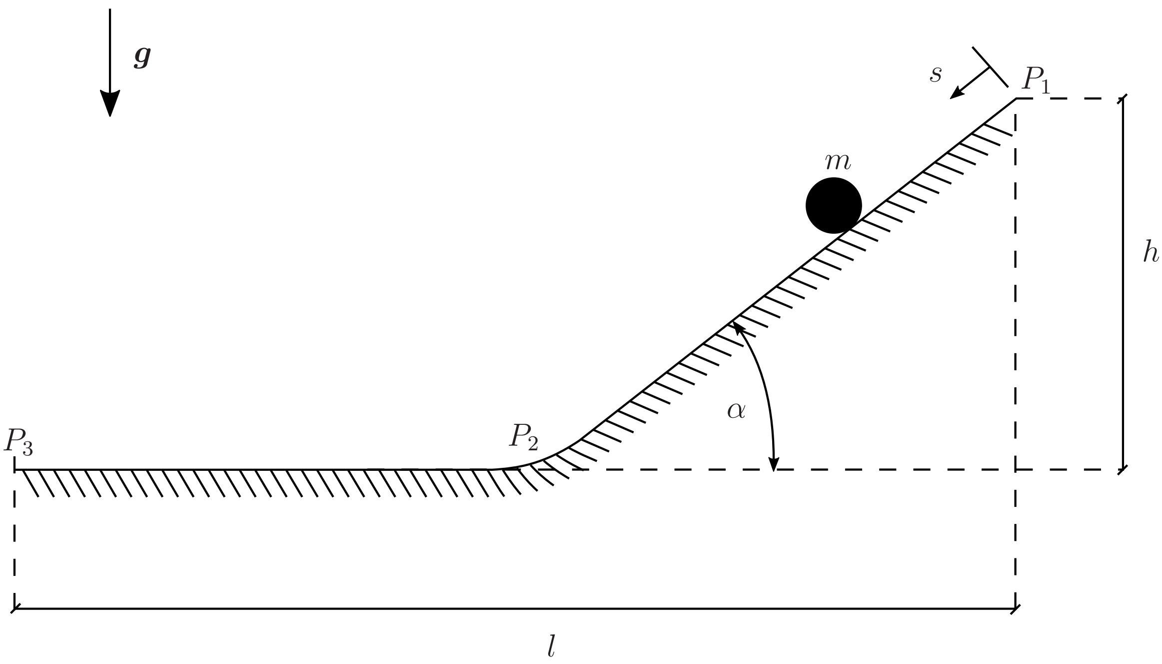
1. Aufgabe: (ca. 22.5 % der Gesamtpunkte)



Eine Punktmasse m rutscht eine schiefe Ebene mit dem Neigungswinkel α hinunter. Nach stoßfreier Umlenkung in P_2 rutscht sie horizontal weiter. Die Bewegung beginnt ohne Anfangsgeschwindigkeit bei P_1 und ist reibungsfrei.

a) Bestimmen Sie die Zeit t_1 in Abhängigkeit des Neigungswinkels α, die die Punktmasse benötigt um P_2 zu erreichen.

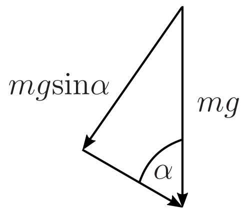
b) Bestimmen Sie die Zeit t_2, die die Punktmasse von P_2 nach P_3 benötigt.

c) Wie groß muss der Winkel α sein, wenn die Zeit für die Bewegung von P_1 bis P_3 minimal sein soll? (Es genügt zu untersuchen, bei welchem α die Zeit extremal wird).

Gegeben: $h,\ l > h,\ g,\ m$

Musterlösung - Aufgabe 1

a) Bewegung auf schiefer Ebene



$$m\ddot{s} = mg\sin(\alpha), \quad \ddot{s} = g\sin(\alpha)$$

Integration

$$\dot{s} = g\sin(\alpha)t + \dot{s}_0 \quad \text{mit} \quad \dot{s}_0 = \dot{s}(t=0) = 0$$
$$s = \frac{1}{2}g\sin(\alpha)t^2 + s_0 \quad \text{mit} \qquad s_0 = s(t=0) = 0$$

