

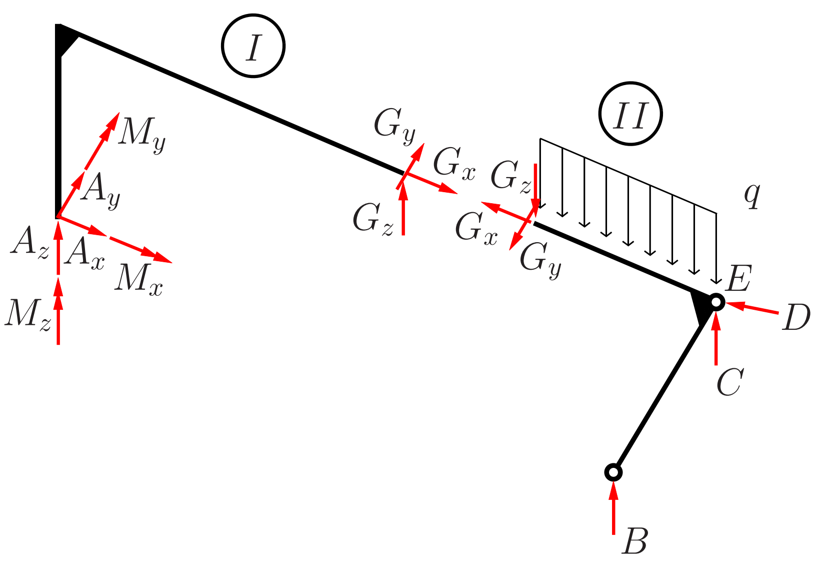
$a =$ Lagerbedingungen
$g =$ Anzahl Zwischenkräfte
$n =$ Anzahl Körper

$\Rightarrow \quad 9 + 3 = 12 = 6 \cdot 2 \quad \rightarrow$ notwendige Bedingung

nicht kinematisch gelagert $\rightarrow$ hinreichende Bedingung

b) Lagerreaktionen

Freischnitt:



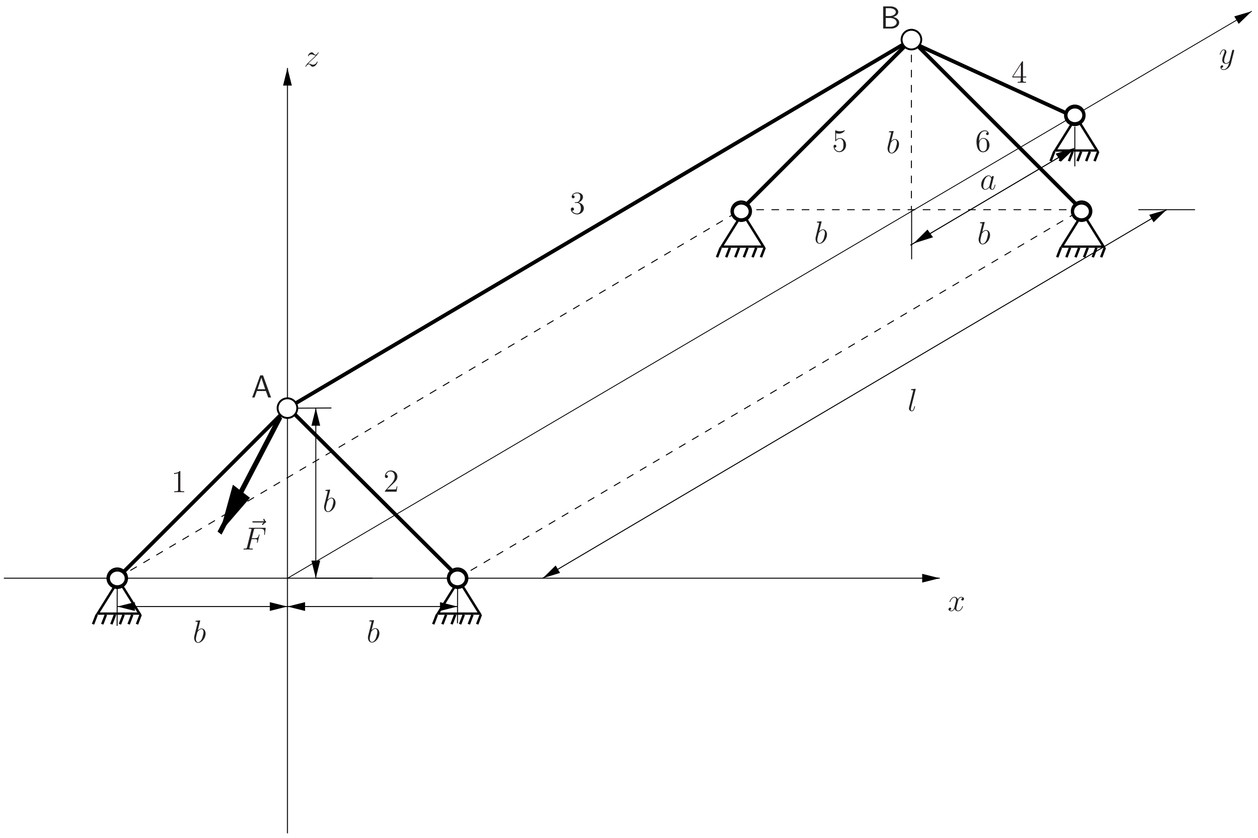
Körper II:

