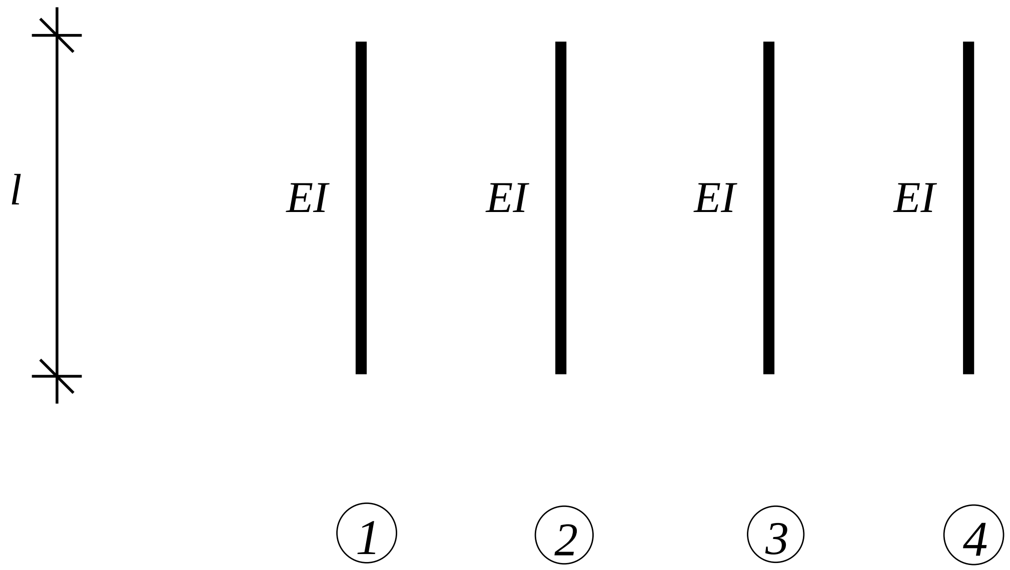
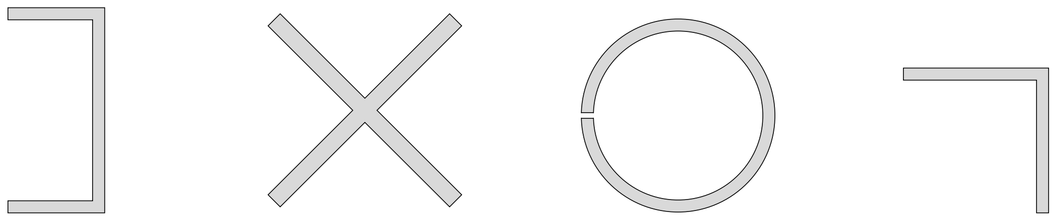
1. Aufgabe: (ca. 12 % der Gesamtpunkte)

a) Skizzieren Sie an den dargestellten Stäben die Knickformen der vier Euler-Knickfälle inklusive Lagerung und geben Sie zum Eulerfall mit der höchsten Knicklast die Randbedingungen (w, w', w'', w''') an.

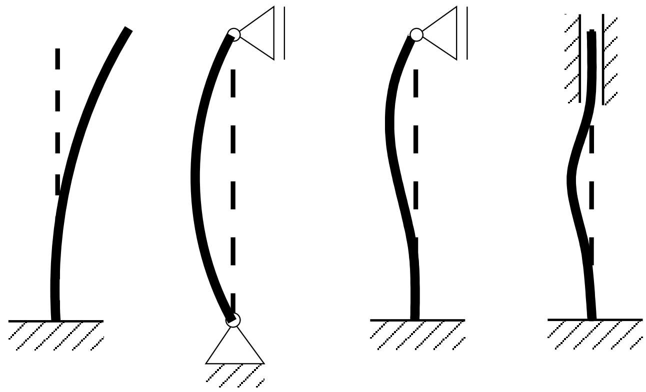


b) Skizzieren Sie qualitativ die Lage des Schubmittelpunktes für folgende Querschnitte:

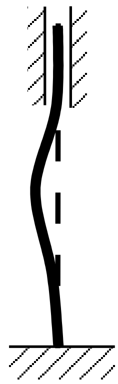


1. Aufgabe:

a) Euler Knickfälle inkl. Lagerung:



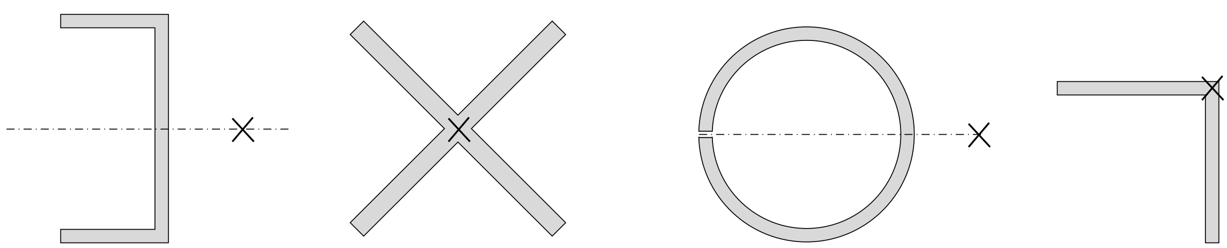
Randbedingungen (w, w', w'', w'''):