Zeit von P_1 nach P_2

$$s_{P_1} = \frac{h}{\sin(\alpha)} = \frac{1}{2}g\sin(\alpha)t^2 \rightarrow \quad t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g\sin^2(\alpha)}}$$

b) Bewegung auf der Horizontalen

$$m\ddot{y} = 0$$

Integration

$$\dot{y} = \dot{y}_0 = g\sin(\alpha)t_1 = \sqrt{2gh}$$
$$y = \sqrt{2gh}t + y_0 \quad \text{mit} \quad y_0 = 0$$

Zeit für die Bewegung von P_1 nach P_2

$$y_{P_3} = l - \frac{h}{\tan(\alpha)} = \sqrt{2gh}t_2$$
$$t_2 = \frac{1}{\sqrt{2gh}}(l - \frac{h}{\tan(\alpha)})$$

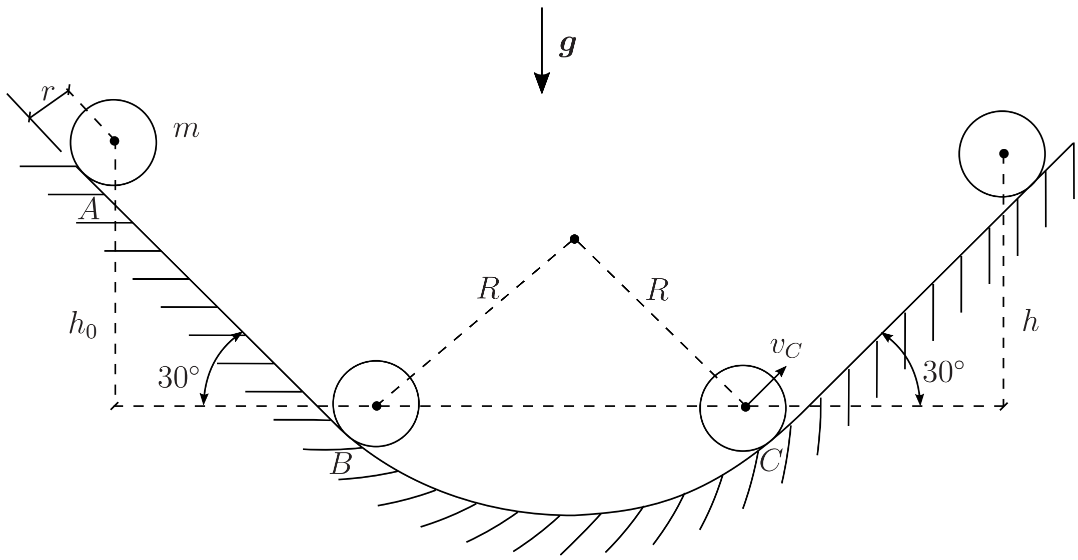
c) Gesamtzeit

$$t_{P_1-P_3} = t_1 + t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g\sin^2(\alpha)}} + \frac{1}{\sqrt{2gh}}[l - \frac{h}{\tan(\alpha)}]$$

Extremum

$$\frac{\mathrm{d}t_{P_1-P_3}}{\mathrm{d}\alpha} = -\sqrt{\frac{2h}{g}}\frac{\cos(\alpha)}{\sin^2(\alpha)} + \sqrt{\frac{h}{2g}}[1 + \frac{\cos^2(\alpha)}{\sin^2(\alpha)}] = 0$$
$$= -\sqrt{\frac{2h}{g}}\frac{\cos(\alpha)}{\sin^2(\alpha)} + \sqrt{\frac{h}{2g}}[\frac{\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)}{\sin^2(\alpha)}]$$
$$= -\sqrt{\frac{2h}{g}}\cos(\alpha) + \sqrt{\frac{h}{2g}} = 0$$
$$\cos(\alpha) = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \alpha = 60^\circ$$

2. Aufgabe: (ca. 22.5 % der Gesamtpunkte)



Eine homogene Walze (Masse m, Radius r) wird aus der Ruhe losgelassen und beginnt unter dem Einfluss des Schwerefeldes auf der rauhen Bahn AC nach rechts zu rollen.

a) Bestimmen Sie die Schwerpunktsgeschwindigkeit v_C im Punkt C der Walze.