$$\sum M_x^E = 0 : B = 0; \qquad \sum F_{iy} = 0 : D = 0$$
$$\sum M_y^E = 0 : G_z = -\frac{1}{2}qa; \qquad \sum F_{ix} = 0 : G_x = 0$$
$$\sum M_z^E = 0 : G_y = 0; \qquad \sum F_{iz} = 0 : C = \frac{1}{2}qa$$

Körper I:

$$\sum M_x^A = 0 : M_x^A = 0; \qquad \sum F_{ix} = 0 : A_x = 0$$
$$\sum M_y^E = 0 : M_y^A = -qa^2; \qquad \sum F_{iy} = 0 : A_y = 0$$
$$\sum M_z^E = 0 : M_z^A = 0; \qquad \sum F_{iz} = 0 : A_z = \frac{1}{2}qa$$

3. Aufgabe (ca. 27% der Gesamtpunktzahl)



Das aus gelenkig verbundenen Stäben bestehende System (Gerippe eines Zeltes) wird im Punkt A durch eine Seilkraft $\vec{F} = -F\vec{e}_x - F\vec{e}_y - F\vec{e}_z$ belastet.

a) Diskutieren Sie die statische Bestimmtheit des Systems.

b) Stellen Sie die Stabkräfte als Vektoren ausgehend von den Knoten A bzw. B dar.

c) Berechnen Sie die Stabkräfte S_1 bis S_6.

Gegeben: $a,\ b,\ F,\ l$.

Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. habil. P. Betsch
Prof. Dr.-Ing. habil. Th. Seelig

Prüfung in Statik starrer Körper
23. August 2017

Lösung 3. Aufgabe

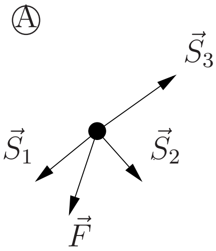
a) stat. Bestimmtheit

$$a + s = 3\,k \qquad \begin{aligned} a &= \text{Auflager} \\ s &= \text{Stäbe} \\ n &= \text{Knoten} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{lr} 3 \cdot 5 + 6 = 21 = 3 \cdot 7 & \rightarrow \text{notwendige Bedingung} \\ \text{nicht kinematisch gelagert} & \rightarrow \text{hinreichende Bedingung} \end{array}$$

b) Freischnitt

Ⓐ

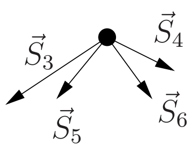


$$\vec{S}_1 = |\vec{S}_1|\vec{e}_{S_1} = S_1 \frac{1}{|-b\vec{e}_x - b\vec{e}_z|}(-b\vec{e}_x - b\vec{e}_z) = -S_1 \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x + \vec{e}_z)$$

$$\vec{S}_2 = |\vec{S}_3|\vec{e}_{S_3} = S_3 \frac{1}{|b\vec{e}_x - b\vec{e}_z|}(b\vec{e}_x - b\vec{e}_z) = S_3 \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x - \vec{e}_z)$$

$$\vec{S}_3 = |\vec{S}_3|\vec{e}_{S_3} = S_3 \frac{1}{|l\vec{e}_y|} l\vec{e}_y = S_3\vec{e}_y$$