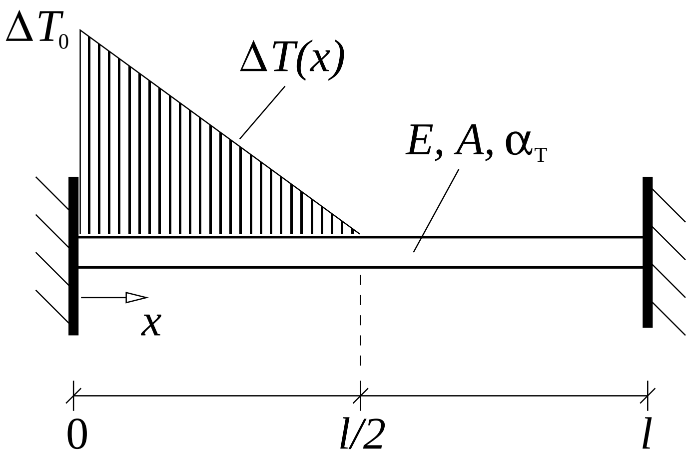
$w = w' = 0$

$w = w' = 0$

b) Schubmittelpunkte:



2. Aufgabe: (ca. 20 % der Gesamtpunkte)

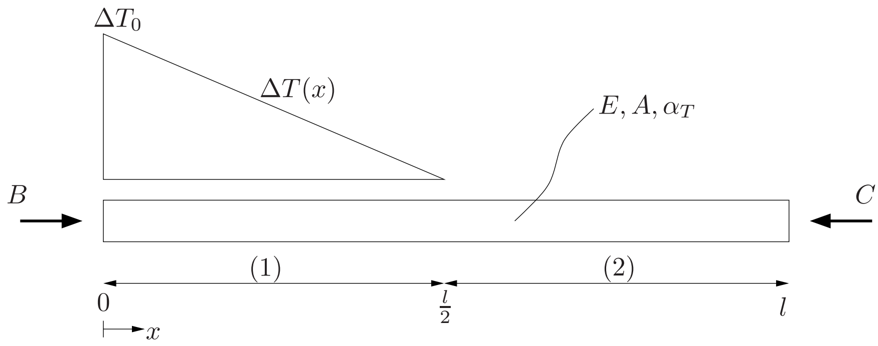


Ein homogener Stab (Länge l, Elastizitätsmodul E, Querschnitt A, thermischer Ausdehnungskoeffizient α_T) sei zwischen zwei starren Wänden gelagert. Ausgehend vom unbelasteten Zustand werde der Stab wie skizziert im Bereich $0 \leq x \leq l/2$ einer linear veränderlichen Temperaturänderung $\Delta T(x)$ ausgesetzt.

Berechnen und skizzieren Sie die Verläufe der Dehnung $\varepsilon(x)$ und Spannung $\sigma(x)$ längs des gesamten Stabes.

Gegeben: l, E, A, α_T, ΔT_0

2. Aufgabe:



- Verschiebungs-DGL

$$u' = \frac{N}{EA} + \alpha_T \Delta T(x)$$

- Temperaturbelastung

$$\Delta T(x) = \begin{Bmatrix} \Delta T_0 \left(1 - \frac{2}{L}x\right) & x \in \left[0, \frac{l}{2}\right] \\ 0 & x \in \left[\frac{l}{2}, l\right] \end{Bmatrix}$$

- RBen und ÜBen

$$u(x=0) = 0 \tag{1}$$
$$u(x=l) = 0 \tag{2}$$
$$u_1(x = \frac{l}{2}) = u_2(x = \frac{l}{2}) \tag{3}$$

- Gleichgewicht

$$\sum F_x = 0 \Leftrightarrow B - C = 0 \Leftrightarrow B = C$$
$$N_1(x) = -B \quad N_2(x) = -C = -B$$

- Verschiebung im Bereich 1

$$u_1(x) = \int_0^x \left[-\frac{B}{EA} + \alpha_T \Delta T_0 \left(1 - \frac{2}{l}x\right)\right] \mathrm{d}\overline{\mathrm{x}} = -\frac{B}{EA}x + \alpha_T \Delta T \left(x - \frac{x^2}{L}\right) + C_1$$

- 1. Integrationskonstante

$$\mathrm{RB}(1) \Rightarrow C_1 = 0$$

- Verschiebung im Bereich 2

$$u_2(x) = \int_0^x \left[-\frac{B}{EA} + \alpha_T \cdot 0\right] \mathrm{d}\overline{\mathrm{x}} = -\frac{Bx}{EA} + C_2$$

- Auflösen nach B

$$\begin{aligned}
&\text{RB}(2) \Rightarrow \quad u_2(x = L) = -\frac{Bl}{EA} + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = \frac{Bl}{EA}\\
&\text{ÜB}(3) \Rightarrow \quad -\frac{Bl}{2EA} + \alpha_T \Delta T_0 \left(\frac{l}{2} - \frac{l}{4}\right) = -\frac{Bl}{2EA} + \frac{Bl}{EA} \quad \Rightarrow B = EA \cdot \alpha_T \Delta T_0 \cdot \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