b) Rechts vom Punkt C soll für den Haftungskoeffizienten $\mu_0 = 0$ gelten, wobei der Übergang stoßfrei erfolgt. Bestimmen Sie die maximale Höhe $h = h_1$.

c) Bestimmen Sie die maximale Höhe $h = h_2$ für den Fall, das bereits ab dem Punkt B die Haftung entfällt.

d) Es wird nun ein Loch in die Mitte der Walze gebohrt. Der so enstehende Hohlzylinder wird wiederum in A aus der Ruhe losgelassen. Bis zum Punkt C soll der Hohlzylinder rollen. Ab C soll erneut für den Haftungskoeffizienten $\mu_0 = 0$ gelten. Ist die so erreichte maximale Höhe $h = h_3$ größer oder kleiner als h_1? Begründen Sie Ihre Antwort.

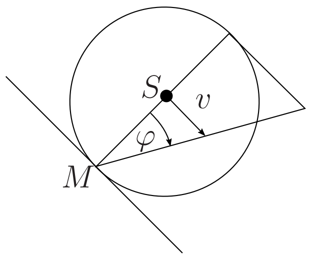
Gegeben: $m,\ h_0,\ r,\ R,\ \theta_{\text{Vollzylinder}} = \frac{1}{2}mr^2,\ g,\ \mu_0$

Musterlösung - Aufgabe 2

a) Energieerhaltungssatz

$$E_{p,A} + E_{k,A} = E_{p,B} + E_{k,B}$$

kinetische Energie mit Rollbedingung $v = \dot{\varphi} r$



$$E_{k,B} = \frac{1}{2}\theta_M \dot{\varphi}_B^2 \quad \text{mit} \quad \theta_M = \theta_s + mr^2 = \frac{1}{2}mr^2 + mr^2 = \frac{3}{2}mr^2$$
$$E_{p,A} = mgh_0$$

Damit folgt

$$mgh_0 + 0 = 0 + \frac{1}{2}\theta_M \dot{\varphi}_B^2$$
$$v_B^2 = \dot{\varphi}^2 r^2 = 2\frac{m}{\theta_M} g h_0 r^2$$

Schwerpunktsgeschwindigkeit im Punkt B

$$v_B = \sqrt{2\frac{m}{\theta_M} g h_0 r^2} = \sqrt{\frac{4}{3} g h_0}$$

b) Energieerhaltungssatz mit Aufspaltung der kinetischen Energie in rotorischen und translatorischen Anteil

$$E_{p,B} + E_{T,B} + E_{Rot,B} = E_{p,C} + E_{T,C} + E_{Rot,C}$$

Da der Übergang stoßfrei erfolgt gilt

$$E_{Rot,B} = E_{Rot,C}$$

und es folgt für den Energieerhaltungssatz

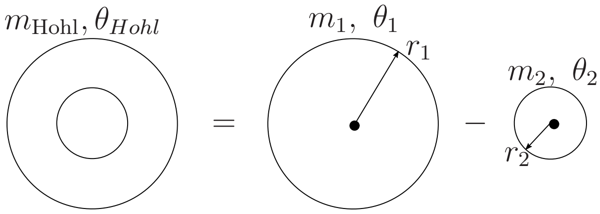
$$\frac{1}{2}mv_B^2 = mgh_1$$
$$h_1 = \frac{2}{3}h_0$$

c) da $v_B = v_D$ gilt folgt $h_2 = h_1$

d) Geschwindigkeit im Punkt B für den Hohlzylinder analog a)

$$v_B^2 = \dot{\varphi}^2 r_1^2 = 2\frac{m_{\text{Hohl}}}{\theta_{M,\text{Hohl}}} g h_0 r_1^2$$
$$h_3 = \frac{1}{2}\frac{v_B^2}{g} = \frac{m_{\text{Hohl}}}{\theta_{M,\text{Hohl}}} h_0 r_1^2$$

