1. Aufgabe: (ca. 11% der Gesamtpunktzahl)
Bitte beantworten Sie folgende Fragen:

1. Wie ist der Schubmittelpunkt definiert?

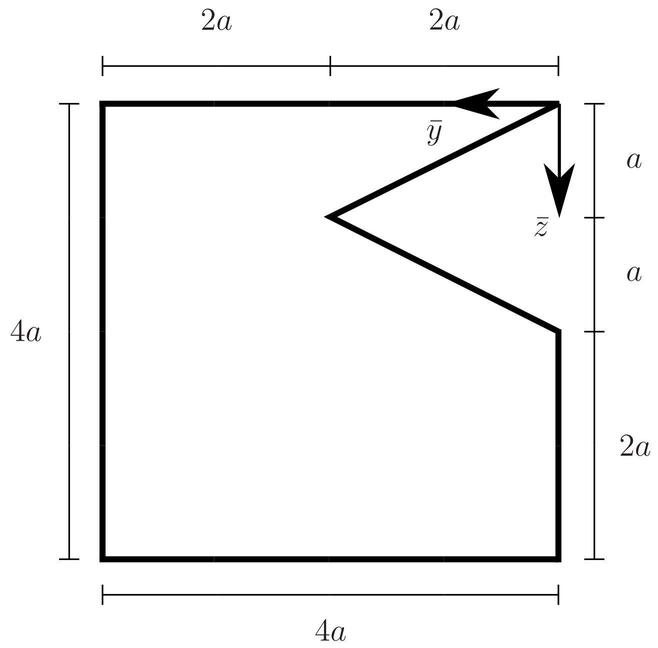
2. Durch welche Einschränkungen des allgemeinen dreidimensionalen Spannungszustandes ergibt sich der ebene Spannungszustand? Wie lauten die unabhängigen Spannungskomponenten beim ebenen Spannungszustand?

3. Zeichnen Sie den Mohrschen Spannungskreis für den reinen Schubspannungszustand. Wie groß sind die Hauptspannungen, wenn der reine Schubspannungszustand durch die Schubspannung τ_0 charakterisiert wird?

4. Erläutern Sie die Aussage des Vertauschungssatzes von Maxwell unter Verwendung eines Beispiels.

5. Was versteht man unter Kernfläche. Welche Bedeutung hat die Kernfläche im Mauerwerksbau? Skizzieren Sie die Kernfläche eines Kreisquerschnitts.

2. Aufgabe (ca. 20% der Gesamtpunktzahl)



Gegeben sei der oben abgebildete eingekerbte Querschnitt.

a) Bestimmen Sie die Koordinaten des Fächenschwerpunktes $(\bar{y}_s, \bar{z}_s)$ bezüglich des gegebenen Koordinatensystems $(\bar{y}, \bar{x})$ und skizzieren Sie den Schwerpunkt in die obige Abbildung.

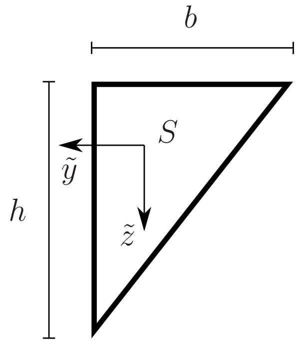
Bitte rechnen Sie im Folgenden mit den Schwerpunktkoordinaten $\bar{y}_s = 2,20a$ und $\bar{z}_s = 2,15a$ weiter.

b) Bestimmen Sie die Flächenträgheitsmomente I_y, I_z, I_{yz} in Bezug auf den Schwerpunkt.

c) Bestimmen Sie die Hauptträgheitsmomente I_1, I_2 und die zugehörigen Winkel φ_1^* und φ_2^*.

Bitte runden Sie sämtliche Ergebnisse auf zwei Nachkommastellen.

<u>Hinweis:</u>



$$I_{\tilde{y}} = \frac{bh^3}{36}$$
$$I_{\tilde{z}} = \frac{b^3h}{36}$$
$$I_{\tilde{y}\tilde{z}} = -\frac{b^2h^2}{72}$$

Gegeben: a

Lösung 2. Aufgabe

a) Schwerpunkt

$$y_s = \frac{\sum y_{s_i} A_i}{\sum y_{s_i} A_i} = \frac{2a \cdot (4a)^2 - \frac{2}{3}a \cdot \frac{1}{2}(2a)^2}{16a^2 - 2a^2} = 2,19a$$

$$z_s = \frac{\sum z_{s_i} A_i}{\sum y_{s_i} A_i} = \frac{2a \cdot (4a)^2 - a \cdot \frac{1}{2}(2a)^2}{16a^2 - 2a^2} = 2,14a$$

b) Flächenträgheitsmomente

$$I_y = \sum \left(\frac{b_i h_i^3}{12} + z_i^2 A_i \right); \; I_z = \sum \left(\frac{h_i b_i^3}{12} + y_i^2 A_i \right); \; I_{yz} = \sum (I_{yz,i} - y_i \, z_i A_i)$$