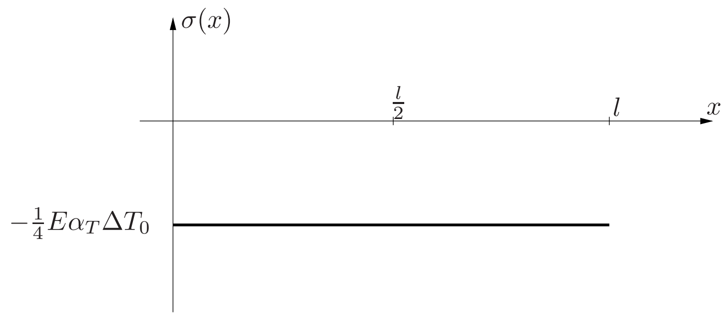
- Spannungen

$$\sigma = \frac{N}{A} = -\frac{B}{A} = -\frac{1}{4} E \alpha_T \Delta T_0 = \sigma(x) = \text{const.}$$

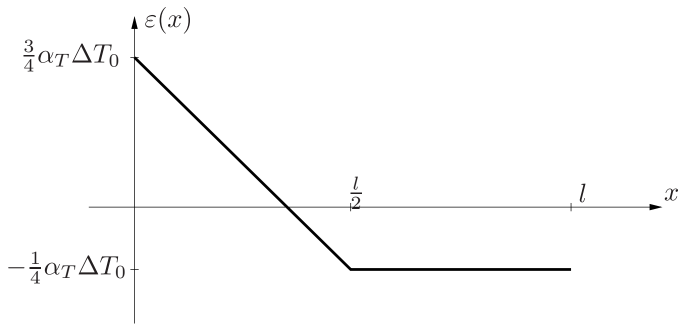
- Dehnungen

$$\varepsilon(x) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \begin{Bmatrix} -\alpha_T \Delta T_0 \cdot \frac{1}{4} + \alpha_T \Delta T_0 \left(1 - \frac{2}{l} x\right) = \alpha_T \Delta T_0 \left(\frac{3}{4} - \frac{2x}{l}\right) & x \in \left[0, \frac{l}{2}\right] \\ -\alpha_T \Delta T_0 \cdot \frac{1}{4} & x \in \left[\frac{l}{2}, l\right] \end{Bmatrix}$$

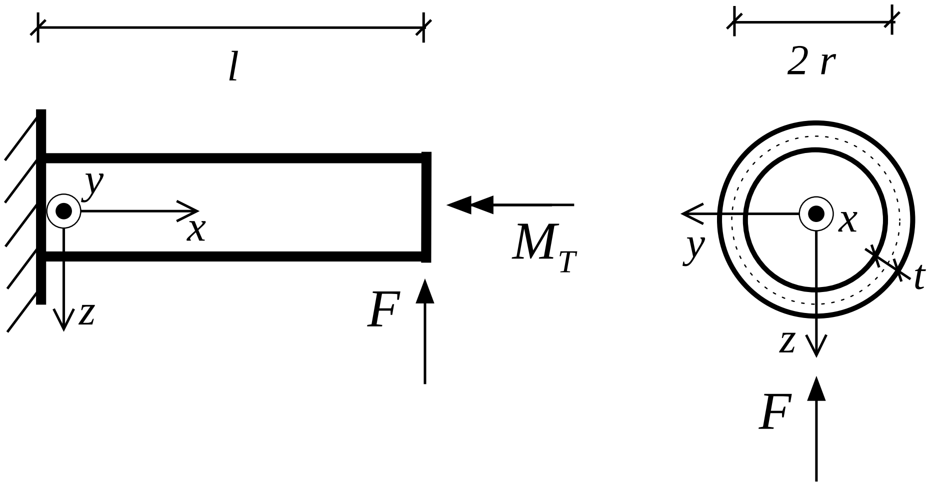
- Spannungsverlauf



- Dehnungsverlauf



3. Aufgabe: (ca. 16 % der Gesamtpunkte)



Ein dünnwandiges Rohr (Länge l, mittlerer Radius r, Dicke $t \ll r$) ist am linken Rand eingespannt und wird am rechten Rand durch eine Kraft F sowie ein Torsionsmoment M_T belastet.

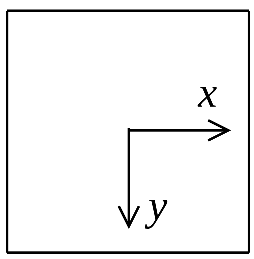
a) Berechnen Sie die Normalspannung σ_x im Punkt $P(x, y, z) = (\frac{1}{2}\, l,\ 0,\ -r)$.

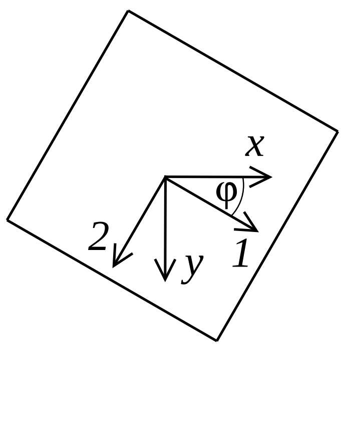
b) Ermitteln Sie in diesem Punkt die Schubspannung unter Vernachlässigung der Querkraft.

c) Berechnen Sie die Hauptnormalspannungen im Punkt P und ihre Richtung φ aus den in a) und b) ermittelten Spannungen.

d) Zeichnen Sie die in a) und b) sowie in c) berechneten Spannungszustände in die unten gegebenen infinitesimalen Elemente ein.