$$\vec{F} = F(-\vec{e}_x - \vec{e}_y - \vec{e}_z)$$



Ⓑ

$$\vec{S}_3 = |\vec{S}_3|\vec{e}_{S_3} = S_3 \frac{1}{|-l\vec{e}_y|} - l\vec{e}_y = -S_3\vec{e}_y$$

$$\vec{S}_4 = |\vec{S}_4|\vec{e}_{S_4} = S_4 \frac{1}{|a\vec{e}_x - b\vec{e}_z|}(a\vec{e}_x - b\vec{e}_z) = S_4 \frac{(\vec{e}_x + \vec{e}_z)}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\vec{S}_5 = |\vec{S}_5|\vec{e}_{S_5} = S_5 \frac{1}{|-b\vec{e}_x - b\vec{e}_z|}(-b\vec{e}_x - b\vec{e}_z) = -S_5 \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x + \vec{e}_z)$$

$$\vec{S}_6 = |\vec{S}_6|\vec{e}_{S_6} = S_6 \frac{1}{|b\vec{e}_x - b\vec{e}_z|}(b\vec{e}_x - b\vec{e}_z) = S_6 \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x - \vec{e}_z)$$

c) GGW in A:

$$\vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \vec{S}_3 + \vec{F} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -S_1\frac{1}{\sqrt{2}} + S_2\frac{1}{\sqrt{2}} + 0 - F \\ 0 + 0 + S_3 - F \\ -S_1\frac{1}{\sqrt{2}} - S_2\frac{1}{\sqrt{2}} + 0 - F \end{bmatrix} = \vec{0}$$

GGW in B:

$$\vec{S}_3 + \vec{S}_4 + \vec{S}_5 + \vec{S}_6 = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 + 0 - \frac{S_5}{\sqrt{2}} + \frac{S_6}{\sqrt{2}} \\ -S_3 + S_4\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + 0 + 0 \\ 0 - S_4\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{S_5}{\sqrt{2}} - \frac{S_6}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \vec{0}$$