Variante 1: Dreiecke direkt subtrahieren

$$I_y = \frac{4a \cdot (4a)^3}{12} + (-0.15a)^2 \, 16a^2 - 2 \cdot \frac{2a \cdot a^3}{36} - (-1,48a)^2 \, a^2 - (-0,82a)^2 \, a^2$$
$$\approx \underline{18,72 \, a^4}$$

$$I_z = \frac{4a \cdot (4a)^3}{12} + (-0.2a)^2 \, 16a^2 - 2 \cdot \frac{a \cdot (2a)^3}{36} - 2 \cdot (-1.53a)^2 \, a^2 \approx \underline{16,85 \, a^4}$$

$$I_{yz} = 0 - (-0.2a)\,(-0,15a)\,16a^2 + \frac{a^2 \cdot (2a)^2}{72} + (-1.48a)\,(-1.53a)\,a^2$$
$$- \frac{a^2 \cdot (2a)^2}{72} + (-1,15a)\,(-1,53a)\,a^2 \approx \underline{3,04 \, a^4}$$

Variante 2: Dreiecke zusammenfassen und dann subtrahieren

$$I_{y,\Delta} = \frac{2a \cdot a^3}{36} + \left(\frac{1}{3}a\right)^2 a^2 + \frac{2a \cdot a^3}{36} + \left(\frac{1}{3}a\right)^2 a^2 = \frac{1}{3}a^4$$

$$I_{z,\Delta} = \frac{a \cdot (2a)^3}{36} + (0a)^2 \, a^2 + \frac{a \cdot (2a)^3}{36} + (0a)^2 \, a^2 = \frac{4}{9}a^4$$

$$I_{yz,\Delta} = -\frac{a^2 \cdot (2a)^2}{72} - (0a)\left(-\frac{1}{3}a\right) a^2 + \frac{a^2 \cdot (2a)^2}{72} - (0a)\left(\frac{1}{3}a\right) a^2 = 0$$

$$I_y = \frac{4a \cdot (4a)^3}{12} + (-0.15a)^2 \, 16a^2 - \frac{1}{3}a^4 - (-1.15a)^2 \, 2a^2 \approx \underline{18,72 \, a^4}$$

$$I_z = \frac{4a \cdot (4a)^3}{12} + (-0.2a)^2 \, 16a^2 - \frac{4}{9}a^4 - (-1.53a)^2 \, 2a^2 \approx \underline{16,85 \, a^4}$$

$$I_{yz} = 0 - (-0.2a)\,(-0,15a)\,16a^2 + 0 + (-1,15a)\,(-1.53)\,2a^2 = \underline{3,04 \, a^4}$$

Variante 3: Mit vier positiven Teilflächen rechnen

$$\begin{aligned}
I_y &= \frac{4a\cdot(2a)^3}{12} + (0.85a)^2\,8a^2 + \frac{2a\cdot(2a)^3}{12} + (-1.15a)^2\,4a^2 \\
&\quad + 2\cdot\frac{2a\cdot a^3}{36} + (-1,82a)^2\,a^2 + (-0,48a)^2\,a^2 \approx \underline{18,72\,a^4} \\
I_z &= \frac{2a\cdot(4a)^3}{12} + (-0.2a)^2\,8a^2 + \frac{2a\cdot(2a)^3}{12} + (-0.8a)^2\,4a^2 \\
&\quad + 2\cdot\frac{a\cdot(2a)^3}{36} + 2\cdot(-0,87a)^2\,a^2 \approx \underline{16,85\,a^4} \\
I_{yz} &= 0 - (-0.2a)\,(0,85a)\,8a^2 - 0 - (0.8a)\,(-1,15a)\,4a^2 - 2\cdot\frac{a^2\cdot(2a)^2}{72} \\
&\quad - (-1.82a)\,(-0,87a)\,a^2 - (-0.48a)\,(-0,87a)\,a^2 \approx \underline{3,04\,a^4}
\end{aligned}$$

c) Hauptträgheitsmomente und Winkel zu Hauptachsen

Hauptträgheitsmomente:

$$I_{1,2} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + {I_{yz}}^2} = 17,78a^4 \pm 3,18a^4 = \begin{cases} 20,97a^4 = I_1 \\ 14,60a^4 = I_2 \end{cases}$$

Zugehörige Rotation:

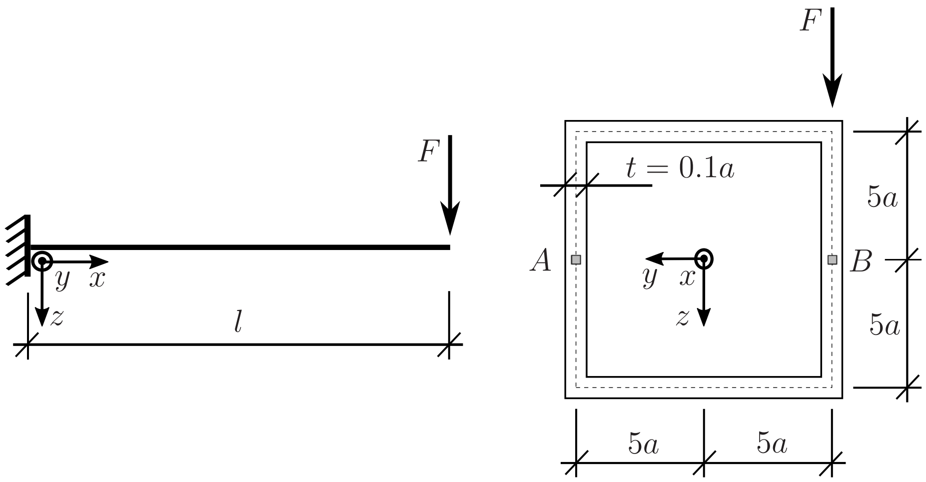
$$\Longrightarrow\ \varphi^* \ = \tfrac{1}{2}\arctan\left(\tfrac{2*3,04}{18,72-16,85}\right) = 36,45^\circ$$

Zugehörige Achse

$$\begin{aligned}
I_\xi(2\cdot\varphi^*) &= \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2}\cos(2\cdot\varphi^*) + I_y z\sin(2\cdot\varphi^*) \\
&= 20,97 = I_1
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \varphi_1 = \varphi^* = 36,45^\circ; \qquad \varphi_2 = \varphi^* + 90^\circ = 126,45^\circ$$

3. Aufgabe (ca. 26% der Gesamtpunktzahl)



Ein Kragträger der Länge l besitzt den in der Zeichnung rechts dargestellten Querschnitt und wird durch eine Einzellast F belastet. Bearbeiten Sie folgende Teilaufgaben:

a) Dimensionieren Sie die Wandstärke t des Hohlkastenprofils so, dass an keiner Stelle eine zulässige Normalspannung $\sigma_{zul} = 10\frac{N}{mm^2}$ überschritten wird.

b) Berechnen Sie für $a = 20mm$ die Schubspannung in den Punkten A und B.

c) Bestimmen Sie die Hauptspannungen σ_1 und σ_2 in dem Punkt A.

<u>Hinweis:</u> Die Verwölbung soll nicht behindert sein. Es kann von einem dünnwandigen Querschnitt ausgegangen werden ($t = 0.1a$).

Gegeben: $F = 1kN, l = 1m, \sigma_{zul} = 10\frac{N}{mm^2}, I_y = I_z = 66,7a^4$

Lösung 3. Aufgabe

a) Normalspannung:

$$\sigma(x,z) = \frac{M(x)}{I_y} z \qquad ; \qquad M_{max} = M(x=0) = Fl$$

$$I_y = 66,7a^4$$

$$z_{max} = 5a + \frac{t}{2} = 5,05a$$

$$\Rightarrow \sigma^{max} = \frac{Fl}{66,7a^4} 5,05a \leq 10 \frac{N}{mm^2} = \sigma_{zul}$$

$$\Rightarrow a \geq \sqrt[3]{\frac{1000N \cdot 1000mm}{66,7 \cdot 10 \frac{N}{mm^2}} \cdot 5.05}$$

$$\Rightarrow a \geq 19,63mm$$

b) Schubspannung infolge Querkraft:

$$\tau^Q(x,z) = \frac{Q_z(x) S(z)}{I_y b(z)}$$

$$Q_z(x) = F$$

$$S(z) = \sum_i A_i^* z_i; \qquad A_1^* = 5,05a * 10,1a = 51,005a^2; \quad z_1 = 2,525a$$

$$A_2^* = 4,95a * 9,9a = 49,005a^2; \quad z_2 = 2,475a$$

$$\Rightarrow S(z) = 7,50025a^3$$

$$I_y = 66,7a^4$$

$$b(z) = 0,2a$$

$$\Rightarrow \tau^Q = \frac{1000N \cdot 7,50025a^3}{66,7a^4 \cdot 0,2a} = \frac{1000N \cdot 7,50025}{66,7 \cdot 400mm^2 \cdot 0,2}$$

$$\Rightarrow \tau^Q = 1,41 \frac{N}{mm^2}$$

Schubspannung infolge Torsion:

$$\tau^T(x,z) = \frac{M^T}{2A_m t} \qquad ; \qquad M_T = F \cdot 5a$$

$$A_m = 100a^2$$
$$t = 0,1a$$

$$\Rightarrow \tau^T = \frac{1000N \cdot 5a}{2 \cdot 100 \cdot a^2 \cdot 0,1a}$$
$$\Rightarrow \tau^T = 0,625\frac{N}{mm^2}$$