Für den Hohlzylinder gilt unter Verwendung der Dichte γ



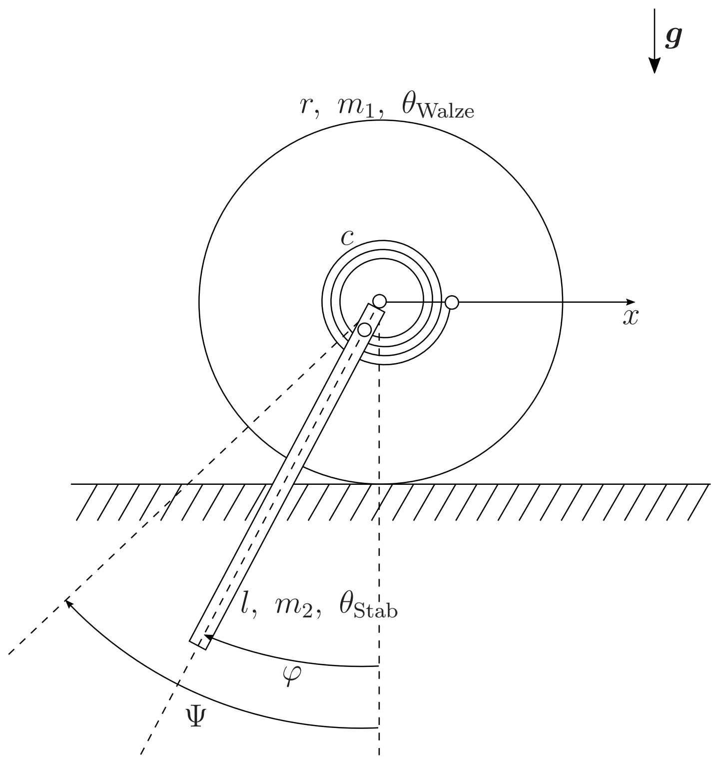
$$\begin{aligned}
m_{\text{Hohl}} &= m_1 - m_2 = \gamma\pi t(r_1^2 - r_2^2)\\
\theta_{S,\text{Hohl}} &= \frac{1}{2}m_1 r_1^2 - \frac{1}{2}m_2 r_2^2 = \frac{1}{2}\gamma\pi t(r_1^4 - r_2^4) = \frac{1}{2}\gamma\pi t(r_1^2 - r_2^2)(r_1^2 + r_2^2)\\
&= \frac{1}{2}m_{\text{Hohl}}(r_1^2 + r_2^2)\\
\theta_{M,\text{Hohl}} &= \theta_{S,\text{Hohl}} + m_{\text{Hohl}} r_1^2 = m_{\text{Hohl}}[\frac{1}{2}(r_1^2 + r_2^2) + r_1^2]
\end{aligned}$$

Damit folgt für die Höhe h_3

$$h_3 = \frac{m_{\text{Hohl}}}{\theta_{M,\text{Hohl}}} h_0 r^2 = \frac{1}{\frac{1}{2}(r_1^2 + r_2^2) + r_1^2} h_0 r_1^2 = \frac{2}{3} h_0 \frac{1}{1 + \frac{1}{3}\frac{r_2^2}{r_1^2}} \leq \frac{2}{3} h_0 = h_1$$

(Antwortsatz mit $\frac{m_{\text{Hohl}}}{\theta_{M,\text{Hohl}}} \leq \frac{n}{\theta_M}$ und damit $h_3 \leq h_0$ ebenfalls ausreichend)

3. Aufgabe: (ca. 32.5 % der Gesamtpunkte)



Das dargestellte System besteht aus einer homogenen Walze (Radius r, Trägheitsmoment θ_{Walze}, Masse m_1) und einem homogenen, starren Stab (Länge l, Trähheitsmoment θ_{Stab}, Masse m_2). Der Stab ist im Mittelpunkt der Walze drehbar gelagert wobei eine Drehfeder (Federsteifigkeit c) beide Bauteile miteinander verbindet. Mit φ wird die Orientierung des Stabes beschrieben, mit Ψ die Orientierung der Walze und die Auslenkung des Schwerpunktes der Walze mit x. Die Walze rollt ohne zu gleiten. Die Feder ist für $\varphi - \Psi = 0$ entspannt. Verwenden Sie φ und x als generalisierte Koordinaten.

a) Wieviele Freiheitsgrade hat das System?

b) Wie lautet die kinematische Bindung zwischen x und Ψ?

c) Bestimmen Sie die kinetische Energie des Systems.

d) Bestimmen Sie die potentielle Energie des Systems.

e) Stellen Sie die Lagrangesche Funktion unter Verwendung der kinematischen Bindung auf und ermitteln Sie die Lagrangeschen Gleichungen 2.Art.

f) Linearisieren Sie die Bewegungsgleichungen bezüglich der Lage, die durch $x = 0,\ \varphi = 0$ und $\Psi = 0$ gekennzeichnet ist und stellen Sie die Bewegungsgleichungen in einer Matrix-Vektor-Schreibweise dar.