auflösen ergibt

$$S_1 = -\sqrt{2}\,F$$

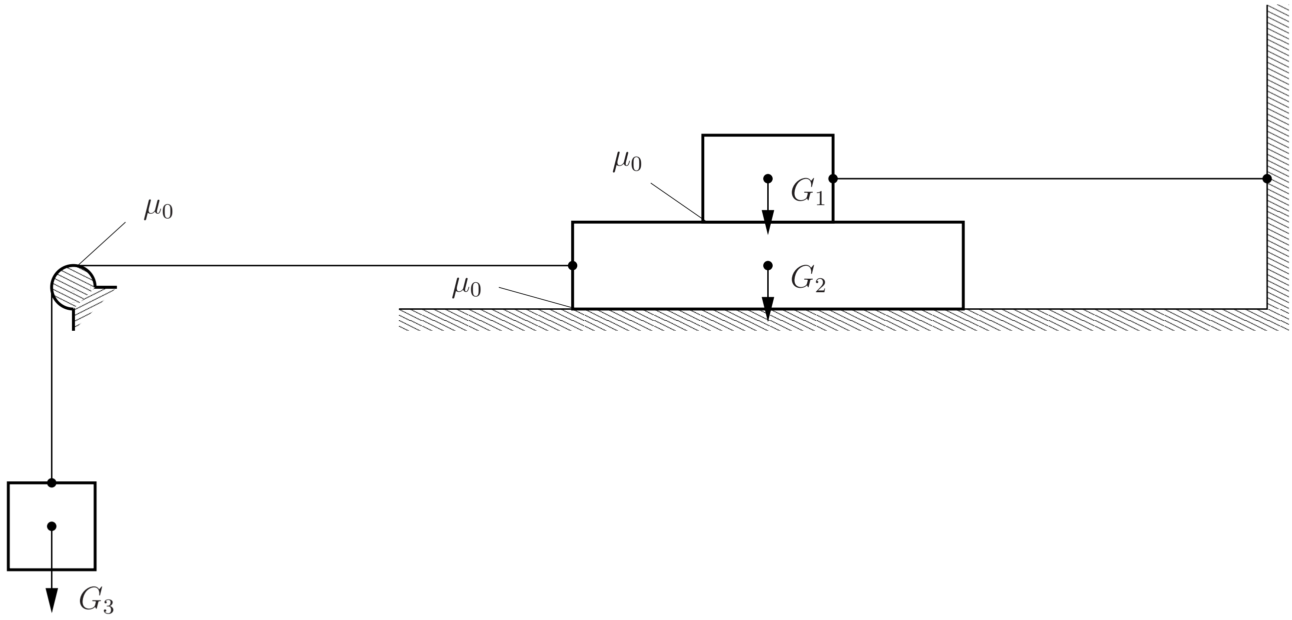
$$S_2 = 0$$

$$S_3 = F$$

$$S_4 = F\,\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$$

$$S_5 = S_6 = -F\,\underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}}_{\frac{1}{\sqrt{2}}}\,\frac{b}{a}$$

4. Aufgabe: (ca. X% der Gesamtpunktzahl)



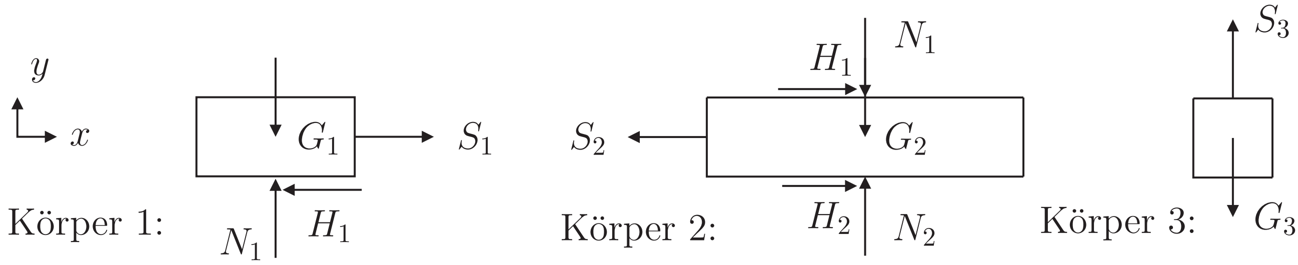
Berechnen Sie für das dargestellte System die maximal mögliche Gewichtskraft G_3, so dass das System in Ruhe bleibt, wobei die Gewichtskräfte G_1 und G_2 sowie der Haftreibungskoeffizient μ_0 gegeben sind.

Gegeben: G_1, G_2, μ_0

Hinweis: Es wird angenommen, dass die Klötze G_1 und G_2 horizontal bleiben, d.h. ein Kippen kann ausgeschlossen werden.

Lösung 4. Aufgabe

Freischnitt



Gegeben: $\mu_0, G_1, G_2, \alpha = \pi/2$

Gesucht: G_{3max} sodass das System in Ruhe bleibt

GGW

$$\text{Körper 1:} \quad \sum F_{ix} = 0: \quad S_1 - H_1 = 0 \tag{1}$$

$$\sum F_{iy} = 0: \quad N_1 - G_1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad N_1 = G_1 \tag{2}$$

$$\text{Körper 2:} \quad \sum F_{ix} = 0: \quad -S_2 + H_1 + H_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad S_2 = H_1 + H_2 \tag{3}$$

$$\sum F_{iy} = 0: \quad N_2 - G_2 - N_1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad N_2 = G_2 + N_1 \tag{4}$$

$$\text{Körper 3:} \quad \sum F_{iy} = 0: \quad S_3 - G_3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad S_3 = G_3 \tag{5}$$

Grenzfall Haftung:

$$H_1 = \mu_0 \, N_1 \tag{6}$$

$$H_2 = \mu_0 \, N_2 \tag{7}$$

$$S_3 = S_2 \, e^{\mu_0 \, \alpha} \quad \text{da} \quad S_3 > S_2, \quad \alpha = \frac{\pi}{2} \tag{8}$$

$G_{3max} =?$

(8) in (5):

$$G_3 = S_2 \, e^{\mu_0 \, \frac{\pi}{2}} \qquad \Big| \quad (3), (6) \text{ und } (7)$$

$$\Rightarrow G_3 = \mu_0 \, (N_1 + N_2) \, e^{\mu_0 \, \frac{\pi}{2}} \qquad \Big| \quad (2) \text{ und } (4)$$

$$\Rightarrow G_3 = \mu_0 \, (2 \, G_1 + G_2) \, e^{\mu_0 \, \frac{\pi}{2}}$$