Schubspannung gesamt:
Punkt A:

$$\tau = \tau^Q - \tau^T = 0,785\frac{N}{mm^2}$$

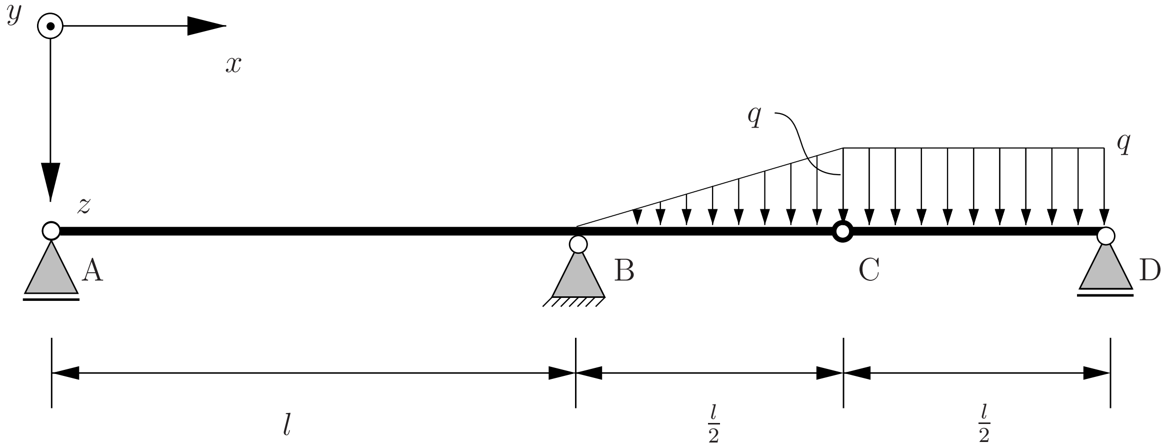
Punkt B:

$$\tau = \tau^Q + \tau^T = 2,035\frac{N}{mm^2}$$

c) Hauptspannungen:
Punkt A:

$$\sigma_z = \sigma_x = 0$$
$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = 0,785\frac{N}{mm^2}$$
$$\sigma_{1/2} = \pm 0,785\frac{N}{mm^2}$$

4. Aufgabe: (ca. 20% der Gesamtpunktzahl)



Das dargestellte System wird in Bereich $B - C$ durch eine linear verlaufende Streckenlast sowie in Bereich $C - D$ durch eine konstante Streckenlast q belastet.

a) Bestimmen Sie die Lagerreaktionen in den Punkten A und D.

b) Zur Integration der Differentialgleichung der Biegelinie werden Rand- und Übergangsbedingungen benötigt.
Geben Sie alle Bedingungen an, welche Null sind.

c) Bestimmen Sie durch Integration den Verlauf der Biegelinie in Bereich $B - C$.
Eine Berechnung der Integrationskonstanten ist nicht erforderlich.

d) Ermitteln Sie den exakten Verlauf der Biegelinie in Bereich $A - B$.

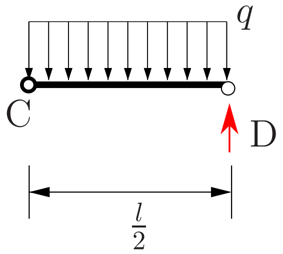
e) Ermitteln Sie den Ort der größten Durchbiegung in Bereich $A - B$.