Gegeben: $l = 0.5$ m, $r = 50$ mm, $t = 1$ mm, $F = 10$ N, $M_T = 5$ Nm





3. Aufgabe:

a) Biege(normal)spannung:

$$
\begin{aligned}
M_y(x) \quad &= F(l-x)) &&= 10\ N \cdot (0,5\ m - x)\\
M_y(x = \frac{l}{2}) \quad &= F\frac{l}{2} &&= 10\ N \cdot 0,25\ m = 2,5\ Nm = 2500\ Nmm\\
I_y \quad &= \pi r^3 t &&= \pi \cdot 50^3 \cdot 1\ mm^4 = 125000\pi\ mm^4\\
\sigma_x(P) \quad &= \frac{M_y(x)}{I_y} z &&= \frac{2500\ Nmm}{125000\pi\ mm^4}(-50\ mm) = -\frac{1}{\pi}\frac{N}{mm^2} \approx -0,318\frac{N}{mm^2}
\end{aligned}
$$

b) Schubspannung infolge Torsion:

$$
\tau_{xy}(P) = \frac{M_T}{2A_m t} = \frac{M_T}{2\pi r^2 t} = \frac{-5000\ Nmm}{2\pi \cdot 50^2 \cdot 1\ mm^3} = -\frac{1}{\pi}\frac{N}{mm^2} \approx -0,318\frac{N}{mm^2}
$$

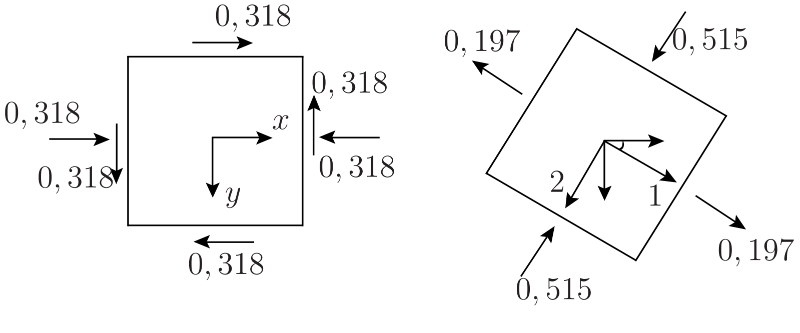
c) Hauptnormalspannungen und -richtungen:

$$
\sigma_{1/2} = \frac{\sigma_x}{2} \pm \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{4} + \tau_{xy}^2} = -\frac{1}{2\pi} \pm \sqrt{\frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{\pi^2}} = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{5}-1}{2\pi} \approx 0,197\ \dfrac{N}{mm^2} & \Leftarrow \sigma_1 \\ \dfrac{-\sqrt{5}-1}{2\pi} \approx -0,515\ \dfrac{N}{mm^2} & \Leftarrow \sigma_2 \end{cases}
$$

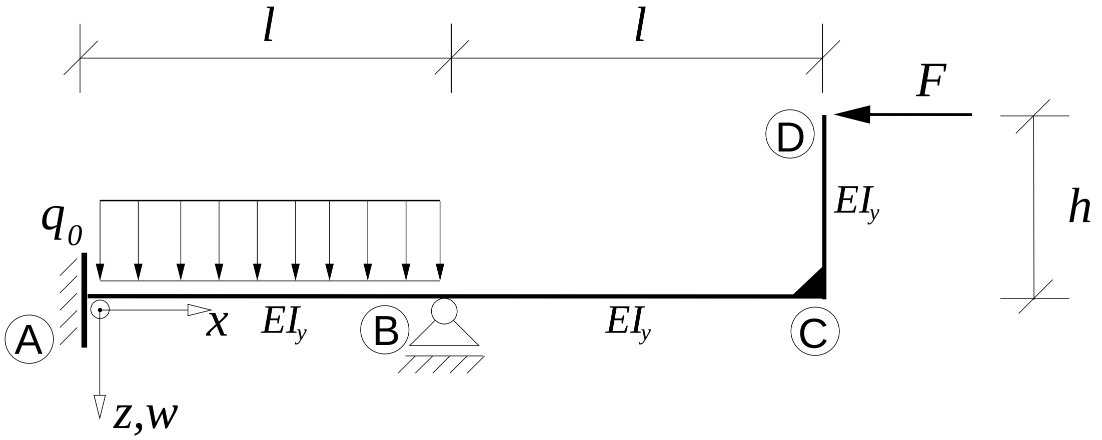
$$
\tan(2\varphi^*) \quad = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi^* = \frac{1}{2}\arctan(2) = 31,7^\circ
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_\xi(\varphi^*) \quad &= \frac{\sigma_x}{2} + \frac{\sigma_x}{2}\cos(2\varphi^*) + \tau_{xy}\sin(2\varphi^*)\\
&= -\frac{1}{2\pi} - \frac{1}{2\pi}\cos(63,4^\circ) - \frac{1}{\pi}\sin(63,4^\circ)\\
&\approx -0,515 = \sigma_2 \qquad \Rightarrow \quad \varphi = \varphi^* + 90^\circ = 121,7^\circ
\end{aligned}
$$

d)



4. Aufgabe: (ca. 25 % der Gesamtpunkte)



Gegeben sei das oben dargestellte System unter der angegebenen Belastung.

a) Ermitteln Sie die Biegelinie $w(x)$ des Trägers für den Bereich A – B – C mit Hilfe der Balkendifferentialgleichung.