Gegeben: $m_1 = m_2 = m,\ r,\ l,\ c,\ g,\ \theta_{\text{Walze}},\ \theta_{\text{Stab}}$

Musterlösung - Aufgabe 3

a) 2 FHG'e

b) $x = \Psi r$

c) kinetische Energie

$$\begin{aligned}
E_k &= \frac{1}{2} m v_{\text{Stab}}^2 + \frac{1}{2}\theta_{\text{Stab}}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\theta_{\text{Walze}}\dot{\Psi}^2 \\
\boldsymbol{r}_{\text{Stab}} &= \begin{pmatrix} x - \sin(\varphi)\frac{l}{2} \\ -\cos(\varphi)\frac{l}{2} \end{pmatrix} \\
\dot{\boldsymbol{r}}_{\text{Stab}} &= \begin{pmatrix} \dot{x} - \cos(\varphi)\frac{l}{2}\dot{\varphi} \\ \sin(\varphi)\frac{l}{2}\dot{\varphi} \end{pmatrix} \\
v_{\text{Stab}} &= |\dot{\boldsymbol{r}}_{\text{Stab}}| = \dot{x}^2 - \cos(\varphi) l\dot{\varphi}\dot{x} + \frac{l^2}{4}\dot{\varphi}^2
\end{aligned}$$

ingesamt ergibt sich somit

$$E_k = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 - \cos(\varphi) l\dot{\varphi}\dot{x} + \frac{l^2}{4}\dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2}\theta_{\text{Stab}}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\theta_{\text{Walze}}\frac{\dot{x}^2}{r^2}$$

d) potentielle Energie

$$E_p = -mg\frac{l}{2}\cos(\varphi) + \frac{1}{2} c(\Delta\varphi)^2 = -mg\frac{l}{2}\cos(\varphi) + \frac{1}{2} c(\frac{x}{r} - \varphi)^2$$

e) Lagrange Funktion

$$\begin{aligned}
L = E_k - E_p = {} & \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 - \cos(\varphi) l\dot{\varphi}\dot{x} + \frac{l^2}{4}\dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2}\theta_{\text{Stab}}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\theta_{\text{Walze}}\frac{\dot{x}^2}{r^2} \\
& + mg\frac{l}{2}\cos(\varphi) - \frac{1}{2} c(\frac{x}{r} - \varphi)^2
\end{aligned}$$

Ableitungen für Lagrangesche Gleichungen 2.Art

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= m(-\frac{1}{2}\cos(\varphi) l\dot{x} + \frac{l^2}{4}\dot{\varphi}) + \theta_{\text{Stab}}\dot{\varphi} \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}) &= \frac{1}{2} m\sin(\varphi) l\dot{x}\dot{\varphi} - \frac{1}{2} m\cos(\varphi) l\ddot{x} + m\frac{l^2}{4}\ddot{\varphi} + \theta_{\text{Stab}}\ddot{\varphi} \\
\frac{\partial L}{\partial \varphi} &= \frac{1}{2} m\sin(\varphi) l\dot{x}\dot{\varphi} - mg\frac{l}{2}\sin(\varphi) + c(\frac{x}{r} - \varphi) \\
\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} &= m\dot{x} - \frac{1}{2} m\cos(\varphi) l\dot{\varphi} + m\dot{x} + \theta_{\text{Walze}}\frac{\dot{x}}{r^2} \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}) &= 2m\ddot{x} + \frac{1}{2} m\sin(\varphi) l\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2} m\cos(\varphi) l\ddot{\varphi} + \theta_{\text{Walze}}\frac{\ddot{x}}{r^2} \\
\frac{\partial L}{\partial x} &= -\frac{c}{r}(\frac{x}{r} - \varphi)
\end{aligned}$$