Gegeben: l, q

Lösung 4. Aufgabe

a) Lagerreaktionen

Freischnitt Bereich C-D



$$\sum M^C = 0: \quad \underline{D = \frac{ql}{4}}$$

Freischnitt des Gesamtsystem liefert

$$\sum M^B = 0: \quad -Al - \frac{ql}{4}\frac{l}{3} - \frac{ql}{2}\frac{3l}{4} + Dl = 0$$

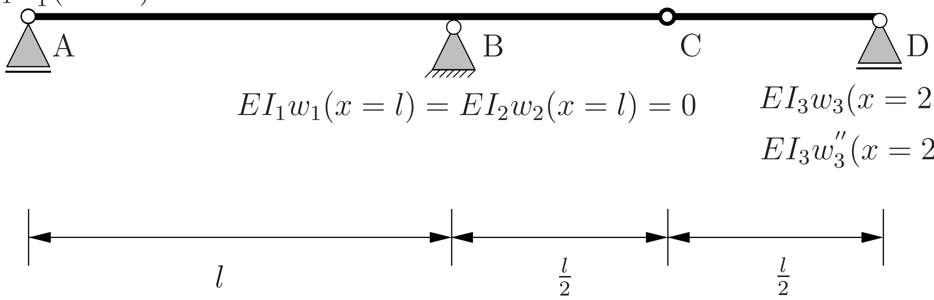
$$\Rightarrow \underline{A = -\frac{5}{24}ql}$$

b) Rand- und Übergangsbedingungen gleich Null

$EI_1 w_1(x=0) = 0$

$EI_1 w_1''(x=0) = 0$

$EI_2 w_2''(x = \frac{3}{2}l) = EI_3 w_3''(x = \frac{3}{2}l) = 0$



$EI_1 w_1(x=l) = EI_2 w_2(x=l) = 0$

$EI_3 w_3(x=2l) = 0$

$EI_3 w_3''(x=2l) = 0$

c) Qualitativer Biegelinienverlauf Bereich B-C

$$EIw^{IV}(\bar{x}) = \frac{2q}{l}\bar{x}$$

$$EIw'''(\bar{x}) = \frac{q}{l}\bar{x}^2 + C_1$$

$$EIw''(\bar{x}) = \frac{q}{3l}\bar{x}^3 + C_1\bar{x} + C_2$$

$$EIw'(\bar{x}) = \frac{q}{12l}\bar{x}^4 + \frac{1}{2}C_1\bar{x}^2 + C_2\bar{x} + C_3$$

$$EIw(\bar{x}) = \frac{q}{60l}q\bar{x}^5 + \frac{1}{6}C_1\bar{x}^3 + \frac{1}{2}C_2\bar{x}^2 + C_3\bar{x} + C_4$$

d) Exakter Biegelinienverlauf Bereich A-B

Variante 1: Mittels Integration

$$\begin{aligned} EIw^{IV}(x_1) &= 0 \\ EIw^{'''}(x_1) &= C_1 \\ EIw^{''}(x_1) &= C_1 x_1 + C_2 \\ EIw^{'}(x_1) &= \frac{1}{2}C_1 x_1^2 + C_2 x_1 + C_3 \\ EIw(x_1) &= \frac{1}{6}C_1 x_1^3 + \frac{1}{2}C_2 x_1^2 + C_3 x_1 + C_4 \end{aligned}$$

Variante 2: Mittels Momentenverlauf

$$M(x_1) = A \cdot x_1 = -\frac{5}{24} ql\, x_1$$

$$\begin{aligned} EIw^{''}(x_1) &= -M(x_1) = \frac{5}{24} ql\, x_1 \\ EIw^{'}(x_1) &= \frac{5}{48} ql\, x_1^2 + C_3 \\ EIw(x_1) &= \frac{5}{144} ql\, x_1^3 + C_3 x_1 + C_4 \end{aligned}$$

RBen & ÜBen:

$$EIw^{'''}(x_1) = -Q(x_1) \quad \rightarrow \underline{C_1 = \frac{5}{24} ql}$$

$$\begin{aligned} EIw^{''}(x_1 = 0) = 0 &\quad \rightarrow \underline{C_2 = 0} \\ EIw(x_1 = 0) = 0 &\quad \rightarrow \underline{C_4 = 0} \\ EIw(x_1 = l) = 0 &\quad \rightarrow \underline{C_3 = -C_1 \frac{l^2}{6} = -\frac{5}{144} ql^3} \end{aligned}$$

Biegelinienverlauf:

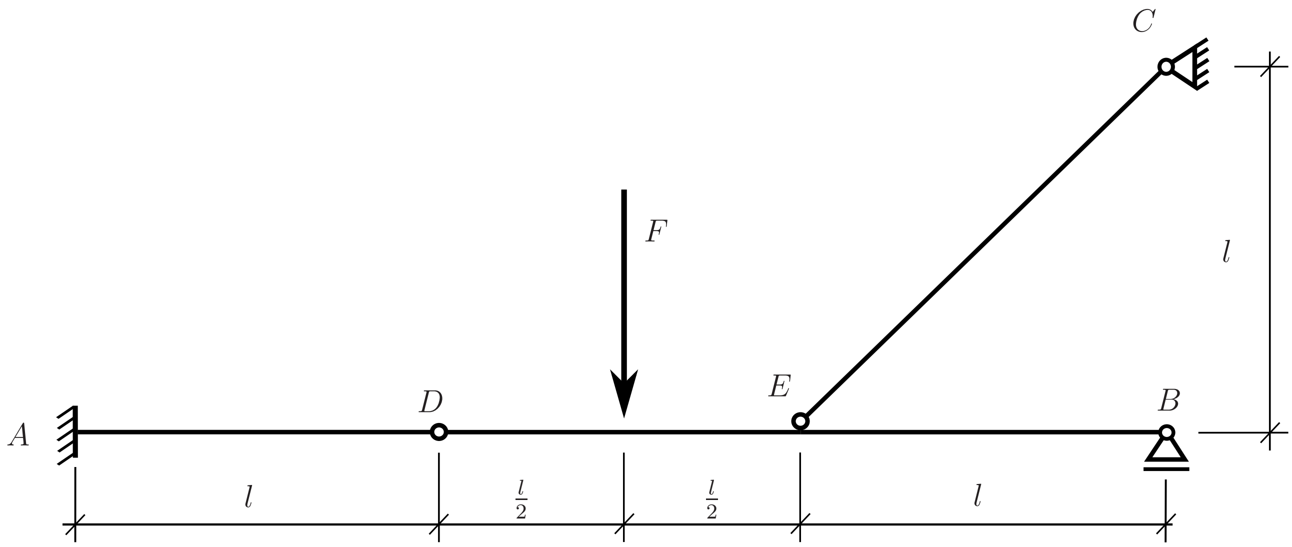
$$\Rightarrow EIw(x_1) = \frac{5}{144} ql x_1^3 - \frac{5}{144} ql^3 x_1$$

d) Ort der größten Durchbiegung in Bereich A-B

$$EIw^{'}(x_1) = \frac{15}{144} ql x_1^2 - \frac{5}{144} ql^3 = 0$$

$$\rightarrow \underline{x_1 = \sqrt{\frac{1}{3}}\, l}$$

5. Aufgabe: (ca. 23% der Gesamtpunktzahl)



Zwei Balken (Biegesteifigkeit EI , Dehnsteifigkeit EA_1) sind im Punkt D durch ein Gelenk miteinander verbunden und werden in Punkt A und B gemäß Zeichnung gelagert. In Punkt E wird ein Stab (Dehnsteifigkeit EA_2) wie dargestelt angebracht. Das Tragwerk wird durch eine Einzellast F belastet.
Bearbeiten Sie folgende Teilaufgaben:

a) Überprüfen Sie ob das System statisch bestimmt ist.

b) Berechnen Sie die Lagerreaktion in Punkt B.

c) Berechnen Sie die Dehnsteifigkeit EA_2 des Dehnstabes so, dass keine Kraft in Lager B wirkt.

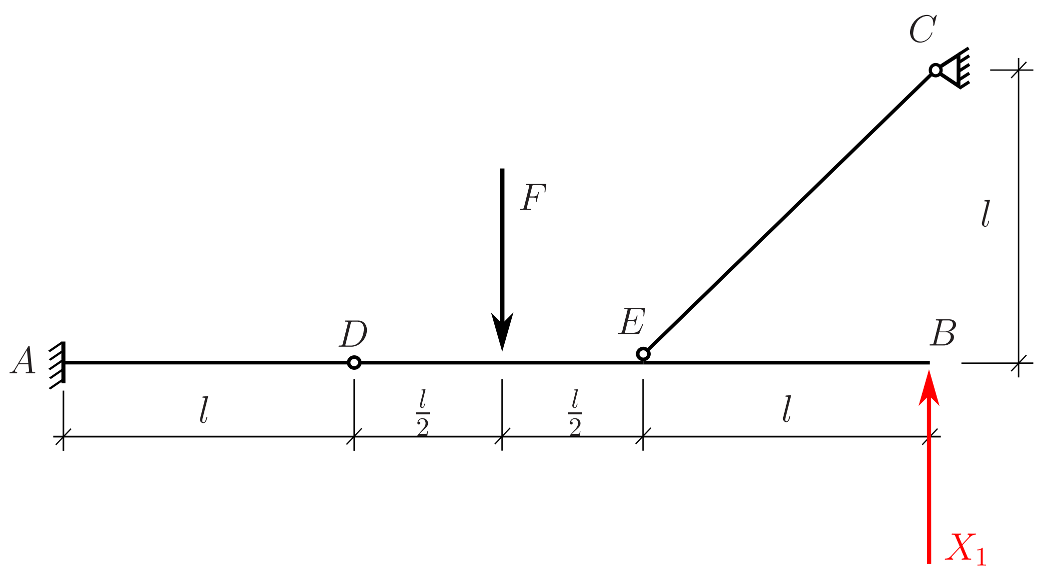
Gegeben: EI, EA_1, EA_2, F, l, Koppeltafel (siehe Anhang)