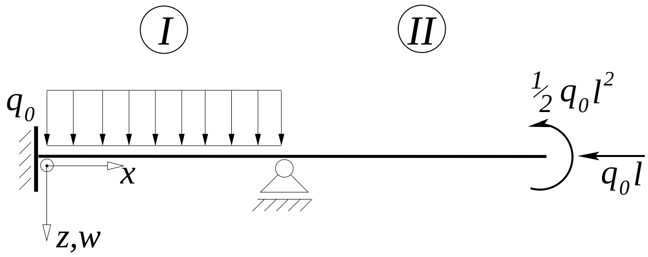
b) Skizzieren Sie qualitativ die Momenten- und die Biegelinie für den gesamten Träger (A – B – C – D).

Gegeben: q_0, $F = q_0 l$, l, $h = l/2$, EI_y

4. Aufgabe:

a) Biegelinie $w(x)$ für den Bereich $A - B - C$:

statisch unbestimmtes System



Bereich I

$$
\begin{aligned}
EIw_I^{(4)} &= q_0 \\
EIw_I''' &= q_0 x + C_1 \\
EIw_I'' &= \frac{1}{2} q_0 x^2 + C_1 x + C_2 \\
EIw_I' &= \frac{1}{6} q_0 x^3 + \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3 \\
EIw_I &= \frac{1}{24} q_0 x^4 + \frac{1}{6} C_1 x^3 + \frac{1}{2} C_2 x^2 + C_3 x + C_4
\end{aligned}
$$

Bereich II

$$
\begin{aligned}
EIw_{II}^{(4)} &= 0 \\
EIw_{II}''' &= C_5 \\
EIw_{II}'' &= C_5 x + C_6 \\
EIw_{II}' &= \frac{1}{2} C_5 x^2 + C_6 x + C_7 \\
EIw_{II} &= \frac{1}{6} C_5 x^3 + \frac{1}{2} C_6 x^2 + C_7 x + C_8
\end{aligned}
$$

Randbedingungen:

$$
\begin{aligned}
EIw_{II}'''(x = 2l) &= -Q_z^{II}(x = 2l) = 0 \\
&\Rightarrow \underline{C_5 = 0}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
w_I(x = 0) &= 0 \Rightarrow \underline{C_4 = 0} \\
w_I'(x = 0) &= 0 \Rightarrow \underline{C_3 = 0}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
EIw_{II}''(x = 2l) &= -M_y^{II}(x = 2l) = -\frac{1}{2} q_0 l^2 \\
&\Rightarrow \underline{C_6 = -\frac{1}{2} q_0 l^2}
\end{aligned}
$$

Übergangsbedingungen:

$$
\begin{aligned}
w_I(x = l) &= 0 && (1) \\
-M_y^I(x = l) &= -M_y^{II}(x = l) = EIw_I''(x = l) = EIw_{II}''(x = l) && (2) \\
w_I'(x = l) &= w_{II}'(x = l) && (3) \\
w_I(x = l) &= w_{II}(x = l) && (4)
\end{aligned}
$$

$$\text{mit (1):} \quad \frac{1}{24}q_0l^4 + \frac{1}{6}C_1l^3 + \frac{1}{2}C_2l^2 = 0 \qquad \Rightarrow C_2 = -\frac{1}{3}C_1l - \frac{1}{12}q_0l^2$$

$$\Rightarrow EIw_I''(x=l) = \frac{1}{2}q_0l^2 + \frac{2}{3}C_1l - \frac{1}{12}q_0l^2$$

$$\text{mit (2):} \quad \frac{2}{3}C_1l + \frac{5}{12}q_0l^2 = -\frac{1}{2}q_0l^2 \qquad \Rightarrow \underline{C_1 = -\frac{11}{8}q_0l} \qquad \Rightarrow \underline{C_2 = \frac{3}{8}q_0l^2}$$

$$\text{mit (3):} \quad \frac{1}{6}q_0l^3 - \frac{11}{16}q_0l^3 + \frac{3}{8}q_0l^3 = -\frac{1}{2}q_0l^3 + C_7 \qquad \Rightarrow \underline{C_7 = \frac{17}{48}q_0l^3}$$

$$\text{mit (4):} \quad \frac{1}{24}q_0l^4 - \frac{11}{48}q_0l^4 + \frac{3}{16}q_0l^4 = -\frac{1}{4}q_0l^4 + \frac{17}{48}q_0l^4 + C_8 \qquad \Rightarrow \underline{C_8 = -\frac{5}{48}q_0l^4}$$