Lagrangesche Gleichungen 2.Art

$$\begin{aligned}
\cancel{\frac{1}{2} m\sin(\varphi) l\dot{x}\dot{\varphi}} - \frac{1}{2} m\cos(\varphi) l\ddot{x} + m\frac{l^2}{4}\ddot{\varphi} + \theta_{\text{Stab}}\ddot{\varphi} \cancel{- \frac{1}{2} m\sin(\varphi) l\dot{x}\dot{\varphi}} + mg\frac{l}{2}\sin(\varphi) - c(\frac{x}{r} - \varphi) &= 0 \\
2m\ddot{x} + \frac{1}{2} m\sin(\varphi) l\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2} m\cos(\varphi) l\ddot{\varphi} + \theta_{\text{Walze}}\frac{\ddot{x}}{r^2} + \frac{c}{r}(\frac{x}{r} - \varphi) &= 0
\end{aligned}$$

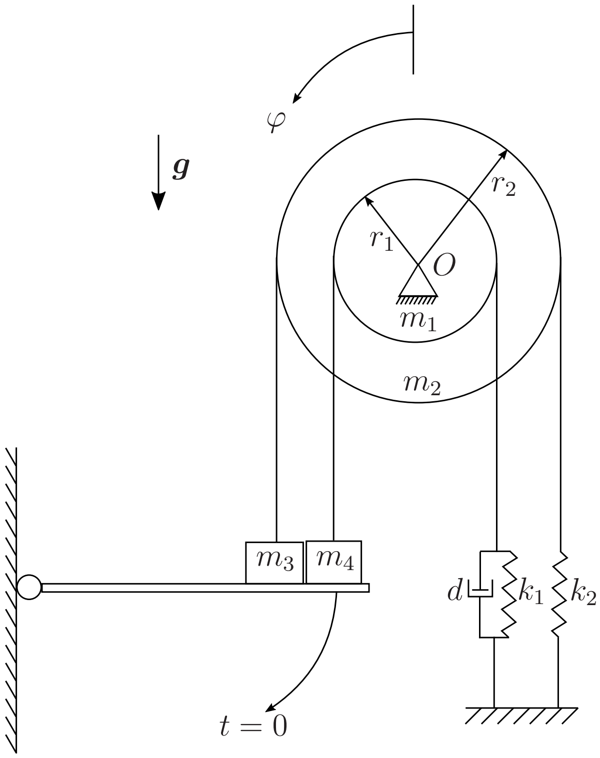
f) Linearisierung mit $\cos(\varphi) \approx 1,\ \sin(\varphi) \approx \varphi,\ \dot{x}\dot{\varphi} \approx 0,\ \dot{\varphi}^2 \approx 0$

$$-\frac{1}{2}ml\ddot{x} + m\frac{l^2}{4}\ddot{\varphi} + \theta_{\text{Stab}}\ddot{\varphi} + mg\frac{l}{2}\varphi - c(\frac{x}{r} - \varphi) = 0$$
$$2m\ddot{x} - \frac{1}{2}ml\ddot{\varphi} + \theta_{\text{Walze}}\frac{\ddot{x}}{r^2} + \frac{c}{r}(\frac{x}{r} - \varphi) = 0$$

Vektor-Matrix Schreibweise

$$\begin{bmatrix} m\frac{l^2}{4} + \theta_{\text{Stab}} & -\frac{1}{2}ml \\ -\frac{1}{2}ml & 2m + \frac{\theta_{\text{Walze}}}{r^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\varphi} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} mg\frac{l}{2} + c & -\frac{c}{r} \\ -\frac{c}{r} & \frac{c}{r^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4. Aufgabe: (ca. 22.5 % der Gesamtpunkte)



Zwei fest miteinander verbundene kreiszylindrische homogene Walzen der Masse m_1 und m_2 mit Radien r_1 und r_2 sind in O reibungsfrei drehbar gelagert. Über die Walzen laufen, ohne zu rutschen, zwei masselose undehnbare, biegeweiche Ketten die rechts durch zwei Federn (Federkonstanten k_1 und k_2) und einem Dämpfer (Dämpfungskonstante d) mit dem Boden verbunden sind. Am linken Ende der Ketten sind zwei Massen m_3 und m_4 angebracht, welche zunächst auf einem Brett aufliegen. Zu Beginn ist das System in Ruhe und die Federn sind entspannt. Das Brett wird zum Zeitpunkt $t = 0$ plötzlich nach unten weggeschwenkt.

a) Berechnen Sie mittels des Drallsatzes die Bewegungsgleichung des Systems in der Koordinate φ.