Lösung 5. Aufgabe

a) Statische Bestimmtheit:

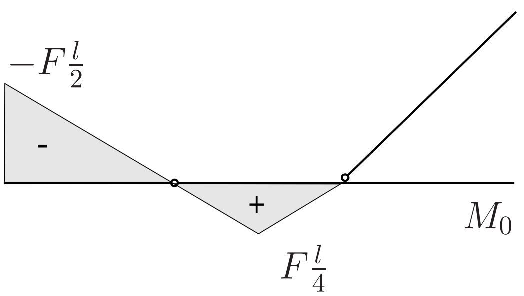
$$r = 6; \quad v = 4; \quad n = 3$$
$$\Rightarrow r + v \neq 3 \cdot n \Rightarrow \textit{1-fach stat.unbest.}$$

b) Statisch bestimmtes Grundsystem (1 Bindung lösen)

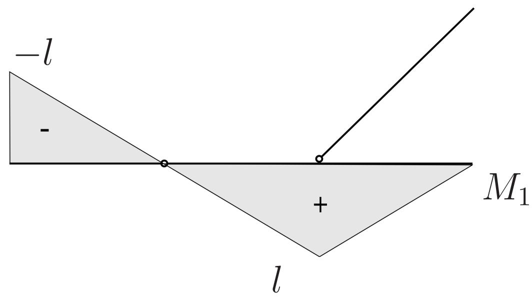


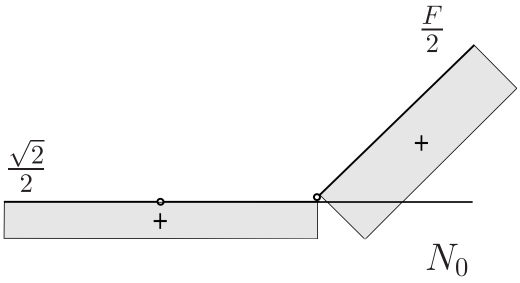
Schnittgrößen:

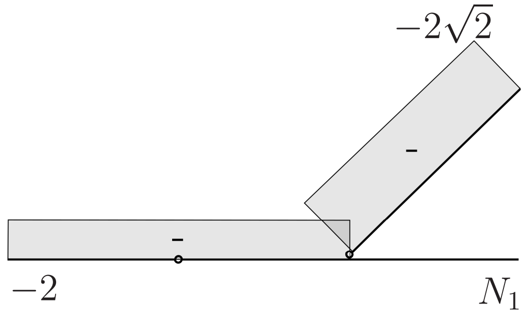
0-LASTFALL



1-LASTFALL







Einflusszahlen/Verschiebungen:

$$\alpha_{10} = \frac{1}{EI}\frac{1}{3}(-l)(-F\frac{l}{2})l + \frac{1}{EI}\frac{1}{4}(F\frac{l}{4})(l)l$$
$$+ \frac{1}{EA_1}1(-2)(\frac{F}{2})2l + \frac{1}{EA_2}1(-2\sqrt{2})(\frac{\sqrt{2}}{2}F)\sqrt{2}l$$
$$\Rightarrow \alpha_{10} = \frac{1}{EI}\frac{11}{48}Fl^3 - \frac{1}{EA_1}2Fl - \frac{1}{EA_2}2\sqrt{2}Fl$$
$$\alpha_{11} = \frac{1}{EI}\frac{1}{3}(-l)(-l)l + \frac{1}{EI}\frac{1}{3}(l)(l)2l$$
$$+ \frac{1}{EA_1}1(-2)(-2)2l + \frac{1}{EA_2}1(-2\sqrt{2})(-2\sqrt{2})\sqrt{2}l$$
$$\Rightarrow \alpha_{11} = \frac{1}{EI}l^3 - \frac{1}{EA_1}8l - \frac{1}{EA_2}8\sqrt{2}l$$

Kompatibilität/Verträglichkeit:

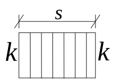
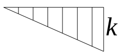
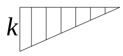
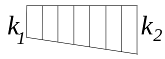
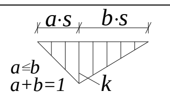
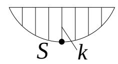
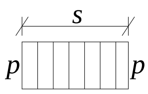
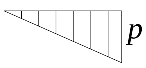
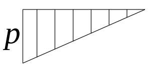
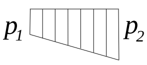
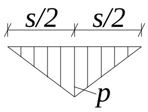
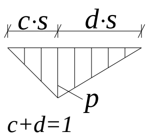
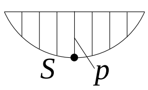
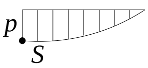
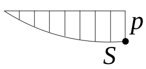
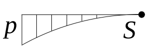
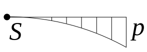
$$\alpha_{10} + X_1\alpha_{11} = 0$$
$$\Rightarrow X_1 = -\frac{\alpha_{10}}{\alpha_{11}} = -\frac{\frac{1}{EI}\frac{11}{48}Fl^3 - \frac{1}{EA_1}2Fl - \frac{1}{EA_2}2\sqrt{2}Fl}{\frac{1}{EI}l^3 - \frac{1}{EA_1}8l - \frac{1}{EA_2}8\sqrt{2}l}$$
$$B = X_1$$

c) Dehnsteifigkeit EA_2

$$B = X_1 = 0$$
$$\Rightarrow \alpha_{10} = \frac{1}{EI}\frac{11}{48}Fl^3 - \frac{1}{EA_1}2Fl - \frac{1}{EA_2}2\sqrt{2}Fl = 0$$
$$\Rightarrow EA_2 = \frac{2\sqrt{2}}{\frac{11}{48}\frac{1}{EI}l^2 - \frac{2}{EA_1}}$$

Anhang: Koppeltafel

Werte der Integrale $\int_0^s P(x) \cdot K(x)\mathrm{d}x$

$K(x)$ / $P(x)$						
	pks	$\frac{1}{2}pks$	$\frac{1}{2}pks$	$\frac{p}{2}(k_1+k_2)s$	$\frac{1}{2}pks$	$\frac{2}{3}pks$
	$\frac{1}{2}pks$	$\frac{1}{3}pks$	$\frac{1}{6}pks$	$\frac{p}{6}(k_1+2k_2)s$	$\frac{1}{6}pk(1+a)s$	$\frac{1}{3}pks$
	$\frac{1}{2}pks$	$\frac{1}{6}pks$	$\frac{1}{3}pks$	$\frac{p}{6}(2k_1+k_2)s$	$\frac{1}{6}pk(1+b)s$	$\frac{1}{3}pks$
	$\frac{k}{2}(p_1+p_2)s$	$\frac{k}{6}(p_1+2p_2)s$	$\frac{k}{6}(2p_1+p_2)s$	$[\frac{p_1}{6}(2k_1+k_2) + \frac{p_2}{6}(k_1+2k_2)]s$	$[\frac{k}{6}[p_1(1+b)+ p_2(1+a)]s$	$\frac{k}{3}(p_1+p_2)s$
	$\frac{1}{2}pks$	$\frac{1}{4}pks$	$\frac{1}{4}pks$	$\frac{p}{4}(k_1+k_2)s$	$\frac{pk}{12b}(3-4a^2)s$	$\frac{5}{12}pks$
	$\frac{1}{2}pks$	$\frac{pk}{6}(1+c)s$	$\frac{pk}{6}(1+d)s$	$\frac{p}{6}[k_1(1+d)+k_2(1+c)]s$	$\frac{pk}{6bc}(2c-c^2-a^2)s$ für $c \geq a$	$\frac{pk}{3}(1+cd)s$
	$\frac{2}{3}pks$	$\frac{1}{3}pks$	$\frac{1}{3}pks$	$\frac{p}{3}(k_1+k_2)s$	$\frac{pk}{3}(1+ab)s$	$\frac{8}{15}pks$
	$\frac{2}{3}pks$	$\frac{1}{4}pks$	$\frac{5}{12}pks$	$\frac{p}{12}(5k_1+3k_2)s$	$\frac{pk}{12}(5-a-a^2)s$	$\frac{7}{15}pks$
	$\frac{2}{3}pks$	$\frac{5}{12}pks$	$\frac{1}{4}pks$	$\frac{p}{12}(3k_1+5k_2)s$	$\frac{pk}{12}(5-b-b^2)s$	$\frac{7}{15}pks$
	$\frac{1}{3}pks$	$\frac{1}{12}pks$	$\frac{1}{4}pks$	$\frac{p}{12}(3k_1+k_2)s$	$\frac{pk}{12}(1+b+b^2)s$	$\frac{1}{5}pks$
	$\frac{1}{3}pks$	$\frac{1}{4}pks$	$\frac{1}{12}pks$	$\frac{p}{12}(k_1+3k_2)s$	$\frac{pk}{12}(1+a+a^2)s$	$\frac{1}{5}pks$

$S \stackrel{\wedge}{=}$ Scheitel einer quadratischen Parabel