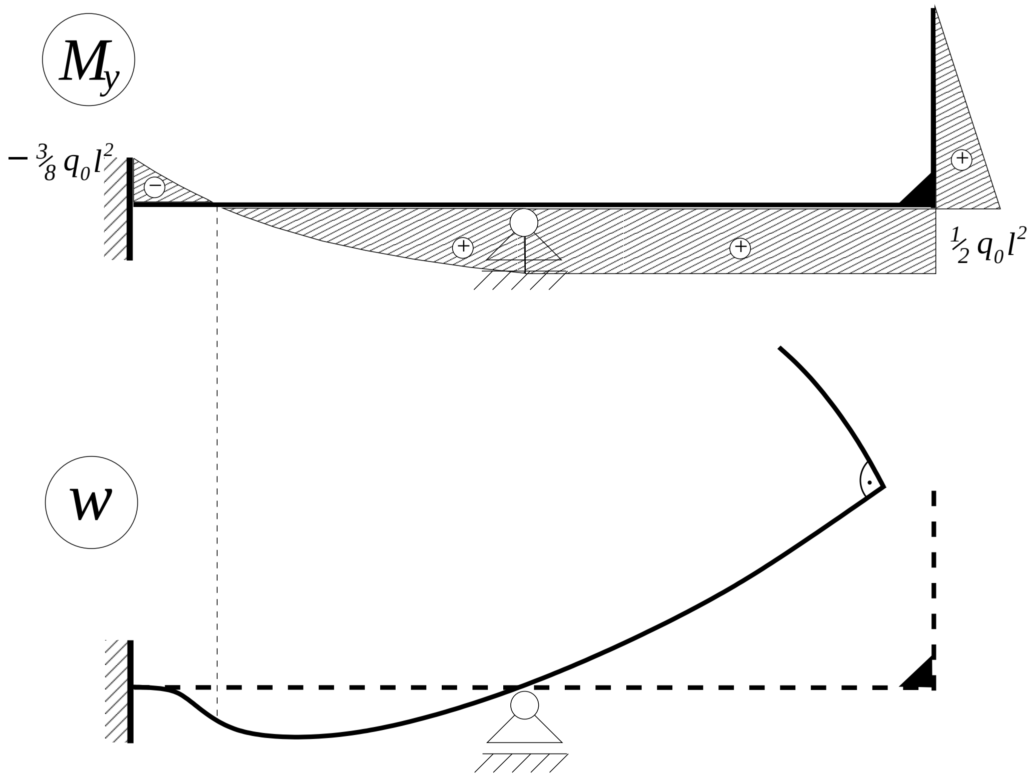
Bereich I

$$\underline{\underline{w_I(x) = \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{24}q_0x^4 - \frac{11}{48}q_0lx^3 + \frac{3}{16}q_0l^2x^2\right)}}$$

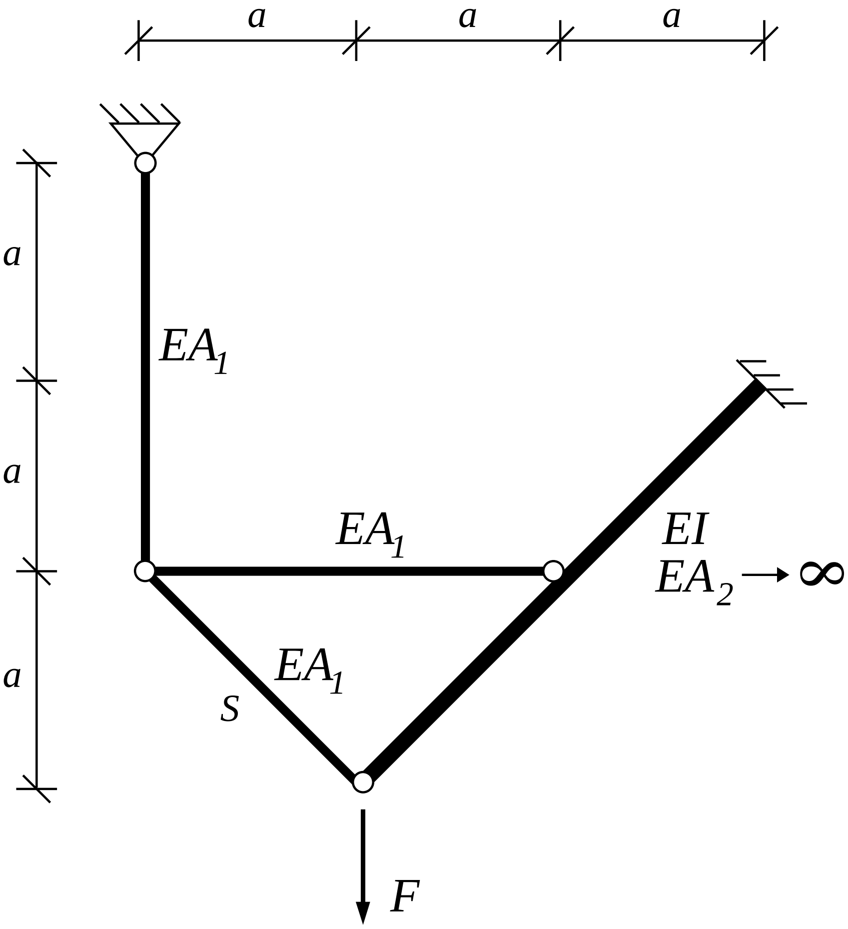
Bereich II

$$\underline{\underline{w_{II}(x) = \frac{1}{EI}\left(-\frac{1}{4}q_0l^2x^2 + \frac{17}{48}q_0l^3x - \frac{5}{48}q_0l^4\right)}}$$

b) Momenten- und Biegelinie für $A - B - C - D$



5. Aufgabe: (ca. 27 % der Gesamtpunkte)



Bestimmen Sie die Kraft in Stab S infolge der angegebenen Belastung mit dem Prinzip der virtuellen Kräfte bzw. dem Arbeitssatz.