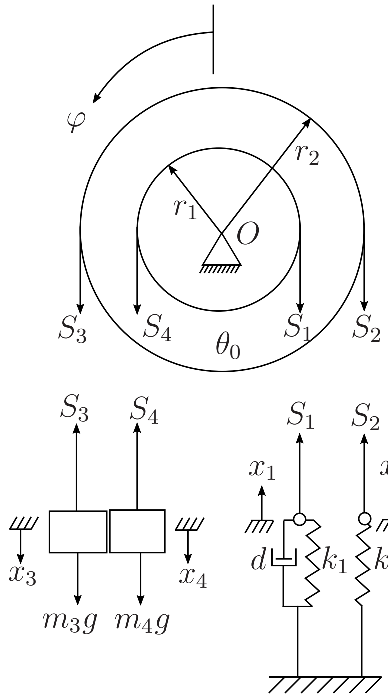
b) Wie groß ist die Eigenfrequenz ω_0 des Systems?

c) Wie groß ist die gedämpfte Eigenfrequenz ω_d des Systems?

d) Wie groß darf die Dämpfungskonstante d maximal sein, damit das System schwingungsfähig ist?

Gegeben: $r_1,\ r_2,\ m_1,\ m_2,\ m_3,\ m_4,\ k_1,\ k_2\ , d,\ g$

Musterlösung - Aufgabe 4



a) Drallsatz bezüglich O mit $S_1 = k_1x_1 + d\dot{x}_1$ und $S_2 = k_2x_2$

$$\sum M_0 = S_3r_2 + S_4r_1 - k_2x_2r_2 - k_1x_1r_1 - d\dot{x}_1r = \theta_0\ddot{\varphi}$$

$$\text{mit } \theta_0 = \frac{1}{2}m_1r_1^2 + \frac{1}{2}m_2r_2^2$$

Schwerpunktsätze für die Massen m_3 und m_4

$$\sum F_{x,3} = m_3\ddot{x}_3 \qquad m_3\ddot{x}_3 = -S_3 + m_3g$$

$$\sum F_{x,4} = m_4\ddot{x}_4 \qquad m_4\ddot{x}_4 = -S_4 + m_4g$$

mit Bindungsgleichungen

$$x_3 = r_2\varphi, \qquad x_4 = r_1\varphi, \qquad x_2 = r_2\varphi, \qquad x_1 = r_1\varphi$$

ergibt

$$\sum M_0 = -(k_1r_1^2\varphi + k_2r_2^2\varphi + dr_1^2\varphi) + m_4gr_1 + m_3gr_2 - m_4r_1^2\ddot{\varphi} - m_3r_2^2\ddot{\varphi} = \theta_0\ddot{\varphi}$$

b) Normalform mit $N = \theta_0 + m_3r_2^2 + m_4r_1^2$

$$\ddot{\varphi} + \frac{k_1r_1^2 + k_2r_2^2}{N}\varphi + \frac{dr_1^2}{N}\dot{\varphi} = \frac{m_4gr_1 + m_3gr_2}{N}$$

Eigenkreisfrequenz

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1r_1^2 + k_2r_2^2}{N}}$$

c) Abklingkoeffizient

$$2\delta = \frac{dr_1^2}{N} = 2D\omega_0$$

Lehrsches Dämpfungsmaß

$$D = \frac{1}{2}\frac{dr_1^2}{N\omega_0} = \frac{1}{2}\frac{dr_1^2}{N\sqrt{\frac{k_1 r_1^2 + k_2 r_2^2}{N}}} = \sqrt{\frac{1}{4}\frac{d^2 r_1^4}{N(k_1 r_1^2 + k_2 r_2^2)}}$$

Kreisfrequenz der gedämpften Schwingung

$$\omega_d = \omega_0\sqrt{1 - D^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \omega_0^2 D^2} = \sqrt{\frac{N(k_1 r_1^2 + k_2 r_2^2) - \frac{1}{4}d^2 r_1^4}{N^2}}$$

d) schwache Dämpfung

$$D < 1 \rightarrow d < \sqrt{\frac{4N}{r_1^4}(k_1 r_1^2 + k_2 r_2^2)}$$