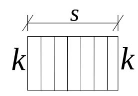
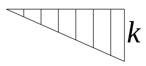
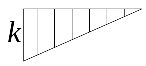
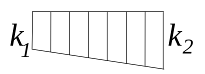
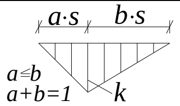
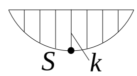
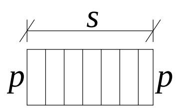
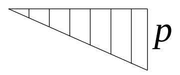
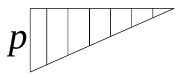
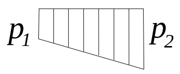
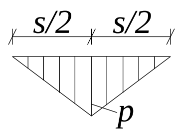
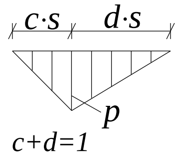
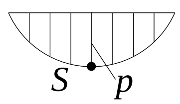
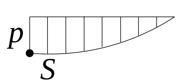
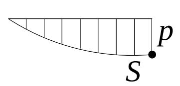
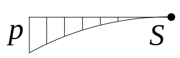
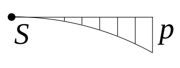
Gegeben: $EA_1,\ EA_2 \to \infty,\ EI,\ F,\ a$

Hinweis: Die Aufgabe ist mit *Energiemethoden* zu lösen. Andere Lösungswege werden nicht bewertet.

Institut für Mechanik
Prof. Dr.-Ing. habil. P. Betsch
Prof. Dr.-Ing. habil. Th. Seelig

Prüfung in
Festigkeitslehre
22. August 2017

Werte der Integrale $\int_0^s P(x) \cdot K(x) \mathrm{d}x$

K(x) / P(x)						
	pks	$\frac{1}{2}pks$	$\frac{1}{2}pks$	$\frac{p}{2}(k_1+k_2)s$	$\frac{1}{2}pks$	$\frac{2}{3}pks$
	$\frac{1}{2}pks$	$\frac{1}{3}pks$	$\frac{1}{6}pks$	$\frac{p}{6}(k_1+2k_2)s$	$\frac{1}{6}pk(1+a)s$	$\frac{1}{3}pks$
	$\frac{1}{2}pks$	$\frac{1}{6}pks$	$\frac{1}{3}pks$	$\frac{p}{6}(2k_1+k_2)s$	$\frac{1}{6}pk(1+b)s$	$\frac{1}{3}pks$
	$\frac{k}{2}(p_1+p_2)s$	$\frac{k}{6}(p_1+2p_2)s$	$\frac{k}{6}(2p_1+p_2)s$	$[\frac{p_1}{6}(2k_1+k_2) + \frac{p_2}{6}(k_1+2k_2)]s$	$[\frac{k}{6}[p_1(1+b) + p_2(1+a)]s$	$\frac{k}{3}(p_1+p_2)s$
	$\frac{1}{2}pks$	$\frac{1}{4}pks$	$\frac{1}{4}pks$	$\frac{p}{4}(k_1+k_2)s$	$\frac{pk}{12b}(3-4a^2)s$	$\frac{5}{12}pks$
	$\frac{1}{2}pks$	$\frac{pk}{6}(1+c)s$	$\frac{pk}{6}(1+d)s$	$\frac{p}{6}[k_1(1+d) + k_2(1+c)]s$	$\frac{pk}{6bc}(2c-c^2-a^2)s$ für $c \geq a$	$\frac{pk}{3}(1+cd)s$
	$\frac{2}{3}pks$	$\frac{1}{3}pks$	$\frac{1}{3}pks$	$\frac{p}{3}(k_1+k_2)s$	$\frac{pk}{3}(1+ab)s$	$\frac{8}{15}pks$
	$\frac{2}{3}pks$	$\frac{1}{4}pks$	$\frac{5}{12}pks$	$\frac{p}{12}(5k_1+3k_2)s$	$\frac{pk}{12}(5-a-a^2)s$	$\frac{7}{15}pks$
	$\frac{2}{3}pks$	$\frac{5}{12}pks$	$\frac{1}{4}pks$	$\frac{p}{12}(3k_1+5k_2)s$	$\frac{pk}{12}(5-b-b^2)s$	$\frac{7}{15}pks$
	$\frac{1}{3}pks$	$\frac{1}{12}pks$	$\frac{1}{4}pks$	$\frac{p}{12}(3k_1+k_2)s$	$\frac{pk}{12}(1+b+b^2)s$	$\frac{1}{5}pks$
	$\frac{1}{3}pks$	$\frac{1}{4}pks$	$\frac{1}{12}pks$	$\frac{p}{12}(k_1+3k_2)s$	$\frac{pk}{12}(1+a+a^2)s$	$\frac{1}{5}pks$

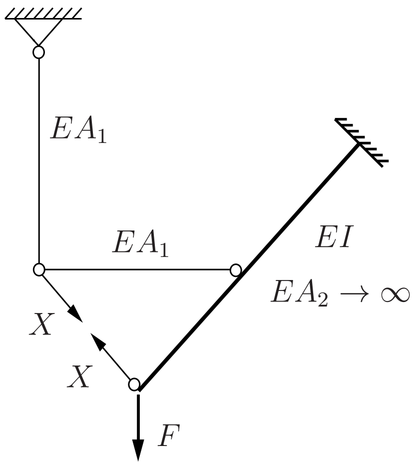
$S \hat{=}$ Scheitel einer quadratischen Parabel

5. Aufgabe:

System ist einfach statisch unbestimmt:
Kragarm, aufgesetztes statisch bestimmtes Dreieck, noch einmal gelagert

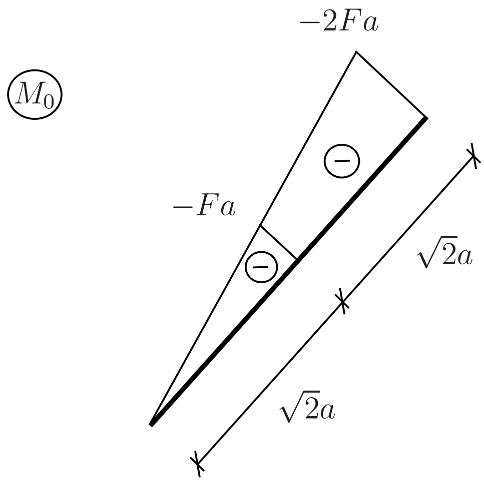
- stat. best. Grundsystem:

  Stab S lösen und durch Kraft X ersetzen.

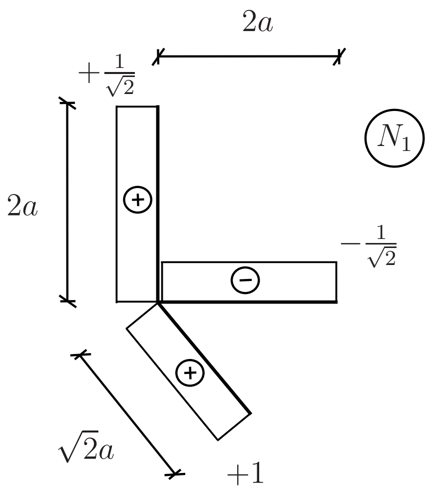


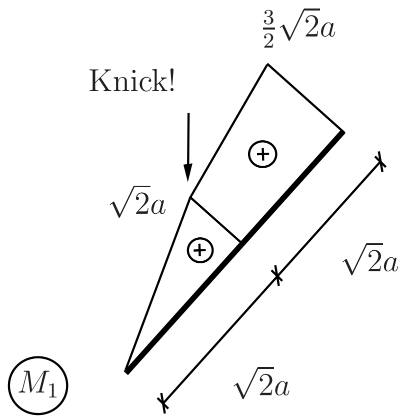
- SG'en für $X = 0$ (äußere Last):

  Wegen $EA_2 \to \infty$: N_0 im schrägen Stab nicht nötig.



- SG'en für $X = 1$ (virtuelle Last):





- Einflusszahlen:

$$\begin{aligned}
\alpha_{10} = \; & \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{3}(-Fa)(\sqrt{2}a)\cdot\sqrt{2}a\right) \\
& + \frac{1}{EI}\left(\frac{\sqrt{2}a}{6}(2\cdot(-Fa)+(-2Fa)) + \frac{\frac{3}{2}\sqrt{2}a}{6}((-Fa)+2\cdot(-2Fa))\cdot\sqrt{2}a\right) \\
= \; & \frac{Fa^3}{EI}\left(-\frac{2}{3}-\frac{4}{3}-\frac{30}{12}\right) = -\frac{9}{2}\frac{Fa^3}{EI}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{11} = \; & \frac{1}{EA}\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\cdot 2a + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\cdot 2a + (1)^2\cdot\sqrt{2}a\right) \\
& + \frac{1}{EI}\left(\frac{1}{3}(\sqrt{2}a)^2\cdot\sqrt{2}a\right) \\
& + \frac{1}{EI}\left(\frac{\sqrt{2}a}{6}\left(2\cdot\sqrt{2}a+\frac{3}{2}\sqrt{2}a\right) + \frac{\frac{3}{2}\sqrt{2}a}{6}\left(\sqrt{2}a+2\cdot\frac{3}{2}\sqrt{2}a\right)\right)\cdot\sqrt{2}a \\
= \; & (2+\sqrt{2})\frac{a}{EA} + \frac{a^3}{EI}\left(\frac{2}{3}\sqrt{2}+\frac{7}{6}\sqrt{2}+2\sqrt{2}\right) \\
= \; & (2+\sqrt{2})\frac{a}{EA} + \frac{23}{6}\sqrt{2}\frac{a^3}{EI}
\end{aligned}$$

- Kompatibilität:

$$\alpha_{10} + \alpha_{11}\cdot X \overset{!}{=} 0 \qquad \Rightarrow \qquad X = -\frac{\alpha_{10}}{\alpha_{11}}$$

$$\Rightarrow \qquad S = X = \frac{\frac{9}{2}\frac{Fa^3}{EI}}{2+\sqrt{2}\frac{a}{EA}+\frac{23}{6}\sqrt{2}\frac{a^3}{EI}}$$